

Г.В. Сычёва, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев

ГИА

МАТЕМАТИКА

ТЕМА

**«Комбинаторика
и основы
теории
вероятностей»**

ТЕМА

**«Текстовые
задачи»**

9

класс

Тестовые задания частей 1 и 2

ВПЕРВЫЕ!

А В С — А з б у к а Г И А

Г.В. Сычёва, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев

МАТЕМАТИКА

Текстовые задачи.

Прогрессии.

Комбинаторика

и основы теории вероятностей



Астрель
Москва

УДК 373:51
ББК 22.1я721
С95

Сычёва, Г.В.
С95 **Математика : Текстовые задачи. Прогрессии. Комбинаторика и основы теории вероятностей / Г.В. Сычёва, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев. — М.: Астрель, 2012. — 31, [1] с. (ABC — Азбука ГИА). ISBN 978-5-271-39630-4 (ООО «Издательство Астрель»)**

Настоящее пособие предназначено для подготовки девятиклассников к успешной сдаче ГИА. Приведен необходимый теоретический материал и задания для самостоятельного решения. Все задачи для самостоятельного решения снабжены ответами.

Пособие предназначено для учащихся общеобразовательных школ, а также учителей.

**УДК 373:51
ББК 22.1я721**

Тесты

**Сычёва Галина Владимировна, Гусева Наталья Борисовна
Гусев Владимир Алексеевич**

МАТЕМАТИКА

**Текстовые задачи. Прогрессии.
Комбинаторика и основы теории вероятностей**

Редакция «Образовательные проекты»

Отв. редактор *Г.Н. Хромова*. Худ. редактор *Т.Н. Войткевич*

Тех. редактор *А.Л. Шелудченко*. Корректор *И.Н. Мокина*

Дизайн обложки *Н.А. Шармай*

Оригинал-макет подготовлен ООО «БЕТА-Фрейм»

Подписано в печать 20.10.2011. Формат 84×108^{1/32}.

Усл. печ. л. 1,68. Тираж 6 000 экз. Заказ №

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — литература учебная

Сертификат соответствия № РОСС RU.АЕ51.Н15301 от 04.05.2011

ООО «Издательство Астрель»

129085, Москва, пр-д Ольминского, д. 3а

Издаётся при техническом содействии ООО «Издательство АСТ»

ISBN 978-5-271-39630-4 (ООО «Издательство Астрель»)

© Сычёва Г.В., Гусева Н.Б., Гусев В.А.

© ООО «Издательство Астрель»

Содержание

Предисловие	4
ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ	5
Классификация типов задач и методов их решения	5
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	9
ПРОГРЕССИИ	12
Основные формулы	12
Методы решения задач	13
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	15
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ	19
Перестановки	20
Размещения	20
Сочетания	21
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	21
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	23
Свойства вероятности	24
Геометрическое определение вероятности	26
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	27
ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ	29
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	31
ОТВЕТЫ	32

Предисловие

Пособие рассчитано на самостоятельную или под руководством учителя подготовку выпускников 9-х классов к государственной итоговой аттестации (ГИА) по математике в новой форме.

Каждый вариант экзаменационной работы состоит из 2-х частей и включает 23 задания. Четыре из них посвящены теме «Текстовые задачи», одно — теме «Прогрессии», одно — теме «Комбинаторика» и одно — теме «Основы теории вероятностей». В первой части — это задания 3 и 18 («Текстовые задачи»), 13 («Прогрессии»), 10 («Комбинаторика»), 11 («Основы теории вероятностей») и во второй части — задания 21 и 22 только по теме «Текстовые задачи»).

В учебном пособии в содержание темы «Основы теории вероятностей» входит и раздел «Элементы статистики».

В каждом разделе даётся краткое изложение теоретического материала и примеры решения типовых задач, соответствующих формату ГИА. Для тренинга и самопроверки приведено большое количество заданий различного уровня сложности. В конце книги к ним даны ответы.

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Классификация типов задач и методов их решения

Текстовые задачи представляют собой традиционный раздел школьной математики. Условия этих задач излагаются в словесной форме, для их решения нужно представить условие в виде уравнения или системы, т.е. необходимо составить математическую модель задачи. Такое представление, конечно, не однозначно и во многом зависит от выбора неизвестных величин. Удачный выбор может существенно упростить вид получающегося уравнения или системы.

Все задачи разбивают на характерные типы. В задачах определённого типа может быть различие не только в числовых данных, но и в описанных явлениях. Общей должна быть зависимость между данными и искомыми величинами. Задачи одного типа решаются, как правило, одним и тем же приёмом.

Например, выделяют задачи:

- на числовые зависимости (на сумму (разность) и кратное сравнение, на нахождение трёх чисел по их суммам, взятым попарно, на излишки и недостатки данных величин, деление числа на части, пропорциональное деление и т.д.);

- на проценты;
- на концентрацию и смеси;
- на движение;
- на совместную работу и т.д.

Для успешного решения задач полезно различать задачи на «три величины» и задачи на «четыре величины».

В тех и других задачах входящие величины связаны формулой $c = a \cdot b$:

- производительность труда (Π), время работы (t), выполненный объём работы (A): $A = \Pi \cdot t$;

- скорость (V), время (t), расстояние (S): $S = V \cdot t$;

- объём (масса) смеси (A), концентрация вещества ($p\%$), объём (масса) данного вещества в смеси (A_1): $A = A_1 \cdot \left(\frac{100}{p}\right)$;

- цена товара (Z_0), количество товара (n), стоимость (Z): $Z = Z_0 \cdot n$.

В задачах на «три величины» указан определённый объём (A) выполняемой работы (площадь поля, количест-

во страниц в рукописи, объём бассейна, расстояние между пунктами и т.д.) и можно найти (или оно дано) конкретное значение скорости протекания процесса (определённое значение производительности труда, скорости движения, цены товара и т.д.). Данные задачи на «три величины» мы вносим в таблицу с временем столбцами. Приведём примеры решения таких задач.

Пример 1. Туристу до станции нужно было пройти 8 км. Пройдя 7 км, он сделал привал на 15 мин и поэтому, чтобы придти на станцию вовремя, увеличил скорость на 2 км/ч. Найдите скорость туриста после остановки.

Решение. Рассмотрим движение туриста после остановки:

	S , км	V , км/ч	t , ч
Фактически	1	x	$\frac{1}{x}$
По плану	1	$x - 2$	$\frac{1}{x - 2}$

Так как фактически на один последний километр турист затратил на $\frac{1}{4}$ ч меньше, чем по плану, то $\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$.

$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 = 0, \\ x(x - 2) \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x = -2, \\ x = 4. \end{cases}$ Условию задачи удовлетворяет только $x = 4$. После остановки турист двигался со скоростью 4 км/ч. *Ответ:* 4 км/ч.

Пример 2. Катер прошёл 7,5 км по течению реки и 2 км по озеру, затратив на весь путь 30 мин. Найдите скорость катера по озеру, если скорость течения реки 4 км/ч.

	V , км/ч	t , ч	S , км
По озеру	x	$\frac{2}{x}$	2
По течению	$x + 4$	$\frac{7,5}{x + 4}$	7,5

Решение. Так как на весь путь было затрачено 0,5 часа, то $\frac{7,5}{x + 4} + \frac{2}{x} = \frac{1}{2}$; $\begin{cases} x^2 - 15x - 16 = 0, \\ x(x + 4) \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x = -1, \\ x = 16. \end{cases}$ Условию задачи удовлетворяет только $x = 16$. *Ответ:* 16 км/ч.

Пример 3. После улучшения технологии производства на обработку одной детали тратится времени на 15 мин меньше, чем прежде. Теперь 14 деталей обрабатывается за то же время, за которое ранее обрабатывалось 12 деталей. Сколько времени тратится теперь на обработку одной детали?

Решение. Составим таблицу.

	Время на обработку 1 детали (мин)	Время обработки (мин)	Количество деталей
По старой технологии	$x + 15$	$12(x + 15)$	12
По новой технологии	x	$14 \cdot x$	14

$14x = 12(x + 15)$, $x = 90$. *Ответ:* 1,5 часа.

Пример 4. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 6% и 30%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов, чтобы получить 120 т стали с содержанием никеля 20%?

Решение.

	Масса стали (т)	Процентное содер- жание никеля %	Масса никеля (т)
1-й сплав	x	6	$0,06x$
2-й сплав	$120 - x$	30	$0,3(120 - x)$
3-й сплав	120	20	$0,2 \cdot 120$

$0,06x + 0,3(120 - x) = 0,2 \cdot 120$, $0,24x = 12$, $x = 50$.
50 т — масса стали с 6% содержанием никеля, $120 - 50 =$
 $= 70$ (т) — масса стали с 30% содержанием никеля. *От-*
вет: нужно взять 50 т стали с 6% содержанием никеля и
70 т — с 20% содержанием никеля.

Главной отличительной особенностью задач на «четыре величины» является отсутствие в тексте задачи какого-либо указания на конкретный объем выполняемой работы и на скорость выполнения этой работы. Как правило, в этих задачах фигурируют время и части работы.

В задачах такого вида бывает удобно принять объем всей «работы» за единицу и рассмотреть следующие четыре величины:

— время, необходимое на выполнение всей работы каждым участником, если он работает один (x);

— часть выполненной работы за единицу времени ($\frac{1}{x}$);

— время фактической работы (t) каждым участником;

— выполненная часть работы ($\frac{t}{x}$) каждым участником.

Данные задачи вносятся в таблицу с четырьмя столбцами. Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 5. Два трактора могут вспахать поле за 6 ч. Второй трактор, работая один, мог бы выполнить эту рабо-

ту на 5 ч быстрее, чем один первый трактор. За сколько часов может вспахать поле один первый трактор?

Решение. Данные задачи занесём в таблицу.

	Время выполнения всей работы (ч)	Часть работы, выполненной за 1 ч	Время работы (ч)	Выполненная часть работы
I	x	$\frac{1}{x}$	6	$\frac{6}{x}$
II	$x - 5$	$\frac{1}{x - 5}$	6	$\frac{6}{x - 5}$

Так как за 6 ч тракторами было вспахано всё поле, то

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{x - 5} = 1; \begin{cases} x^2 - 17x + 30 = 0, \\ x(x - 5) \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ x = 15, \\ x(x - 5) \neq 0, \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ x = 15. \end{cases}$$

Так как время обработки поля вторым трактором не может быть отрицательным, то условию задачи удовлетворяет только $x = 15$. *Ответ:* 15 ч.

Пример 6. Два велосипедиста одновременно выехали из двух сёл навстречу друг другу и встретились через 36 минут. За какое время проезжает расстояние между сёлами первый велосипедист, если ему для этого требуется на 0,5 часа меньше, чем второму?

Решение. Занесём данные в таблицу.

	Время на весь путь (мин)	Часть пути, пройденного за 1 мин	Время движения (мин)	Пройденная часть пути
I	x	$\frac{1}{x}$	36	$\frac{36}{x}$
II	$x + 30$	$\frac{1}{x + 30}$	36	$\frac{36}{x + 30}$

Так как, выехав одновременно, через 36 минут велосипедисты встретились, то вместе они преодолели всё расстояние (выполнили всю работу), поэтому $\frac{36}{x} + \frac{36}{x + 30} = 1$.

$\begin{cases} x^2 - 42x - 1080 = 0, \\ x(x + 30) \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x = 60, \\ x = -18. \end{cases}$ Так как время не может быть отрицательным, то условию задачи удовлетворяет $x = 60$. *Ответ:* 60 мин.

В первой части экзаменационной работы встречаются в основном задания на составление (выбор) математической модели к текстовой задаче при выбранных неизвестных величинах.

Задачи для самостоятельного решения

1. Двое рабочих изготовили 660 деталей, причём второй изготовил на 20% больше, чем первый. Сколько деталей изготовил первый рабочий? Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначено количество деталей, изготовленных первым рабочим.

1. $x + 0,2x = 660$;

3. $x + 20x = 660$;

2. $x + 1,2x = 660$;

4. $x + 0,8x = 660$.

2. По шоссе едут два велосипедиста с одной и той же скоростью. Если первый увеличит скорость на 3 км/ч, а второй уменьшит скорость на 3 км/ч, то первый за 2 часа проедет столько же, сколько второй за 3 часа. С какой скоростью едут велосипедисты? Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой V обозначена скорость велосипедистов.

1. $2V = 3(V - 3)$;

3. $(V + 3) \cdot 2 = 3(V - 3)$;

2. $(V + 3) \cdot 2 = 3V$;

4. $(V - 3) \cdot 2 = 3(V + 3)$.

3. В первый день Петя прочитал в 3 раза больше страниц, чем во второй, а в третий день — на 20 страниц меньше, чем во второй. Сколько страниц прочитал Петя во второй день, если за три дня он прочитал 110 страниц? Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначено число страниц, прочитанных во второй день.

1. $3x + x - 20 = 110$;

3. $3x + x + x - 20 = 110$;

2. $\frac{x}{3} + x + x - 20 = 110$;

4. $3x + x + x + 20 = 110$.

4. Прибыль, полученная предпринимателем за ноябрь и декабрь, составила 17 500 рублей, при этом прибыль за ноябрь на 25% ниже, чем за декабрь. Какую прибыль получил предприниматель за декабрь? Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначена величина прибыли за декабрь.

1. $0,25x + x = 17\ 500$;

2. $x + x - 0,25x = 17\ 500$;

3. $x + 0,25x + x = 17\ 500$;

4. $x - 0,25x = 17\ 500$.

5. Расстояние между двумя деревнями почтальон преодолевает пешком за 3 часа, а на велосипеде — за час. Скорость на велосипеде на 10 км/ч больше, чем пешком. Найдите скорость почтальона пешком. Выберите уравнение,

соответствующее условию задачи, если буквой V обозначена скорость почтальона пешком.

1. $3(V - 10) = V$;
2. $3V = V + 10$;
3. $3(V + 10) = V$;
4. $3V = V - 10$.

6. Из Москвы в Псков вышла грузовая машина со скоростью 50 км/ч. Через два часа вслед за ней из Москвы вышла легковая машина со скоростью 100 км/ч. На каком расстоянии от Москвы легковая машина догонит грузовую? Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой S обозначено искомое расстояние.

1. $\frac{S}{100} - \frac{S}{50} = 2$;
2. $\frac{S}{100} + \frac{S}{50} = 2$;
3. $\frac{S}{50} - \frac{S}{100} = 2$;
4. $100S - 50S = 2$.

7. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из двух пунктов и встретились через 2 часа. Расстояние между пунктами 20 км. Какова скорость первого пешехода, если она на 1 км/ч больше скорости второго? Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой V обозначена скорость первого пешехода.

1. $2V + 2(V + 1) = 20$;
2. $2V + 2(V - 1) = 20$;
3. $2V - 2(V - 1) = 20$;
4. $2V - 2(V + 1) = 20$.

8. Когда каждую сторону квадрата уменьшили на 2 дм, его площадь уменьшилась на 8 дм². Какова первоначальная длина стороны квадрата? Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначена первоначальная длина стороны квадрата.

1. $(x - 8)^2 = x - 2$;
2. $(x - 2)^2 = x^2 + 8$;
3. $(x - 2)^2 = x^2 - 8$;
4. $(x + 2)^2 = x^2 + 8$.

9. Если число увеличить на 1, то его квадрат увеличится на 16. Какое это число? Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначено искомое число.

1. $(x + 1)^2 + 16 = x + 1$;
2. $(x + 1)^2 = x^2 + 16$;
3. $x + 16 = (x + 1)^2$;
4. $x + 1 = x^2 + 16$.

10. Первое число больше второго на 5, а 50% первого числа больше, чем 20% второго, на 10. Найдите первое число. Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой y обозначено первое число.

1. $0,5(y + 5) - 0,2y = 10$;
2. $0,5(y - 5) - 0,2y = 1$;
3. $0,5y - 0,2(y - 5) = 10$;
4. $0,5y + 0,2(y - 5) = 10$.

11. Первое число в 3 раза больше второго, а 10% первого числа на 4 меньше, чем 70% второго. Найдите второе

число. Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой t обозначено второе число.

1. $0,1 \cdot \frac{t}{3} + 4 = 0,7t$;

3. $0,1 \cdot t - 4 = 0,7t$;

2. $0,1 \cdot 3t + 4 = 0,7t$;

4. $0,1 \cdot (t + 3) + 4 = 0,7t$.

12. Разность двух чисел равна 10. Найдите большее из чисел, если сумма 20% большего числа и 30% второго числа равна 8. Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой a обозначено большее из чисел.

1. $0,2a + 0,3(a - 10) = 8$;

3. $0,3a + 0,2(a - 10) = 8$;

2. $0,2a + 0,3(10 - a) = 8$;

4. $0,3a + 0,2(10 - a) = 8$.

13. Катер отправился по реке от одной пристани к другой и через 2 часа вернулся обратно, затратив на стоянку 48 мин. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки 2 км/ч, а расстояние между пристанями 7 км.

14. Из города в село, расстояние между которыми 40 км, выехал мотоциклист. В середине пути он был задержан на 5 мин, но, увеличив скорость на 20 км/ч, прибыл в село вовремя. С какой скоростью мотоциклист ехал вторую половину пути?

15. Старая марка сотового телефона дешевле новой на 20%. На сколько процентов новая марка телефона дороже старой?

16. Смешали 60% раствор соляной кислоты с её 20% раствором и получили 300 г 30% раствора. Сколько граммов 20% раствора было взято?

17. Аквариум объёмом 3 м³ заполняется двумя насосами одновременно. Первый насос перекачивает за 1 час на 1 м³ больше, чем второй. Найдите время, за которое первый насос в отдельности может наполнить бассейн, если ему для этого нужно на 15 мин меньше, чем второму.

18. Произведение двух чисел равно 50, а их сумма составляет 30% от произведения. Найдите эти числа.

19. Столовая закупила 50 кг свежих грибов, влажность которых составила 99%. После подсушки влажность грибов снизилась до 98%. Какой стала их масса?

20. При добавлении воды к раствору его масса увеличилась на 26% и стала равной 63 кг. Определите первоначальную массу раствора.

21. Путь от Москвы до Твери автомобиль проехал за t часов, двигаясь со скоростью $V \frac{\text{км}}{\text{час}}$. На обратном пути скорость автомобиля была увеличена на 25%. На сколько процентов уменьшилось время пути?

ПРОГРЕССИИ

Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность (a_n) , каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом d (разностью прогрессии):

$$a_{n+1} = a_n + d, n \in N.$$

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность (b_n) , каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число q (знаменатель прогрессии), причём $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$: $b_{n+1} = b_n \cdot q, n \in N$.

Основные формулы

I. Формула n -го члена прогрессии

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1), n \in N$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, n \in N$$

II. Формула суммы n первых членов прогрессии

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \\ &= \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{b_1 - b_n q}{1 - q} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}; \\ q &\neq 1. \\ \text{Если } q &= 1, \text{ то } S_n = n \cdot b_1. \end{aligned}$$

Характеристическое свойство

Последовательность (a_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый её член, кроме первого и последнего, равен полусумме двух соседних с ним членов

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n \geq 2.$$

В более общем виде:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, n > k,$$

$1 \leq k \leq n - 1$; a_{n-k}, a_{n+k} — члены прогрессии, равностоящие от члена a_n .

Последовательность (b_n) является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого её члена, кроме первого и последнего, равен произведению двух соседних с ним членов:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, n \geq 2.$$

В более общем виде:

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k},$$

$n > k$; $1 \leq k \leq n - 1$; b_{n-k}, b_{n+k} — члены прогрессии, равностоящие от члена b_n .

Признаки прогрессий

Если последовательность (a_n) задана линейной функцией натурального аргумента n : $a_n = dn + e$, то она является арифметической прогрессией с первым членом $a_1 = e + d$ и разностью d .

Если последовательность (b_1) задана показательной функцией натурального аргумента n : $b_n = e \cdot q^n$, где $e \neq 0, q > 0, q \neq 1$, то она является геометрической прогрессией с первым членом $b_1 = e \cdot q$ и знаменателем q .

Методы решения задач

1. Заметим, что в формулу n -го члена прогрессии входит четыре величины: a_n, a_1, n, d — для арифметической, b_n, b_1, n, q — для геометрической прогрессии. В формулу суммы n первых членов прогрессии также входит четыре величины: S_n, a_n, a_1, n (или S_n, a_1, d, n) — для арифметической, S_n, b_n, b_1, q (или S_n, b_1, q, n) — для геометрической прогрессии.

В простейшей задаче могут быть даны любые три из указанных величин, тогда четвертую можно найти. Например, для арифметической прогрессии:

$$a_1 = a_n + d \cdot (n - 1); d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}; n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1;$$

$$a_1 = \frac{2S_n - a_n n}{n}; n = \frac{2S_n}{a_1 + a_n}.$$

Пример 1. Разность арифметической прогрессии равна 3, а 16-ый член равен 40. Найдите первый член прогрессии.

Решение. По условию $d = 3; a_{16} = 40$. По формуле n -го члена арифметической прогрессии имеем $a_{16} = a_1 + 15d$. Тогда $a_1 = a_{16} - 15d; a_1 = 40 - 15 \cdot 3 = -5$. *Ответ:* -5 .

Пример 2. Найдите третий член арифметической прогрессии, у которой разность 2,5, а сумма первых шести членов равна $-4,5$.

Решение. По условию $d = 2,5, S_6 = -4,5$. Требуется найти a_3 . Используем формулу суммы шести первых членов

прогрессии: $S_6 = \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6; -4,5 = (2a_1 + 5 \cdot 2,5) \cdot 3; 6a_1 = -42, a_1 = -7$. Тогда $a_3 = -7 + 2 \cdot 2,5 = -2$. *Ответ:* -2 .

Пример 3. Произведение второго и четвёртого членов геометрической прогрессии равно 12, а частное от деления её третьего члена на пятый равно 3. Найдите четвёртый член прогрессии.

Решение. По условию имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_2 \cdot b_4 = 12, \\ \frac{b_3}{b_5} = 3; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} b_1 \cdot b_1 \cdot q^4 = 12, \\ \frac{b_1 \cdot q^2}{b_1 \cdot q^4} = 3; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} b_1^2 \cdot q^4 = 12, \\ \frac{1}{q^2} = 3; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} q = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ q = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ b_1 = 6\sqrt{3}, \\ b_1 = -6\sqrt{3}. \end{array} \right.$$

Если $b_1 = 6\frac{\sqrt{3}}{3}$, $q = \frac{\sqrt{3}}{3}$, то $b_4 = b_1 q^3 = 2$. Если $b_1 = -6\frac{\sqrt{3}}{3}$, $q = \frac{\sqrt{3}}{3}$, то $b_4 = -2$. Если $b_1 = 6\frac{\sqrt{3}}{3}$, $q = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, то $b_4 = -2$. Если $b_1 = -6$, $q = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, то $b_4 = 2$. *Ответ:* -2; 2.

Пример 4. Найдите сумму первых тридцати девяти членов арифметической прогрессии, если её двадцатый член равен 2.

Решение. $S_{39} = \frac{2a_1 + 38d}{2} \cdot 39$. По условию $a_{20} = 2$, т.е. $a_1 + 19d = 2$. Тогда $S_{39} = 2 \cdot 39 = 78$. *Ответ:* 78.

Пример 5. Докажите, что последовательность, сумма n первых членов которой при любом n задаётся формулой $S_n = 4^n - 1$, является геометрической прогрессией. Найдите знаменатель этой прогрессии.

Решение. Заметим, что при $n \geq 2$, $b_n = S_n - S_{n-1}$, $b_{n+1} = S_{n+1} - S_n$, $b_n = (4^n - 1) - (4^{n-1} - 1) = 4^{n-1} \cdot (4 - 1) = 3 \cdot 4^{n-1}$, $b_{n+1} = (4^{n+1} - 1) - (4^n - 1) = 4^n \cdot (4 - 1) = 3 \cdot 4^n$. Тогда $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3 \cdot 4^n}{3 \cdot 4^{n-1}} = 4$, $b_{n+1} = b_n \cdot 4$. По определению геометрической прогрессии можно утверждать, что при $n \geq 2$ данная последовательность является геометрической прогрессией со знаменателем $q = 4$. Проверим, выполняется ли равенство $b_1 = S_1$: $b_1 = 3 \cdot 4^0 = 3$, $S_1 = 4 \cdot 1 = 3$, $3 = 3$. Значит, данная последовательность является геометрической прогрессией при $n \geq 1$.

Замечание: Получив, что $b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = \frac{3}{4} 4^n$ при $n \geq 2$,

можно утверждать на основании признака, что последовательность при $n \geq 2$ является геометрической прогрессией. *Ответ:* $q = 4$.

Пример 6. Три положительных числа являются последовательными членами арифметической прогрессии, а квадраты их — последовательными членами геометрической прогрессии в том же порядке. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Решение. Пусть $a - d$, a , $a + d$ — три положительных последовательных члена данной арифметической прогрессии. Тогда $(a - d)^2$, a^2 , $(a + d)^2$ — три последовательных члена геометрической прогрессии и поэтому $a^4 = (a - d)^2 \times (a + d)^2$. Имеем: $a^2 = (a - d)(a + d)$, $a^2 = a^2 - d^2$, $d^2 = 0$, $d = 0$. Если $d = 0$, то $a - d = a$ и $a + d = a$, тогда a , a , a — три последовательных члена арифметической прогрессии a^2 , a^2 , a^2 — последовательные члены геометрической прогрессии, знаменатель прогрессии равен 1. *Ответ:* $q = 1$.

Пример 7. Сколько имеется натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые при делении на 4 дают в остатке 2?

Решение. Способ 1. Рассмотрим арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 2$, $d = 4$, $a_n = 998$. Требуется найти n . По формуле n -го члена арифметической прогрессии имеем $998 = 2 + 4(n - 1)$, $4n = 1000$, $n = 250$.

Способ 2. По условию $a_n = 4n - 2$, $4n - 2 \leq 1000$, $4n \leq 1002$, $n \leq 250\frac{1}{2}$. Так как $n \in N$, то $n \leq 250$. *Ответ:* 250.

Пример 8. Может ли число 5,32 быть членом арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 1$ и $d = 0,008$?

Решение. Если число 5,32 будет членом данной арифметической прогрессии, то существует такое натуральное число n , что $5,32 = a_1 + d(n - 1)$, $5,32 = 1 + 0,08(n - 1)$, $4,4 = 0,08n$, $n = 55$. Это значение n является натуральным числом. *Ответ:* может.

Задачи для самостоятельного решения

22. Какое из чисел является членом арифметической прогрессии 12; 8; 4; 0; -4; ... ?

1. 30; 2. -21; 3. -35; 4. -16.

23. Последовательность задана формулой $b_n = \frac{(-1)^n}{3n}$.

Какое из чисел является членом этой последовательности?

1. $\frac{1}{12}$; 2. $-\frac{1}{12}$; 3. $-\frac{1}{6}$; 4. $-\frac{1}{18}$.

24. Из заданных геометрических прогрессий выберите ту, среди членов которой есть число 500.

1. $b_n = -2 \cdot 5^{n+1}$; 3. $b_n = -5 \cdot 2^n$;
2. $b_n = 20 \cdot 5^n$; 4. $b_n = -5^{2n}$.

25. Из заданных геометрических прогрессий выберите ту, среди членов которой есть число 40.

1. $b_n = 2 \cdot 5^n$; 3. $b_n = 5^n$;
2. $b_n = 20 \cdot 4^n$; 4. $b_n = 5 \cdot 2^n$.

26. Из заданных арифметических прогрессий выберите ту, среди членов которой нет числа -10 .

1. $a_n = 3n + 10$; 3. $a_n = 20 - 5n$;
2. $a_n = -2n + 10$; 4. $a_n = 2n - 26$.

27. Какая из последовательностей является геометрической прогрессией?

1. $a_n = 3n$; 2. $a_n = 5 \cdot 2^n$; 3. $a_n = n^3$; 4. $a_n = \frac{4}{n}$.

28. Какая из последовательностей является арифметической прогрессией?

1. $a_n = (-2)^n$; 3. $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$;
2. $a_n = 7 - 2n$; 4. $a_n = n^4$.

29. Найдите разность арифметической прогрессии, первый член которой равен 12, а одиннадцатый равен -18 .

30. Найдите разность арифметической прогрессии, первый член которой равен -10 , а двадцатый равен 28.

31. Найдите десятый член арифметической прогрессии, первый член которой равен 2, а разность равна 3.

32. Найдите тридцатый член арифметической прогрессии, первый член которой равен 13, а разность прогрессии равна -5 .

33. Найдите первый член арифметической прогрессии, разность которой равна 5, а седьмой член равен 33.

34. Найдите первый член арифметической прогрессии, разность которой равна -2 , а двенадцатый член равен 13.

35. Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии 1; 4; 7; 10;

36. Найдите сумму первых девятнадцати членов арифметической прогрессии $-10; -7; -4; -1; 2; \dots$.

37. Найдите двадцатый член арифметической прогрессии, если её девятнадцатый член равен -17 , а восемнадцатый член равен -10 .

38. Сумма двадцати первых членов арифметической прогрессии равна 680. Найдите сумму первого и двадцатого членов этой прогрессии.

39. Найдите первый член a_1 арифметической прогрессии, если известно, что $a_2d = 30$, четвёртый член равен 16, разность d арифметической прогрессии больше четырёх.

40. Найдите число членов арифметической прогрессии (a_n) , если известно, что $d = -2$, $a_1 = 5$, $S_n = -91$.

41. Известны второй и пятый члены арифметической прогрессии: $a_2 = 5$, $a_5 = 11$. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

42. Сумма второго и шестого членов арифметической прогрессии равна 6, а их произведение равно -27 . Найдите сумму первых 20 членов этой прогрессии при условии, что разность прогрессии положительна.

43. Найдите число n членов арифметической прогрессии (a_n) , если известно, что $a_3 = 40$, $a_5 = 32$, $S_n = 300$. В ответе запишите меньшее значение n .

44. Произведение второго и четвёртого членов геометрической прогрессии равно 16. Найдите третий член прогрессии.

45. Найдите тринадцатый член арифметической прогрессии, если сумма её первых восьми членов равна -19 , а сумма следующих восьми членов равна 29.

46. Во сколько раз двадцатый член возрастающей арифметической прогрессии больше первого, если сумма первых двадцати членов этой прогрессии больше суммы первых десяти членов прогрессии в четыре раза?

47. Известно, что при любом натуральном значении n сумма S_n n первых членов некоторой арифметической прогрессии выражается формулой $S_n = 5n^2 - 2n$. Найдите третий член этой прогрессии.

48. Сумма второго и четвёртого членов геометрической прогрессии равна 2, пятый член этой прогрессии больше

первого на 3. Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии, если знаменатель прогрессии меньше нуля.

49. Найдите шестой член геометрической прогрессии, если знаменатель прогрессии равен 2, а сумма первых семи членов равна 254.

50. Три положительных числа образуют арифметическую прогрессию. Третье число больше первого на 14. Если к третьему числу прибавить первое, а остальные два оставить без изменения, то получится геометрическая прогрессия. Найдите произведение этих чисел.

51. Коэффициенты b , a , c квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в указанном порядке являются последовательными членами арифметической прогрессии с разностью 4. Корни этого уравнения являются последовательными членами геометрической прогрессии со знаменателем 2. Найдите числа a , b , c , если известно, что корни уравнения отрицательные. В ответе запишите значение суммы $a + b + c$.

52. Найдите сумму чётных натуральных чисел от 20 до 96 включительно.

53. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных четырём и не превосходящих 200.

54. Между числами 4 и 28 поместите семь чисел так, чтобы получилась арифметическая прогрессия. В ответе укажите разность прогрессии.

55. За сколько часов велосипедист проедет 100 км, если в первый час он проезжает 16 км, а в каждый следующий час на 1 км меньше, чем в предыдущий?

56. В арифметической прогрессии (a_n) первый член равен -50 ; a_{12} — её первый положительный член. Какие целые значения может принимать разность прогрессии?

57. Арифметическая прогрессия содержит 21 член, причём отношение её двадцатого члена к девятому равно 3. Найдите последний член этой прогрессии, если известно, что сумма членов этой прогрессии с чётными номерами на 15 больше суммы членов с нечётными номерами.

58. Найдите сумму всех двузначных чисел, не делящихся на 4.

59. Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии 12,5; 11,9;

60. Сколько отрицательных членов в арифметической прогрессии $-6,8$; $-6,6$;

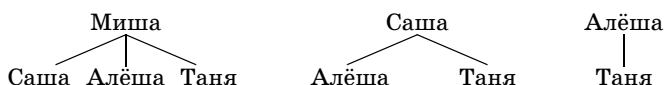
61. Найдите сумму всех положительных членов прогрессии 13,5; 12;

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторикой называется раздел математики, в котором решаются задачи на составление и подсчёт числа различных комбинаций из конечного множества элементов. Простейшие комбинаторные задачи можно решать методом перебора возможных вариантов.

Пример 1. Четыре ученика: Миша, Саша, Алёша и Таня углублённо изучают математику. На математическую олимпиаду требуется послать двух учеников. Сколькими способами это можно сделать?

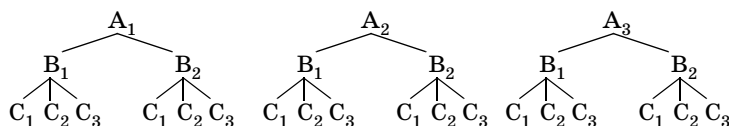
Решение. Составим схему возможных вариантов



Получаем 6 способов выделения двух человек из четырёх. *Ответ:* 6.

Пример 2. В меню столовой три первых блюда A_1, A_2, A_3 , два вторых B_1, B_2 и три сока C_1, C_2, C_3 . Сколько вариантов комбинированного обеда можно составить из этих блюд?

Решение. Составляем схему возможных вариантов.



Получаем 18 вариантов комплексного обеда. *Ответ:* 18.

Комбинаторные задачи можно решать и не выписывая все возможные комбинации элементов (не составляя схему вариантов).

Пример 3. В посёлке имеется 5 светофоров. Каждый может находиться в одном из трёх состояний (гореть красным, зелёным или жёлтым светом). Сколькими способами можно зажечь все светофоры?

Решение. Первый светофор может быть включён тремя разными способами. Для каждого способа включения первого светофора можно получить 3 способа включения вто-

рого светофора, т.е. будем иметь $3 \cdot 3$ способов включения двух светофоров. Из всякого способа включения двух светофоров снова можно получить три способа включения третьего светофора, изменяя его состояние, всего получаем $3 \cdot 3 \cdot 3$ способов включения трёх светофоров. При включении каждого нового светофора число способов увеличивается в три раза. Значит, пять светофоров могут быть включены $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$ способами. *Ответ:* 243 способа.

Перестановки

Перестановкой называется конечное множество, в котором установлен порядок его элементов. Число перестановок из n элементов обозначают символом P_n .

Различные перестановки из n элементов отличаются друг от друга лишь порядком элементов. Если $n = 1$ (т.е. имеем один элемент a), то очевидно, что $P_1 = 1$. Число перестановок из n элементов находится по формуле $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$. Произведение первых n натуральных чисел обозначают $n!$ (читают « n факториал»). Например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Пример 4. Сколькими способами семья из четырёх человек может занять четыре места за обеденным столом?

Решение. $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. *Ответ:* 24.

Размещения

Размещением из n элементов по k ($k \leq n$) называется любое упорядоченное множество, состоящее из k элементов, взятых из данных n элементов. Два размещения могут отличаться самими элементами или порядком расположения элементов. Символ A_n^k обозначает число всевозможных размещений, которые можно составить из n элементов по k . Число размещений из n по k равно произведению k последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых равно n : $A_n^k = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - (k - 1))$. Например, $A_6^3 = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 120$; $A_7^2 = 7 \cdot 6 = 42$; $A_n^1 = n$; $A_n^n = n(n - 1)(n - 2) \dots 2 \cdot 1 = n!$ Значит, $A_n^n = P_n$. Формула A_n^k может быть записана и так: $A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$, т.е. $A_n^k = \frac{P_n}{P_{n - k}}$.

Пример 5. Учащиеся одного класса изучают 12 различных предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нём было 5 различных предметов?

Решение. Различные варианты расписания могут отличаться либо самими предметами, либо их порядком. Количество вариантов равно числу размещений из 12 элементов по 5: $A_{12}^5 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95\,040$. *Ответ:* 95 040.

Сочетания

Сочетанием из n элементов по k называется любое множество, составленное из k элементов, выбранных из данных n элементов. В отличие от размещений, сочетания различаются только элементами и не имеет значения, в каком порядке заданы элементы. Например, $\{a, b, c\}$ и $\{b, c, a\}$ — одно и то же сочетание. Число сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k . Число сочетаний, составленных из n элементов по k , вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}, \text{ т.е. } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример 6. В вазе стоят 9 красных и 6 белых роз.

а) Сколькими способами можно составить букет из 4 роз? б) Сколькими способами можно составить букет из 1 красной и 2 белых роз?

Решение. а) Так как порядок выбора роз не имеет значения, то выбрать 4 розы из 15 можно C_{15}^4 способами;
$$C_{15}^4 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1365.$$

б) Одну красную розу можно выбрать 9 способами, а 2 белые из имеющихся 6 можно выбрать $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ способами. Поэтому букет из 1 красной и 2 белых роз можно составить $9 \cdot 15 = 135$ способами. *Ответ:* а) 1365; б) 135.

Задачи для самостоятельного решения

62. Для проезда из города M в город N можно воспользоваться 7 автобусными маршрутами или 2 железнодорожными. Сколькими способами можно проехать из города M в город N ?

63. Из города А в город С можно проехать лишь с пересадкой в городе В. Из А в В существуют 4 автобусных маршрута и 3 железнодорожных. Из В в С можно проехать 2 поездами или 5 автобусами. Сколько существует вариантов проезда из города А в город С?

64. Из 6 первокурсников, 5 второкурсников и 8 третьекурсников надо выбрать трёх студентов на конференцию. Сколькими способами это можно сделать, если студенты должны быть разных курсов?

65. Сколькими способами можно расставить на полке 5 различных книг?

66. На полке стоит 6 разных книг по математике и 3 разные книги по физике. Сколькими способами можно расставить эти книги, если книги по физике должны стоять рядом?

67. Сколькими способами можно расставить на полке 8 различных книг так, чтобы две определённые книги стояли рядом?

68. Сколькими способами можно расставить на полке 7 различных книг, чтобы 2 определённые книги не стояли рядом?

69. Сколькими способами можно рассадить 3 учащихся на 15 местах?

70. Требуется распределить 3 путёвки на 3 различные турбазы среди 8 работников. Каким количеством способов можно это сделать?

71. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 8, 7, 6, 2, 1, если цифры в числе не повторяются?

72. Ученики 6 класса изучают 11 различных учебных предметов. Сколькими способами можно составить расписание из 5 различных предметов на понедельник, если математика должна быть первым уроком?

73. Из скольких различных элементов можно составить 30 размещений по два элемента в каждом?

74. Из 10 рабочих надо выделить 4 для выполнения некоторой работы. Сколькими способами это можно сделать?

75. На плоскости даны 7 точек, никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?

76. Сколькими способами можно составить букет из 7 цветков, если имеем 5 ромашек и 6 васильков?

77. Сколькими способами можно разделить группу из 10 человек на 2 группы так, чтобы в одной было 7 человек, а в другой — 3?

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей — это наука о вычислении вероятностей случайных событий, позволяющая делать прогнозы в области случайных явлений. В теории вероятностей всякий результат, полученный в процессе испытания, проведения опыта, называется *событием*.

Примеры

1. Играется шахматная партия — это испытание. Выигрыш, ничья, проигрыш — его возможные исходы, т.е. события.

2. Студент сдает экзамен — испытание. Получение оценки «2», «3», «4», «5» — события.

Достоверным называется событие, которое обязательно произойдет, если будет выполнена определенная совокупность условий.

Невозможным называется событие, которое заведомо не произойдет, если будет иметь место заданная совокупность условий.

Случайным называется событие, которое при выполнении данных условий может произойти или не произойти.

Классическое определение вероятности. События называются равновероятными, если есть основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие, т.е. все события имеют равные «шансы».

Определение. Вероятностью события A называется отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n равновероятных элементарных исходов испытания: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Пример 1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру. Найдите вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Событие A — набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр. Общее число элементарных исходов равно 10. Число благоприятствующих событию A исходов равно 1; $P(A) = \frac{1}{10}$. *Ответ:* $\frac{1}{10}$.

Пример 2. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение. Событие B — набраны три нужные цифры. Всего можно набрать столько троек цифр, сколько может

быть составлено размещений из 10 цифр по три, т.е. $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Общее число исходов 720, благоприятствует событию B лишь один исход; $P(B) = \frac{1}{720}$. Ответ: $\frac{1}{720}$.

Свойства вероятности

1. Вероятность достоверного события равна 1. Действительно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход благоприятствует событию, т.е. $m = n$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. Вероятность невозможного события равна 0. Если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов не благоприятствует событию A , т.е. $m = 0$; $P(A) = \frac{0}{n} = 0$.

3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между 0 и 1. Случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания, т.е. $0 < m < n$, следовательно, $0 < \frac{m}{n} < 1$, т.е. $0 < P(A) < 1$. Итак, вероятность любого события удовлетворяет неравенству $0 \leq P(A) \leq 1$.

Пример 3. На 3000 произведённых заводом телевизоров в среднем приходится 3 бракованных. Какова вероятность купить исправный телевизор?

Решение. По условию из 3000 телевизоров 2997 телевизоров оказываются исправными. Вероятность купить исправный телевизор равна $\frac{2997}{3000} = 0,999$. Ответ: 0,999.

Пример 4. Из 40 экзаменационных вопросов студент успел подготовить 32. Какова вероятность того, что на экзамене ему достанется вопрос, который он не подготовил?

Решение. Из 40 вопросов студент не подготовил 8. Вероятность получить на экзамене неподготовленный вопрос равна $\frac{8}{40} = 0,2$. Ответ: 0,2.

Правило сложения вероятностей несовместимых событий. Правило умножения вероятностей независимых событий

Суммой $A + B$ двух событий называют событие, состоящее в появлении события A или события B , или обоих этих событий. Например, если из орудия произведены два

выстрела и A — попадание при первом выстреле, B — попадание при втором выстреле, то $A + B$ — попадание при первом выстреле или при втором, или в обоих выстрелах. Если событие A — последняя цифра случайно набранного телефонного номера 5, а событие B — последняя цифра набранного номера 7, то событие $A + B$ — последняя цифра набранного номера 5 или 7. Суммой нескольких событий называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Два события называются несовместимыми, если наступление одного из них исключает наступление другого в одном и том же опыте, т.е. эти события не могут произойти вместе в одном опыте.

Например, событие A — последняя цифра случайно набранного телефонного номера равна 5 и событие B — последняя цифра набранного номера равна 7, являются несовместимыми. Если же событие A — попадание в цель при первом выстреле, а событие B — попадание в цель при втором выстреле, то события A и B могут произойти в одном и том же испытании, т.е. они являются совместимыми.

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Пример 5. В урне 20 шаров: 10 красных, 5 синих и 5 белых. Из урны наугад вынимается один шар. Найдите вероятность появления цветного шара (т.е. красного или синего). Пусть событие A — появление красного шара, B — появление синего шара: $P(A) = \frac{10}{20} = 0,5$, $P(B) = \frac{5}{20} = 0,25$.

Событие $A + B$ — появление красного или синего (т.е. цветного) шара. События A и B — несовместимы; $P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,5 + 0,25 = 0,75$. *Ответ:* 0,75.

Произведением двух событий A и B называют событие AB , состоящее в совместном появлении этих событий. Например, если в ящике содержатся детали, изготовленные заводами №1 и №2, A — появление стандартной детали, B — появление детали, изготовленной заводом №1, то AB — появление стандартной детали завода №1.

События A и B называются *независимыми*, если наступление одного из событий не зависит от наступления другого.

Теорема 2. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Пример 6. Найти вероятность одновременного появления двух решек при одном бросании двух монет.

Решение. Пусть событие A — появление решки на первой монете, $P(A) = \frac{1}{2}$. Событие B — появление решки на второй монете, $P(B) = \frac{1}{2}$. Так как A и B — независимые события, то $P(AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. *Ответ:* 0,25.

Геометрическое определение вероятности

Классическое определение вероятности случайного события $\left(P(A) = \frac{m}{n}\right)$ применимо лишь тогда, когда число исходов испытания конечно. При изучении же многих явлений реального мира оказывается, что число исходов бесконечно.

Например, если испытание состоит в том, что сигнальщик в течение часа должен принимать мгновенный световой сигнал, то его исходами можно считать появление или не появление сигнала в любой момент времени этого часа. Число исходов оказывается бесконечным.

Другой пример. Вне шара находится точечный источник света. Испытание состоит в изучении освещённости различных точек, взятых на поверхности шара. Исходы испытания: точка освещена или точка не освещена. Точек на поверхности шара, а значит и число исходов испытания, бесконечно.

В приведённых примерах число возможных исходов испытания и число исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию, бесконечно.

В этом случае применяется геометрический способ вычисления вероятности случайного события. Пусть в результате испытания наудачу выбирается точка E в некоторой области S , которая геометрически изображается в виде совокупности точек отрезка прямой, плоской фигуры или пространственного тела. Требуется найти вероятность того, что эта точка E окажется в области s , являющейся частью области S .

Делается допущение, что исходы испытания распределены равномерно. Это значит, что если разделить область S на конечное число равновеликих частей s_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$),

то события s_k , означающие попадание наудачу выбранной точки из области S в любую её часть s_k , равновозможны. Тогда можно считать, что вероятность попадания наудачу выбранной точки из области S в какую-либо часть s этой области пропорциональна мере этой части и не зависит от её расположения и формы (т.е. считаем не количество исходов испытаний, а занимаемую ими длину отрезка, площадь или объём). Значит, $P(E) = \frac{m(s)}{m(S)}$, где $P(E)$ — вероятность того, что наудачу выбранная точка из области S окажется в области s , $m(s)$ и $m(S)$ — меры соответствующих областей, выраженных в единицах длины, площади или объёма.

Пример 7. Товарищ должен придти на встречу с другом в промежутке времени от 15 ч до 15 ч 30 мин. Найдите вероятность того, что встреча произойдёт с 15 ч 10 мин до 15 ч 20 мин.

Решение. Пусть событие A — встреча произошла в промежуток времени от 15 ч 10 мин до 15 ч 20 мин, т.е. в течение 10 мин после 15 ч 10 мин.

Изобразим все исходы испытания в виде отрезка OM на оси Ox . Событие A произойдёт, если точка (время встречи) окажется на отрезке KN . Следовательно, $P(A) = \frac{KN}{OM} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. *Ответ:* $\frac{1}{3}$.

Пример 8. В круг радиуса R вписан квадрат. Найдите вероятность того, что наудачу взятая в этом круге точка окажется внутри квадрата. Ответ округлите до сотых.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что наудачу взятая в круге точка оказывается внутри квадрата. Тогда

$$\frac{S_{\text{квадрата}}}{S_{\text{круга}}} = \frac{(R\sqrt{2})^2}{\pi R^2} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} \approx 0,64. \text{ Ответ: } \approx 0,64.$$

Замечание. В отличие от задач, решаемых на основе классического определения вероятности, вероятность, вычисленная на основе геометрического определения, может выражаться иррациональным числом.

Задачи для самостоятельного решения

78. Из семи букв разрезной азбуки составлено слово «букварь». Маленький мальчик перемешал буквы, а потом наугад их собрал. Какова вероятность того, что он опять составит слово «букварь»?

79. Какова вероятность того, что наугад выбранное целое число от 6 до 45 (включительно) является делителем числа 60?

80. На карточках написаны целые числа от 2 до 13 включительно. Наудачу выбираются две карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел, написанных на карточках, равна 9?

81. Дано шесть карточек с буквами А, Б, К, Л, О, Ш. Одну за другой выбирают пять карточек. Найдите вероятность того, что получится слово «ШКОЛА».

82. На полке стоят учебники по географии, истории, алгебре, физике. Наугад с полки берутся две книги. Найдите вероятность того, что книги взяты в таком порядке: алгебра, физика.

83. В праздничной лотерее участвует 500 билетов, среди которых 350 выигрышных. Какова вероятность того, что купленный билет окажется не выигрышным?

84. Бросают два игральных кубика. Найдите вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух кубиках, равна 7.

85. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на кубиках, меньше 11?

86. В коробке находятся 5 голубых, 6 жёлтых и 3 зелёных карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что все 3 карандаша окажутся зелёного цвета?

87. Два станка работают независимо друг от друга. Вероятность бесперебойной работы первого станка в течение смены равна 0,7, а второго — 0,8. Найдите вероятность бесперебойной работы:

а) обоих станков в течение рабочей смены;

б) хотя бы одного из двух станков в течение рабочей смены.

88. Вероятность поражения цели стрелком при каждом выстреле равна 0,8. Производится 4 независимых выстрела. Найдите вероятность того, что при первых двух выстрелах будет попадание в цель, а при двух других — промах.

89. В круг, радиус которого равен R , вписан правильный треугольник. Найдите вероятность того, что наугад взятая точка круга окажется внутри треугольника.

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

Математическая статистика — раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей.

Предметом математической статистики является изучение случайных событий по результатам наблюдений. Данные (как правило, числовые), которые получают в результате экспериментов (наблюдений), называются статистическими.

Статистических данных должно быть достаточно много. Поэтому, прежде всего, полученные данные необходимо упорядочить: расположить в порядке возрастания (убывания), представить в виде таблицы, диаграммы, графика и т.д.

Затем ставится задача оценить, хотя бы приближённо, интересующие нас характеристики наблюдаемой случайной величины.

В простейших случаях, когда данные исследования представлены в виде ряда чисел, такими характеристиками могут быть среднее арифметическое, мода, медиана, размах числового ряда.

Пример 1. Для анализа результатов ГИА (Государственной Итоговой Аттестации) по алгебре выпускников 9 класса сельской школы выписали количество заданий, верно выполненных каждым из 15 учеников этого класса. Расположив полученные данные в порядке возрастания, получили следующий ряд чисел: 6; 7; 10; 13; 13; 13; 13; 15; 15; 16; 16; 16; 17; 18; 20; 21.

Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых. Для данного ряда чисел имеем:

$$\frac{6 + 7 + 10 + 13 + 13 + 13 + 13 + 15 + 15 + 16 + 16 + 16 + 17 + 18 + 20 + 21}{15} = \\ = \frac{213}{15} = 14,2.$$

Итак, в среднем учащиеся класса смогли верно выполнить приблизительно 14 заданий экзаменационной работы. Однако выпускники показали очень разный уровень математической подготовки. Чтобы количественно охарактеризовать разброс данных в числовом ряду, вычисляются размах ряда.

Размахом ряда чисел называется разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

В нашем примере учащиеся класса решили от 6 до 21 экзаменационной задачи, т.е. размах ряда равен $21 - 6 = 15$.

Следующий вопрос: какое количество решённых задач является типичным для выпускников этого класса, т.е. какое число чаще других встречается в нашем ряду чисел? Легко увидеть, что таким является число 13. Число 13 называется модой данного ряда чисел.

Модой ряда чисел называется число, наиболее часто встречающееся в данном ряду.

Заметим, что ряд чисел может иметь более одной моды или не иметь моды совсем. Например, в ряду чисел 23; 23; 24; 27; 27; 27; 41; 45; 45; 45 две моды — это числа 27 и 45 (каждое из них входит в ряд три раза), а ряд чисел 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 не имеет моды.

Моду ряда полученных в ходе эксперимента данных находят тогда, когда хотят выявить некоторый типичный показатель. Мода, если существует, то обязательно совпадает с двумя или более числами ряда.

Пример 2. В таблице показано число посетителей музея в разные дни недели:

День недели	Понедельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница	Суббота	Воскресенье
Число посетителей	230	535	350	290	512	711	820

Какие дни недели являются наиболее посещаемыми?

Решение. Упорядочим данный ряд чисел:

День недели	Понедельник	Четверг	Среда	Пятница	Вторник	Суббота	Воскресенье
Число посетителей	230	290	350	512	535	711	820

Для ответа на вопрос выделим число, расположенное в середине данного ряда чисел — это 512, оно показывает число посетителей музея в пятницу. Дни недели, расположенные в таблице правее пятницы, дают ответ на поставленный вопрос. Итак, наиболее посещаемые дни — вторник, суббота, воскресенье. Число 512 называется медианой данного ряда чисел (от латинского слова *mediana* — «среднее»).

Медианой упорядоченного ряда чисел с нечётным числом членов называется число, записанное посередине.

Медианой упорядоченного ряда чисел с чётным числом членов называется среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине.

Медианой произвольного ряда чисел называется медиана соответствующего упорядоченного ряда.

Пример 3. При каких значениях x медиана ряда чисел 7; 5; 4; 8; x равна 7?

Решение. Упорядочим данный ряд чисел при различных значениях x :

x ; 4; 5; 7; 8, если $x \leq 4$; 4; x ; 5; 7; 8, если $4 < x \leq 5$; 4; 5; x ; 7; 8, если $5 < x \leq 7$; 4; 5; 7; x ; 8, если $7 < x \leq 8$; 4; 5; 7; 8; x , если $x > 8$. Для каждого ряда найдём медиану: 5; 5; x ; 7; 7. Значит, медиана равна 7, если $x \geq 7$. *Ответ:* $x \geq 7$.

Задачи для самостоятельного решения

90. В течение четверти учеником были получены следующие отметки по геометрии: две «двойки», пять «троек», восемь «четвёрок» и одна «пятерка». Найдите сумму моды и среднего арифметического его оценок?

91. На дорогу от школы до дома в течение недели Даша тратила разное время (в мин), представленное в виде ряда данных: 29, 40, 27, 30, 38, 34. На сколько среднее арифметическое этого набора отличается от его медианы?

92. В городе четыре школы. В таблице приведён средний балл, полученный выпускниками девятых классов каждой из школ на экзамене по математике

Номер школы	1	2	3	4
Количество выпускников	50	80	60	50
Средний балл	18	20	23	16

Найдите средний балл экзамена по математике в городе.

93. В городе четыре школы. В таблице приведён средний балл, полученный выпускниками девятых классов каждой из школ на экзамене по математике

Номер школы	1	2	3	4
Количество выпускников	30	60	50	60
Средний балл	22	16	19	20

Найдите средний балл экзамена по математике в городе.

94. При каких значениях a медиана ряда чисел 12, 5, 2, 7, 9, 6, a равна 6?

95. При каких значениях a среднее арифметическое ряда чисел 12, 5, 2, 7, 9, 6, a равно 7?

96. При каких значениях a размах ряда чисел 12, 5, 2, 7, 9, 6, a равен 11?

97. При каких значениях a медиана ряда чисел 12, 5, 2, 7, 9, 6, a равна 7?

Ответы

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Ответ	2	3	3	2	2	3	2	3	2	3	2	1	12	80

№ задания	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Ответ	22 5	225	45мин	10; 5	25	50	20	4	1	2	4

№ задания	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
Ответ	1	2	2	-3	2	29	-132	3	35	145

№ задания	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Ответ	323	-24	68	1	13	120	450	10	-4; 4

№ задания	45	46	47	48	49	50	51	52	53
Ответ	4	39	23	-2,1	64	2058	-24	2262	5100

№ задания	54	55	56	57	58	59	60	61
Ответ	3	8	5	-35	3717	-0,1	34	67,5

№ задания	62	63	64	65	66	67	68	69
Ответ	9	49	240	120	30240	10080	3600	2730

№ задания	70	71	72	73	74	75	76	77
Ответ	336	60	5040	6	210	21	330	120

№ задания	78	79	80	81	82	83	84
Ответ	1/5040	0,15	1/22	1/720	1/12	0,3	1/6

№ задания	85	86	87	88
Ответ	11/12	1/364	а) 0,56; б) 0,94	0,0256

№ задания	89	90	91	92	93
Ответ	$3\sqrt{3}/4\pi$	7,5	1	19,5	18,85

№ задания	94	95	96	97
Ответ	$(-\infty; 6]$	8	1; 13	$[7; +\infty)$

ГИА

Г.В. Сычёва, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев

МАТЕМАТИКА

**ТЕМЫ «Комбинаторика и основы теории вероятностей»,
«Текстовые задачи»**

Издательство «**Астрель**» предлагает новую серию учебных пособий для подготовки к государственной итоговой аттестации «**Азбука ГИА**».

Содержание и структура пособий полностью соответствуют официальным документам ГИА, разработанным **Федеральным институтом педагогических измерений** (ФИПИ).

Каждая книга серии посвящена одной или нескольким крупным предметным темам, которые выносятся на экзамен. Рассматриваются все задания на эти темы частей 1 и 2 — базового, повышенного и высокого уровней сложности. Приводятся тесты на проверку различных умений и навыков.

ВНИМАНИЕ !

Издательство «Астрель», подготовившее эти книги, входит в официальный перечень издательств, которым Министерство образования и науки Российской Федерации дало право выпускать учебные пособия для общеобразовательных школ, имеющих государственную аккредитацию (Приказ № 729 от 14.12.2009 г.).

ISBN 978-5-271-39630-4



9 785271 396304

www.elkniga.ru