

## Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, онлайн-этап, 2015/16 год

1. В классе 13 мальчиков и 16 девочек. К Новому Году учительница раздала ребятам конфеты (каждому хотя бы по одной), причём всем мальчикам досталось поровну конфет, и всем девочкам досталось поровну конфет. Оказалось, что существует лишь один способ раздачи (так, чтобы раздать все конфеты). Какое наибольшее число конфет могло быть у учительницы?

417

2. Среднее арифметическое шестнадцати различных натуральных чисел равно 21. Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из этих чисел.

29

3. Найдите сумму действительных корней всех квадратных трёхчленов вида  $y = x^2 + px + 82$ , где  $p$  принимает все целые значения от  $-11$  до  $31$ .

-328

4. На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $N$  и  $M$ . Отрезки  $AM$  и  $CN$  пересекаются в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если известно, что площади треугольников  $ANP$ ,  $CMP$  и  $CPA$  равны соответственно 8, 10 и 9.

2907

5. Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с рёбрами  $AD = 12$ ,  $AB = 7$ ,  $AA_1 = 7$ . Внутри параллелепипеда расположена сфера, касающаяся трёх граней с вершиной  $A$  и касающаяся диагонали  $B_1 D$ . Найдите радиус сферы.

2,8

6. На плоскости проведены 3 семейства по 7 прямых трёх разных направлений, причём прямые различных направлений пересекаются. Какое наибольшее количество ограниченных областей вырезают они из плоскости?

127

7. Найти наибольшее значение выражения  $x^3 y - 3y^2 x^2$ , если  $0 \leq x \leq 3$  и  $0 \leq y \leq 3$ .

6,75

8. Даны правильная треугольная призма  $ABC A_1 B_1 C_1$  и конус, вершина которого лежит в точке  $A$ , а окружность основания проходит через точки  $B_1$  и  $C_1$ . Известно, что точки  $B$  и  $C$  лежат на боковой поверхности конуса. Найдите угол между образующей конуса и его высотой, если  $AB = 1$ ,  $AB_1 = 5$ . В ответ запишите квадрат тангенса найденного угла.

1

9. В клубе собрались 12 путешественников. Когда зашёл разговор о стране  $N$ , оказалось, что вместе любые 7 путешественников побывали во всех городах страны  $N$  (то есть каждый город посетил хоть один из этих 7 путешественников), а любые 6 — нет (то есть найдётся город, в котором не был ни один из этих 6 путешественников). При каком минимальном количестве городов в стране  $N$  это могло быть?

126

10. В депо три пути для формирования составов. Пути расположены с севера на юг. На пути №1 стоит состав из 25 вагонов. За одну операцию маневрирования тепловоз может перевезти один вагон с любого пути на любой другой путь. Причём он может брать и ставить вагоны только с одной (южной) стороны. За какое наименьшее количество операций тепловоз сможет собрать все вагоны на пути №1 в порядке, обратном исходному?

12

11. Пусть  $f(n)$  — целое число, ближайшее к числу  $\sqrt{n}$ . Обозначим  $g(n) = \frac{1}{f(n)}$ . Найдите сумму

$$g(211) + g(212) + \dots + g(2025).$$

19