Г.В. Сычёва, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев

ГИА

МАТЕМАТИКА

ТЕМА
Числа

ТЕМА
Преобразование выражений

ТЕМА
Буквенные выражения

9 класс

Тестовые задания частей 1 и 2

ВПЕРВЫЕ!

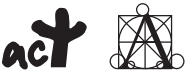
АВС — Азбука ГИА

Г.В. Сычёва, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев

МАТЕМАТИКА

ЧИСЛА И БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ



АСТ • Астрель
Москва

УДК 373:51
ББК 22.1я721
М34

Математика : Числа и буквенные выражения. Преобразование выражений / Г.В. Сычева, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев. — М.: АСТ: Астрель, 2012. — 31, [1] с. (АВС — Азбука ГИА).

ISBN 978-5-17-075443-4 (ООО «Издательство АСТ»)

ISBN 978-5-271-37152-3 (ООО «Издательство Астрель»)

Настоящее пособие предназначено для подготовки девятиклассников к успешной сдаче ГИА. Приведен необходимый теоретический материал и задания для самостоятельного решения. Все задачи для самостоятельного решения снабжены ответами.

Пособие предназначено для учащихся общеобразовательных школ, а также учителей.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

Тесты

Сычёва Галина Владимировна, Гусева Наталья Борисовна
Гусев Владимир Алексеевич

МАТЕМАТИКА

Числа и буквенные выражения

Преобразование выражений

Редакция «*Образовательные проекты*»

Отв. редактор *Г.Н. Хромова*. Худ. редактор *Т.Н. Войткевич*
Тех. редактор *А.Л. Шелудченко*. Корректор *И.Н. Мокина*
Дизайн обложки *Н.А. Шармай*
Оригинал-макет подготовлен ООО «БЕТА-Фрейм»

Подписано в печать 26.09.2011. Формат 84×108 $^{1}/_{32}$.
Усл. печ. л. 1,68. Тираж 6000 экз. Заказ №

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — литература учебная

Сертификат соответствия № РОСС RU.АЕ51.Н15301 от 04.05.2011

ООО **«Издательство Астрель»** 129085, Москва, пр-д Ольминского, д. 3а
ООО **«Издательство АСТ»** 141100, РФ, Московская обл.,
г. Щелково, ул. Заречная, д. 96

Наши электронные адреса: www.ast.ru. E-mail: astpub@aha.ru

ISBN 978-5-17-075443-4 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 978-5-271-37152-3 (ООО «Издательство Астрель»)

© Сычева Г.В., Гусева Н.Б., Гусев В.А.
© ООО «Издательство Астрель»

Содержание

Предисловие 4

ЧИСЛА 5
Множество действительных чисел 5
Задания для самостоятельного решения 7
Сравнение действительных чисел 8
Задания для самостоятельного решения 9
Признаки делимости натуральных чисел 10
Задания для самостоятельного решения 11
Степень с целым показателем 11
Задания для самостоятельного решения 12
Прямая и обратная пропорциональность величин 13
Задания для самостоятельного решения 14
Приближённые вычисления 15
Задания для самостоятельного решения 16

БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ 17
Числовые и буквенные выражения 17
Задания для самостоятельного решения 17
Преобразование выражений 18
Задания для самостоятельного решения 22
Преобразование дробных выражений 23
Задания для самостоятельного решения 25
Преобразование иррациональных выражений . . . 27
Задания для самостоятельного решения 30

ОТВЕТЫ 32

Предисловие

Данное пособие поможет подготовиться к сдаче ГИА по трём темам: числа, буквенные выражения, преобразование алгебраических выражений, которые вместе составляют большую часть всех заданий и входят как в первую, так и во вторую часть итоговой аттестационной работы за 9 класс. Задания относятся к базовому и высокому уровней сложности.

Этим темам соответствуют задания 1, 3, 4, 5, 9 и 17 Части 1 и задания на преобразование выражений 19 и 21 Части 2. Проверяются умения выбрать правильный ответ из 4 предложенных, решать задания с записью ответа, в которых ход решения не проверяется, и правильно проводить все вычисления в задачах Части 2.

Каждая тема разделена на небольшие разделы, в которых даётся краткое изложение теоретического материала, примеры с решениями типовых задач. В конце этих разделов приведены задания для самостоятельного решения различного уровня сложности. В конце книги даны ответы ко всем примерам для самостоятельного решения.

ЧИСЛА

Множество действительных чисел

Отметим некоторые числовые множества и их обозначения.

N — множество натуральных чисел, $N = \{1, 2, 3, ...\}$.

Z — множество целых чисел, $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

Q — множество рациональных чисел;

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in Z, n \in N \right\}$.

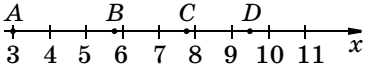
При этом $N \subset Z \subset Q$.

Всякую обыкновенную дробь можно записать в виде бесконечной, но обязательно периодической десятичной дроби, и наоборот. Но кроме бесконечных периодических десятичных дробей существуют дроби бесконечные непериодические. Любая бесконечная непериодическая десятичная дробь называется числом *иррациональным*. Например, числа 5,2020020002..., $\pi = 3{,}14152...$ — иррациональные. Некоторые выражения, записанные с использованием знака корня (например, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, ...), являются числами иррациональными. Но $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$ и т.д. — числа рациональные.

Объединение множества чисел рациональных (Q) и множества чисел иррациональных (J) называется множеством действительных чисел R, $R = Q \cup J$. Существует взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел R и множеством точек координатной прямой.

Как найти (хотя бы приближённо) точку координатной прямой, соответствующую данному иррациональному числу, например, $\sqrt{5}$? Для решения этой задачи полезно найти два рациональных числа, между которыми находится данное иррациональное число.

Пример 1. Одна из точек, отмеченных на координатной оси, соответствует числу $\sqrt{90}$. Какая это точка?

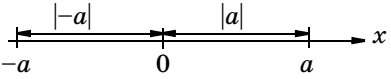


Решение. Определим, между квадратами каких чисел находится число 90, это числа 81 и 100; $81 < 90 < 100$. Значит, $\sqrt{81} < \sqrt{90} < \sqrt{100}$, т.е. $9 < \sqrt{90} < 10$. Числу $\sqrt{90}$ соответствует точка D. *Ответ: D.*

Модуль числа

Модулем положительного числа называется само это число. Модуль нуля равен нулю. Модулем отрицательного числа называется положительное число, противоположное данному числу. Коротко это можно записать так:

$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$ (знак «−» заменяет слово «противоположное»).



Модуль числа всегда имеет неотрицательное значение.

Геометрический смысл модуля числа:

$|a|$ — это есть расстояние на координатной прямой от точки с координатой a до начала координат. Очевидно, что $|a| = |-a|$.

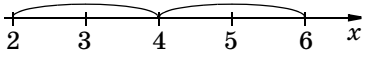
$|a - b|$ — это расстояние на координатной прямой между точками, соответствующими числам a и b.

$|a - b| = |b - a|$. При этом разность, стоящая под знаком модуля, может быть как положительной, так и отрицательной.

Пример 2. Найдите значение выражения $-5 \cdot |x| - x$, если $x = -3$.

Решение. $|x| = |-3| = 3$; $-5 \cdot |x| - x = -5 \cdot 3 - (-3) = -15 + 3 = -12$. *Ответ:* −12.

Пример 3. Найдите произведение чисел a, для которых $|a - 4| = 2$.



Решение. Равенство $|a - 4| = 2$ означает, что расстояние от точки с координатой a до точки с координатой 4 равно 2. Таких точек на координатной оси две: $a = 2$ и $a = 6$; $2 \cdot 6 = 12$. *Ответ:* 12.

Арифметический квадратный корень

Действие нахождения арифметического квадратного корня из неотрицательного числа является обратным действию возведения в квадрат.

Определение. Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число x, квадрат которого равен a.

$\sqrt{a} = x, a \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 = a. \end{cases}$ Так как квадрат действительного числа не бывает отрицательным, то квадратный корень из отрицательного числа не существует на $\boldsymbol{R}$.

Необходимо помнить два тождества, связанных с понятием квадратного корня: $\boxed{\begin{array}{|l|}\hline (\sqrt{a})^2 = a \\ a \geqslant 0 \\ \hline \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{|l|}\hline \sqrt{a^2} = |a| \\ a \text{ — любое} \\ \hline \end{array}}$.

Пример 4. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{a^2}}{a}$ при $a < 0$.

Решение. При $a < 0$ $\sqrt{a^2} = |a| = -a$, тогда $\dfrac{\sqrt{a^2}}{a} = \dfrac{-a}{a} = -1$.
Ответ: -1.

Числовое выражение будем называть *иррациональным*, если оно содержит корень из числа, значение которого нельзя представить рациональной дробью (не извлекаемый «нацело»).

Пример 5. Какое из чисел $\sqrt{0{,}4}$; $\sqrt{4000}$; $\sqrt{400}$ является рациональным?

Решение. $\sqrt{0{,}4} = \sqrt{\dfrac{4}{10}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{10}} = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$ — число иррациональное; $\sqrt{4000} = \sqrt{4 \cdot 100 \cdot 10} = 2 \cdot 10\sqrt{10} = 20\sqrt{10}$ — число иррациональное; $\sqrt{400} = \sqrt{4 \cdot 100} = 2 \cdot 10 = 20$ — число рациональное. *Ответ:* $\sqrt{400}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Какое из чисел $\sqrt{19{,}6}$, $\sqrt{1{,}96}$, $\sqrt{1960}$ является рациональным?

1) $\sqrt{19{,}6}$; 3) $\sqrt{1960}$;

2) $\sqrt{1{,}96}$; 4) ни одно из этих чисел.

2. Какое из чисел $\sqrt{1\frac{4}{25}}$, $\sqrt{25\frac{1}{9}}$, $\sqrt{6\frac{1}{4}}$ является рациональным?

1) $\sqrt{1\frac{4}{25}}$; 3) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$;

2) $\sqrt{25\frac{1}{9}}$; 4) ни одно из этих чисел.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{160}{(2\sqrt{5})^2}$.

1) 8; 2) 1,6; 3) 4; 4) 0,8.

4. Найдите значение выражения $\frac{(3\sqrt{2})^2 - 12}{6}$.

1) 1; 2) 0,5; 3) 0; 4) -1.

5. Найдите значение выражения

$$(3 + \sqrt{2})^2 + \sqrt{(6\sqrt{2} - 11)^2}.$$

6. Упростите выражение $\frac{\sqrt{18b^5}}{\sqrt{2b^3}}$ при условии $b > 0$.

1) $3b$; 2) $3b^2$; 3) $9b^2$; 4) $-3b$.

7. Найдите значение выражения $10\sqrt{1 - x}$ при $x = 0{,}64$.

1) 2; 2) 6; 3) 4; 4) 8.

8. Найдите значение выражения $2\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}$.

1) 10; 2) 50; 3) 100; 4) 20.

9. Найдите значение выражения $\sqrt{15^2 + 20^2}$.

10. Найдите значение выражения $\sqrt{29^2 - 21^2}$.

Сравнение действительных чисел

Определение. Число a называется большим числа b, если разность $a - b$ — положительное число, и число a называется меньшим числа b, если разность $a - b$ — отрицательное число.

Рассмотрим некоторые методы установления отношения «больше» или «меньше» между числами

I. Сравнение чисел по определению:

$a > b$ тогда и только тогда, когда $a - b > 0$;

$a < b$ тогда и только тогда, когда $a - b < 0$.

Пример 1. Сравните $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{7}$.

Решение. Сравним с нулём разность данных чисел: $\frac{2}{3} - \frac{4}{7} = \frac{14 - 12}{21} = \frac{2}{21}$; $\frac{2}{21} > 0$. Значит, $\frac{2}{3} > \frac{4}{7}$. *Ответ:* $\frac{2}{3} > \frac{4}{7}$.

II. Сравнение двух десятичных дробей методом сравнения разрядных единиц, входящих в запись числа.

Из двух положительных десятичных дробей больше та, у которой больше целая часть. Если целые части равны, то больше та, в которой больше десятых долей. Если целые части и десятые доли равны, то больше та дробь, в которой больше сотых долей и т.д. Например, $5{,}61 > 5{,}603$; $0{,}037 < 0{,}12$.

Сравнение двух десятичных дробей можно выполнять и первым методом, т.е. по определению.

III. Сравнение двух положительных чисел путём сравнения их квадратов.

Для любых двух положительных чисел больше то, квадрат которого больше, и наоборот. Если $a > 0$, $b > 0$ и $a^2 > b^2$, то $a > b$. Наоборот, если $a > 0$, $b > 0$ и $a > b$, то $a^2 > b^2$.

Пример 2. Сравните числа $\sqrt{3}$ и 1,7.

Решение. $\sqrt{3} > 0$; $1{,}7 > 0$; $(\sqrt{3})^2 = 3$, $1{,}7^2 = 2{,}89$, $3 > 2{,}89$.

Ответ: $\sqrt{3} > 1{,}7$.

Следует помнить, что любое отрицательное число меньше нуля и меньше любого положительного числа.

Пример 3. Укажите наибольшее из чисел

$$2{,}39;\ 2\frac{2}{5};\ \frac{73}{30};\ -2{,}459.$$

1) 2,39; 2) $2\frac{2}{5}$; 3) $\frac{73}{30}$; 4) −2,459.

Решение. Последнее число является отрицательным и оно меньше любого положительного. Число −2,459 исключаем из рассмотрения; $2\frac{2}{5} = 2{,}4$, а потому $2{,}39 < 2{,}4$ и число 2,39 не может быть наибольшим.

Сравним числа 2,4 и $\frac{73}{30}$. Число $\frac{73}{30}$ представим десятичной дробью $\frac{73}{30} = 2{,}43\ldots$; $2{,}4 < 2{,}43\ldots$. $\frac{73}{30}$ — наибольшее из этих чисел. *Ответ:* $\frac{73}{30}$.

Задания для самостоятельного решения

11. Укажите наибольшее из чисел 0,25, 1,2, $\frac{5}{17}$, $\frac{23}{26}$.

1) 0,25; 2) 1,2; 3) $\frac{5}{17}$; 4) $\frac{23}{26}$.

12. Укажите наименьшее из чисел 0,947, $\frac{15}{16}$, $\frac{23}{22}$, 0,9471.

1) 0,947; 2) $\frac{15}{16}$; 3) $\frac{23}{22}$; 4) 0,9471.

13. Расположите в порядке возрастания числа −0,18; −0,801; −0,098.

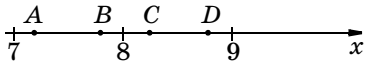
1) −0,18; −0,801; −0,098; 3) −0,801; −0,18; −0,098;
2) −0,098; −0,18; −0,801; 4) −0,18; −0,098; −0,801.

14. Расположите в порядке убывания числа $2\sqrt{7}$, 8, $4\sqrt{3}$.

1) $2\sqrt{7}$, $4\sqrt{3}$, 8; 3) $4\sqrt{3}$, 8, $2\sqrt{7}$;

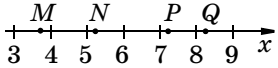
2) 8; $4\sqrt{3}$, $2\sqrt{7}$; 4) $2\sqrt{7}$, 8, $4\sqrt{3}$.

15. Какая из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{67}$?



1) A; 2) B; 3) C; 4) D.

16. Каждое из чисел $\sqrt{27}$; $\sqrt{15}$; $\sqrt{52}$ соотнесите с соответствующей точкой на координатной прямой.



$\sqrt{27}$	$\sqrt{15}$	$\sqrt{52}$

Признаки делимости натуральных чисел

1. На 10 делятся те и только те натуральные числа, в записи которых последняя цифра – нуль.

2. На 5 делятся те и только те натуральные числа, в записи которых последняя цифра 0 или 5.

3. На 3 делятся те и только те натуральные числа, сумма цифр которых делится на 3.

4. На 9 делятся те и только те натуральные числа, сумма цифр которых делится на 9.

Натуральные числа, которые делятся нацело на 2, называются *чётными*.

Натуральные числа, которые не делятся на 2, называются *нечётными*.

Например, числа 2, 18, 54, 126 — чётные, а числа 1, 3, 19, 111 — нечётные.

Чётные числа записывают с помощью выражения $2n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$. В натуральном ряду чисел чётному числу всегда предшествует число нечётное и за ним следует нечётное число, поэтому нечётное число можно записать с помощью выражения $2n - 1$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) или $2n + 1$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). 0 считают числом чётным.

5. На 2 делятся те и только те натуральные числа, в записи которых последняя цифра чётная.

Пример 1. Какое из указанных чисел не делится на 9?

1) 567; 2) 632; 3) 8721; 4) 35460.

Решение. Вычисляем сумму цифр: 1) $5 + 6 + 7 = 18$ — делится на 9; 2) $6 + 3 + 2 = 11$ — не делится на 9;

3) $8 + 7 + 2 + 1 = 18$ — делится на 9; 4) $3 + 5 + 4 + 6 + 0 = 18$ — делится на 9. *Ответ:* 2.

Пример 2. Известно, что m и n — чётные числа. Какое из следующих чисел также является чётным?

1) $(m + 3)(n + 1)$; 2) $2m + 6n + 1$; 3) $5m \cdot n$.

Решение. Задачу решаем анализом данных чисел.

1) $m + 3$ — нечётное число, $n + 1$ — нечётное число, тогда в произведении $(m + 3)(n + 1)$ нет чётных множителей; $(m + 3)(n + 1)$ — число нечётное.

2) $2m + 6n$ — чётное число, тогда $2m + 6n + 1$ — нечётное число.

3) $5m \cdot n$ — число чётное. *Ответ:* 3.

Задания для самостоятельного решения

17. На какое из данных чисел не делится число 113065440?

1) на 3; 2) на 5; 3) на 6; 4) на 9.

18. Какую цифру нужно поставить вместо *, чтобы получившееся число 11358904* делилось на 9?

1) 0; 2) 2; 3) 5; 4) 9.

19. Известно, что a — нечётное число, b — чётное число. Какое из следующих чисел является чётным?

1) $a + 2b$; 2) $a \cdot (b + 3)$; 3) $a + b + 3$; 4) $a - b + 4$.

20. Известно, что a — нечётное число, b — чётное число. Какое из следующих чисел является нечётным?

1) $a \cdot b$; 2) $4 \cdot (a - b)$; 3) $(a + 7) \cdot b$; 4) $a + 4b$.

Степень с целым показателем

Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называется выражение a^n, равное произведению n множителей, каждый из которых равен a. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$.

Степенью числа a с показателем 1 называется само число a: $a^1 = a$.

При возведении в степень положительного числа всегда получается положительное число; при возведении в степень нуля получается нуль.

Степень отрицательного числа с чётным показателем — положительное число; $a^{2n} \geqslant 0$ при любом a.

Степень отрицательного числа с нечётным показателем — отрицательное число; $a^{2n+1} < 0$, если $a < 0$.

Степенью числа a, не равного нулю, с целым отрицательным показателем, называется дробь, числитель кото-

рой равен 1, а знаменатель — степени числа a с целым положительным показателем, противоположным данному.

Если $a \neq 0$, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Вообще, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, если $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Степенью числа a, не равного нулю, с показателем 0, называется число 1; $a^0 = 1$, если $a \neq 0$. Выражения 0^0, 0^{-n} при $-n < 0$ считаются не имеющими смысла.

Свойства степени ($a \neq 0$)

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$; $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ $(b \neq 0)$.

Стандартный вид числа

Стандартным видом числа называется его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$, n — целое число. Число n называется *порядком* числа, число a — *значащей частью* числа. Например, $1234 = 1{,}234 \cdot 10^3$; $0{,}068 = 6{,}8 \cdot 10^{-2}$.

Задания для самостоятельного решения

21. Укажите число, равное 0,000058.

1) $5{,}8 \cdot 10^{-4}$; 3) $5{,}8 \cdot 10^{-6}$;
2) $5{,}8 \cdot 10^{-5}$; 4) $5{,}8 \cdot 10^{-7}$.

22. Укажите число, не равное $2{,}3 \cdot 10^{-5}$.

1) $0{,}023 \cdot 10^{-3}$; 3) $23 \cdot 10^{-6}$;
2) $23 \cdot 10^{-4}$; 4) 0,000023.

23. Найдите частное $\frac{2{,}4 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-2}}$. Ответ запишите в виде десятичной дроби.

24. Найдите значение выражения $(17 \cdot 10^{-5}) \cdot (0{,}3 \cdot 10^3)$. Ответ запишите в виде десятичной дроби.

25. Вычислите значение выражения $\frac{3^{-10}}{3^{-1} \cdot 3^{-7}}$.

1) -9; 2) $-\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) 9.

26. Найдите значение выражения $\frac{1}{(-2)^{-3}} \cdot \frac{1}{(-2)^{-2}}$.

1) $-\frac{1}{32}$; 2) -32; 3) 32; 4) $\frac{1}{32}$.

27. Представьте в виде степени произведение $16 \cdot 4^n$.

1) 64^n; 2) 4^{2n}; 3) 4^{n+2}; 4) 16^{n+2}.

28. Укажите выражение, равное степени 4^{7-n}.

1) $4^7 - 4^n$; 2) $\frac{4^7}{4^n}$; 3) $\frac{4^7}{4^{-n}}$; 4) $(4^7)^{-n}$.

Прямая и обратная пропорциональность величин

Определение. Две величины называются прямо пропорциональными, если при увеличении одной из них в несколько раз другая увеличивается во столько же раз.

Формула прямой пропорциональности имеет вид $y = kx$, где x, y — переменные величины, k — коэффициент пропорциональности, постоянная величина.

Свойство прямо пропорциональной зависимости: если величины прямо пропорциональны, то отношение двух значений одной величины равно отношению соответствующих значений другой величины: $\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1}$. Коэффициент пропорциональности k равен отношению любых двух соответствующих значений данных величин: $k = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$.

Пример 1. За t_1 часов автомобиль проехал расстояние 405 км. За какое время этот автомобиль может проехать 507 км?

Решение. Время движения t и пройденное расстояние s при постоянной скорости связаны прямо пропорциональной зависимостью. По свойству прямой пропорциональности $\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1}{t_2}$. Тогда $\frac{405}{507} = \frac{t_1}{t_2}$; $t_2 = \frac{507 \cdot t_1}{405} = \frac{169}{135} t_1$ (ч). *Ответ:* $\frac{169}{135} t_1$ ч.

Пример 2. Для приготовления строительного раствора цемент, песок и вода берутся в отношении 1 : 1 : 0,4. Сколько цемента, песка и воды требуется для приготовления 48 кг раствора?

Решение. Пусть k — коэффициент пропорциональности. Тогда цемента надо взять k кг, песка — k кг, воды — $0{,}4k$ кг. По условию масса раствора равна 48 кг. Значит, $k + k + 0{,}4k = 48$; $2{,}4k = 48$; $k = 20$. Цемента и песка потребуется по 20 кг. Воды потребуется $0{,}4 \cdot 20 = 8$ (кг). *Ответ:* 20 кг, 20 кг, 8 кг.

Определение. Две величины называются обратно пропорциональными, если при увеличении одной из них в несколько раз другая уменьшается во столько же раз.

Формула обратной пропорциональности имеет вид: $y = \frac{k}{x}$, где x и y — переменные величины, k — постоянная.

Свойство обратно пропорциональной зависимости: если величины обратно пропорциональны, то отношение двух значений одной величины равно обратному отношению соответствующих значений другой величины: $\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_1}{x_2}$.

Задача. На путь от города до посёлка велосипедист, двигаясь со скоростью v км/час, затратил 0,7 часа. С какой скоростью он должен был ехать, чтобы преодолеть этот путь за 0,5 часа?

Решение. Скорость движения V и время t, затраченное на преодоление данного расстояния, связаны обратно пропорциональной зависимостью. По свойству обратной пропорциональности $\frac{V_1}{V_2} = \frac{t_2}{t_1}$. Тогда $\frac{V}{V_2} = \frac{0{,}5}{0{,}7}$; $V_2 = \frac{0{,}7 \cdot V}{0{,}5} = 1{,}4V$ (км/час). *Ответ:* $1{,}4V$.

Задания для самостоятельного решения

29. Масса одного пакета конфет равна a граммов. По какой формуле можно вычислить количество пакетов (N) с конфетами, если масса всех пакетов — P килограммов.

1) $N = \frac{P}{1000a}$; 2) $N = \frac{1000P}{a}$; 3) $N = \frac{P}{a}$; 4) $N = 1000P$.

30. Длина шага человека y см. По какой формуле можно вычислить расстояние S (в метрах), которое пройдет человек сделав n шагов?

1) $S = y \cdot n$;

2) $S = 100 \cdot y \cdot n$;

3) $S = \frac{100 \cdot y}{n}$;

4) $S = \frac{y \cdot n}{100}$.

31. Длина прыжка кенгуру b см. По какой формуле можно вычислить число прыжков N, которые надо сделать кенгуру, чтобы преодолеть l метров?

1) $N = \frac{l}{100 \cdot b}$; 2) $N = \frac{l}{b}$; 3) $N = \frac{100 \cdot l}{b}$; 4) $N = 100b \cdot l$.

32. Один килограмм печенья стоит p рублей. Составьте выражение для вычисления стоимости x грамм этого печенья (в рублях).

1) $1000 \cdot p \cdot x$; 2) $\frac{p \cdot x}{1000}$; 3) $\frac{p}{1000 \cdot x}$; 4) $\frac{x}{1000 \cdot p}$.

33. Один килограмм печенья стоит p рублей. Составьте выражение для вычисления количества печенья (в граммах), которое можно купить за x рублей.

1) $\frac{p}{x}$; 2) $\frac{x}{p}$; 3) $\frac{1000 \cdot x}{p}$; 4) $1000 \cdot p \cdot x$.

Приближённые вычисления

Приближённые значения используются при измерении различных величин (расстояние, скорость, температура, масса, время и т.д.) и при округлении чисел.

Правило округления целых чисел и десятичных дробей

Для округления числа до определённого разряда необходимо знать, какая цифра следует за этим разрядом: если за разрядом стоит цифра, меньшая 5, то все цифры, следующие за разрядом, отбрасывают, если они стоят после запятой (например, $2{,}3748 \approx 2{,}37$), или заменяют нулями, если они входят в целую часть числа (например, $1928 \approx \approx 1900$); если за разрядом стоит цифра 5 или большая, чем 5, то цифру разряда увеличивают на единицу, а все следующие за ней цифры отбрасывают или заменяют нулями (например, $15{,}2654 \approx 15{,}27$; $3719{,}61 \approx 3720$).

Приближённые значения обычно записывают так, чтобы по записи можно было судить о точности приближения. Например, если на мешке с сахаром написано, что масса нетто $50 \pm 0{,}2$ (кг), то эта запись означает, что масса сахара в мешке не может отличаться от 50 кг более, чем на 0,2 кг: $49{,}8 \leqslant m \leqslant 50{,}2$ (кг). Число 0,2 называют границей абсолютной погрешности приближённого числа 50. Если же на мотке проволоки указано 300 ($\pm 1\%$) м, то запись говорит о том, что истинная длина проволоки в мотке не может отличаться от 300 м более, чем на 1% от 300 м, т.е. более, чем на 3 м: 297 м $\leqslant L \leqslant$ 303 м. 1% — это граница относительной погрешности приближённого числа 300.

Границей относительной погрешности приближённого числа называется отношение границы абсолютной погрешности этого числа к самому числу, выраженное в процентах.

В математических таблицах и справочниках приближённые значения величин записываются так, чтобы абсо-

лютная погрешность не превосходила единицы последнего разряда. В таких случаях говорят, что число записано **верными** цифрами.

Пример 1. В таблице плотности вещества указано, что плотность ртути (в г/см^3) равна 13,55. Это означает, что абсолютная погрешность указанного значения не превосходит 0,01: $\rho = 13{,}55 \pm 0{,}01$ (г/см^3) или $13{,}54 \leqslant \rho \leqslant 13{,}56$ (г/см^3).

Пример 2. В таблице массы вещества записано, что масса электрона (в кг) равна $9{,}1 \cdot 10^{-31}$. Это означает, что абсолютная погрешность данного приближённого числа не превышает $0{,}1 \cdot 10^{-31}$: $m = (9{,}1 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-31}$ (кг), или $9 \cdot 10^{-31} \leqslant m \leqslant 9{,}2 \cdot 10^{-31}$ (кг).

Пример 3. На пачке с солью написано: масса нетто 1000 ± 30 г. Укажите, какой не может быть масса соли в пачке:

1) 980 г; 2) 1050 г; 3) 1030 г; 4) 1000 г.

Решение. Запись на коробке означает, что масса соли не может отличаться от 1000 более, чем на 30 г: 970 г $\leqslant$ $\leqslant m \leqslant$ 1030 г. Из данных ответов в этот промежуток не входит только число 1050 г. *Ответ:* 2.

Задания для самостоятельного решения

34. Какое значение может принимать число a, если известно, что $a = 0{,}879 \pm 0{,}022$.

1) 0,855; 2) 0,9; 3) 0,902; 4) 0,849.

35. Какое значение не может принимать число a, если известно, что $a = 30{,}48 \pm 0{,}15$.

1) 30,33; 2) 30,4; 4) 30,61; 4) 30,64.

36. Укажите границы, в которых заключена масса m товара в граммах, на упаковке которого указано, что $m = 600 \pm 2\%$.

1) $598 \leqslant m \leqslant 602$; 3) $594 \leqslant m \leqslant 604$;
2) $588 \leqslant m \leqslant 612$; 4) $590 \leqslant m \leqslant 610$.

37. Укажите границы, в которых заключена масса m товара в граммах, на упаковке которого указано, что $m = 60 \pm 0{,}1\%$.

1) $59{,}9 \leqslant m \leqslant 60{,}1$; 3) $59{,}94 \leqslant m \leqslant 60{,}06$;
2) $55 \leqslant m \leqslant 65$; 4) $59{,}5 \leqslant m \leqslant 60{,}5$.

38. Укажите границы, в которых заключена масса m товара в граммах, на упаковке которого указано, что $m = 80 \pm 0{,}5\%$.

1) $79{,}5 \leqslant m \leqslant 80{,}5$; 3) $79{,}6 \leqslant m \leqslant 80{,}4$;
2) $75 \leqslant m \leqslant 85$; 4) $76 \leqslant m \leqslant 84$.

Буквенные выражения

Числовые и буквенные выражения

Выражения, составленные из чисел с помощью знаков действий и скобок, называются *числовыми выражениями.*

Число, которое получается в результате выполнения действий в числовом выражении, называется *значением выражения.*

Выражения, составленные из чисел и переменных, обозначенных буквами, с помощью знаков действий и скобок, называются *буквенными выражениями*. Если в буквенное выражение вместо каждой переменной подставить какое-либо её значение, то получится числовое выражение. Его значение называется значением буквенного выражения при выбранных значениях переменных.

Областью определения буквенного выражения называется множество числовых значений переменных, при которых это выражение имеет смысл. Многочлен имеет смысл при всех значениях входящих в него переменных. Дробь имеет смысл при всех значениях переменных, при которых знаменатель не обращается в нуль. **На нуль делить нельзя!**

Квадратный корень на множестве действительных чисел имеет смысл при всех значениях переменных, при которых подкоренное выражение положительно или равно нулю, то есть является неотрицательным числом.

Задания для самостоятельного решения

39. Вычислите значение выражения $\frac{a}{b+c}$ при $a = 1{,}8$; $b = -1{,}5$; $c = -0{,}9$.

40. Вычислите значение выражения $\sqrt{a^2 + b^2}$ при $a = -24$; $b = -7$.

41. Вычислите значение выражения $\sqrt{x^2 - y^2}$ при $x = -17$; $y = 15$.

42. При каком из указанных значений x выражение $\frac{1}{\sqrt{3x+9}}$ не имеет смысла?

1) при $x = -1$; 3) при $x = -3$;
2) при $x = 0$; 4) при $x = 3$.

43. Даны выражения:

А) $\frac{x+2}{x-4}$; Б) $\frac{x-4}{x+4}$; В) $x + \frac{4-x}{x-1}$.

Какие из этих выражений не имеют смысла при $x = 4$?

1) Только Б; 2) Только А; 3) Б и В; 4) А и Б.

44. Выразите из формулы пути равномерного движения $S = S_0 + Vt$ скорость V.

1) $V = \dfrac{S_0 - S}{t}$; 3) $V = \dfrac{t}{S_0 - S}$;

2) $V = (S - S_0)t$; 4) $V = \dfrac{S - S_0}{t}$.

45. Выразите из формулы кинетической энергии движущегося тела $E = \dfrac{mV^2}{2}$ массу m.

1) $m = \dfrac{E}{2V^2}$; 2) $m = \dfrac{V^2}{2E}$; 3) $m = \dfrac{2E}{V^2}$; 4) $m = 2V^2E$.

46. Водоём наполняется водой за 8 часов. Какая часть водоёма наполнилась за n минут?

1) $\dfrac{n}{8 \cdot 60}$; 2) $\dfrac{8}{n}$; 3) $\dfrac{n}{8}$; 4) $\dfrac{8 \cdot n}{60}$.

Преобразование выражений

Одночленом называется произведение чисел, переменных и их степеней. Одночленами считаются также числа, переменные и их степени. Например, выражения $4m^3n$, $3ab^2 \cdot 2a^3bc$, -5, a, b^7, 3^2 — одночлены. Если одночлен записан в виде произведения числового множителя (коэффициента), стоящего на первом месте, и степеней **различных** переменных, то говорят, что одночлен имеет **стандартный** вид. Числа, переменные, их степени также считаются одночленами стандартного вида. Например, $\frac{1}{2}pq^8$, 1, $3c$, -7, b, a^9 — одночлены стандартного вида.

Степенью одночлена называется сумма показателей степеней всех входящих в него переменных. Например, степень одночлена $9a^5b^6c$ равна 12. Если одночлен не содержит переменных (т.е. является числом), то его степень считается равной нулю.

Одночлены называются *подобными*, если они имеют одинаковую буквенную часть, а отличаются, быть может, только коэффициентами. Подобными называются и одночлены, не имеющие буквенной части. Например, $6x^5yz^2$, $-6x^5yz^2$, $4x^5yz^2$ и $-x^5yz^2$ — подобные одночлены; 5, 9, 1 — подобные одночлены.

Многочленом называется сумма одночленов. *Подобными* членами многочлена называются подобные одночлены.

Приведением подобных слагаемых называется замена суммы подобных членов одночленом. *Многочленом стандартного вида* называется многочлен, в котором выполнено приведение подобных слагаемых, и все члены являются одночленами стандартного вида.

Степенью многочлена стандартного вида называется наибольшая из степеней входящих в него одночленов. Например, $6x^3y - xy^2 + 1$ — многочлен стандартного вида четвёртой степени. Степенью произвольного многочлена называется степень тождественно равного ему многочлена стандартного вида.

Дробью называется выражение вида $\frac{a}{b}$, где буквами обозначены числовые выражения или выражения, содержащие переменные; выражение a называется числителем, b — знаменателем дроби $\frac{a}{b}$. Например, $\frac{3}{5}$, $\frac{2 \cdot 6{,}7 - 4 \cdot 1{,}2}{7{,}4}$, $\frac{4}{\frac{2}{5} - \frac{1}{3}}$ — числовые дроби; $\frac{6}{x}$, $\frac{m^2 - 2{,}1m + 2}{n - 3}$, $\frac{\frac{0{,}5}{c} - \frac{2}{b}}{b + 0{,}3c}$ — дроби с переменными.

Рациональным выражением называется выражение, составленное из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень. Рациональные выражения делятся на целые и дробные.

Целым называется рациональное выражение, которое не содержит операции деления на выражение с переменными. Например, любые многочлены и одночлены являются целыми выражениями. Выражение $\frac{x + 4{,}5y}{9 - 7 \cdot 0{,}3}$ — также является целым.

Дробным называется рациональное выражение, которое содержит операцию деления на выражение с переменными. Например, $\frac{t}{p - x}$, $\frac{a - 1}{a + 3} - 2{,}5$, $\frac{\frac{1}{m} + \frac{3}{n}}{6}$ — дробные рациональные выражения. Следует обратить внимание на существенное различие в понятиях «дробь» и «дробное выражение». Например, $\frac{a}{7}$ и $\frac{7}{a}$ — это дроби, но $\frac{a}{7}$ — целое выражение, его можно записать в виде одночлена $\frac{1}{7}a$, $\frac{7}{a}$ — дробное выражение.

Областью допустимых значений переменных дробного выражения (областью определения) называется множество числовых значений переменных, при которых это выражение имеет смысл (то есть знаменатель не обращается в нуль). Например, областью допустимых значений переменной выражения $\frac{7+x}{7-x}$ является множество действительных чисел, не равных 7 ($x \neq 7$). Областью допустимых значений переменных дроби $\frac{5x+3y}{x-y}$ являются все пары чисел $(x; y)$, в которых $x \neq y$.

Тождественные преобразования выражений

Выражения называются *тождественно равными*, если равны их соответствующие значения при любых допустимых значениях переменных, входящих в эти выражения. Например, выражения $(x^2)^3$ и x^6, $2ab^2a^3b$ и $2a^4b^3$, $\frac{m^3 \cdot m^2}{m}$ и m^4 (при $m \neq 0$) являются тождественно равными.

Тождественным преобразованием (или просто преобразованием) называется замена одного выражения другим, тождественно равным ему.

Преобразование одночленов и многочленов

Тождественные преобразования одночленов и многочленов выполняются на основе свойств (законов) действий над числами.

1. Переместительный закон: $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$.

2. Сочетательный закон: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

3. Распределительный закон: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Правила действий с одночленами и многочленами

1). При умножении одночленов и возведении одночлена в степень используются правила действий со степенями. Чтобы умножить одночлен на одночлен, надо перемножить их коэффициенты и сложить показатели степеней с одинаковыми основаниями.

Пример 1. $3a^3b^2c \cdot 2ab = 6a^4b^3c$. Чтобы возвести одночлен в степень, надо коэффициент возвести в эту степень, а показатели букв умножить на показатель степени.

Пример 2. $(3x^5y^2t)^2 = 9x^{10}y^4t^2$.

2). Складывать или вычитать можно только подобные одночлены. Чтобы сложить или вычесть подобные одночлены, надо сложить или вычесть их коэффициенты, оставив без изменения буквенную часть.

Пример 3. $4a^{10}bc^3 + 2a^{10}bc^3 - a^{10}bc^3 + 2a^{10}bc^3 = 7a^{10}bc^3$ $(4 + 2 - 1 + 2 = 7)$.

Если сумма двух или нескольких подобных членов равна нулю, то говорят, что эти члены «взаимно уничтожаются». Например, $9a^3 + 4b - 6a^3 - 3a^3 = 4b$.

3). Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Пример 4. $4mn^2 \cdot (2m^3n - q) = 8m^4n^3 - 4mn^2q$.

4). Чтобы сложить или вычесть многочлены, надо воспользоваться правилом раскрытия скобок и привести подобные слагаемые (если они есть).

Пример 5. $(12x^2y - 5x + y) + (3x^2y - 4y) - (7x - y) = 12x^2y - 5x + y + 3x^2y - 4y - 7x + y = (12x^2y + 3x^2y) + (-5x - 7x) + (y - 4y + y) = 15x^2y - 12x - 2y$.

5). Иногда требуется решить обратную задачу — представить многочлен в виде суммы или разности многочленов. В этом случае пользуются правилом заключения слагаемых в скобки.

Пример 6. $a^5 - 2a^2 - a + 1 = (a^5 - 2a^2) + (-a + 1) = (a^5 - 2a^2) + (1 - a)$; но $a^5 - 2a^2 - a + 1 = (a^5 - 2a^2) - (a - 1)$; $a^5 - 2a^2 - a + 1 = -(-a^5 + 2a^2) + (-a + 1) = -(2a^2 - a^5) + (1 - a)$; $a^5 - 2a^2 + 1 = -(2a^2 - a^5) - (a - 1)$.

6). Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

Пример 7. $(3a + 4b^2)(a - b) = 3a \cdot a + 4b^2 \cdot a + 3a \cdot (-b) + 4b^2 \cdot (-b) = 3a^2 + 4ab^2 - 3ab - 4b^3$.

7). На практике при умножении многочлена на многочлен часто используют формулы сокращённого умножения.

1. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
2. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
3. $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$.
4. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

Основные способы разложения многочлена на множители

1. Способ вынесения общего множителя за скобки.

Метод основан на применении распределительного закона умножения, прочитанного «справа – налево».

Пример 8. $6m^3n + 2mn^2 = 2mn(3m^2 + n)$. Чтобы проверить правильность разложения, можно выполнить обратное действие: $2mn(3m^2 + n) = 6m^3n + 2mn^2$.

2. Способ группировки (с последующим вынесением общего множителя за скобки).

Пример 9. $ab^2 - ax - b^2y + xy + b^2 - x = (ab^2 - ax) - (b^2y - xy) + (b^2 - x) = a(b^2 - x) - y(b^2 - x) + (b^2 - x) = (b^2 - x)(a - y + 1)$.

Можно было группировать члены иначе: $ab^2 - ax - b^2y + xy + b^2 - x = (ab^2 - b^2y + b^2) - (ax - xy + x) = b^2(a - y + 1) - x(a - y + 1) = (a - y + 1)(b^2 - x)$.

3. С помощью формул сокращённого умножения (прочитанных формул 7) «справа – налево»):

Пример 10. Разложите на множители выражение $4(2a + 9)^2 - 9(a - 7)^2$.

Решение. $4(2a + 9)^2 - 9(a - 7)^2 = (2(2a + 9))^2 - (3(a - 7))^2 = (4a + 18)^2 - (3a - 21)^2 = (4a + 18 + 3a - 21)(4a + 18 - 3a + 21) = (7a - 3)(a + 39)$.

4. С помощью формулы разложения квадратного трёхчлена на множители:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$, x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Пример 11. Разложите на множители $-x^2 - x + 2$.

Решение. $-x^2 - x + 2 = -1 \cdot (x - x_1)(x - x_2)$; $-x^2 - x + 2 = 0$; $x^2 + x - 2 = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = 1$; $-x^2 - x + 2 = -(x + 2)(x - 1)$. *Ответ:* $-(x + 2)(x - 1)$.

Задания для самостоятельного решения

47. Найдите значение выражения $-24c^3d^2$ при $c = -\frac{1}{2}$; $d = \frac{1}{5}$.

48. Найдите значение выражения $(b - c)^2$ при $b = 1{,}6$; $c = -1{,}4$.

1) 0,04; 2) 0,4; 3) 9; 4) другой ответ.

49. Известно, что $x = -2$, $y = -3$. Значение каждого из данных выражений соотнесите с ответом и заполните таблицу.

A. $(x + y)^2$; B. $x^2 + y^2$; C. $x^2 - y^2$.

1) -5; 2) 13; 3) 25.

A	B	C

50. Известно, что $m = -5$, $p = 3$. Значение каждого из данных выражений соотнесите с ответом и заполните таблицу.

A. $m^2 + p^2$; B. $(m - p)^2$; C. $m^2 - p^2$.

1) 16; 2) 34; 3) 64.

A	B	C

51. Упростите выражение $7c - 6\left(b - \frac{2}{3}c\right) + (b - c)$ и вычислите его значение при $b = \frac{1}{5}$; $c = -0{,}5$.

1) -6; 2) -2; 3) $-8{,}5$; 4) другой ответ.

52. Преобразуйте выражение $(2a - 3x)(x + 6a) - (3a - x)(4a + 3x) + a$ в многочлен и вычислите его значение при $a = 0{,}1$, $x = -0{,}02$.

53. Найдите значение выражения $|-a - b| + 2$, если $6(a + b) = 24$.

1) -2; 2) 6; 3) -6; 4) другой ответ.

54. Укажите (не выполняя умножения) те произведения, которые тождественно равны между собой.

A. $4(x + y)(x - y)$. C. $4(-x - y)(x - y)$.

B. $4(y + x)(y - x)$. D. $(4x + 4y)(4x - 4y)$.

1) B и C; 2) A и B; 3) A и D; 4) B и D.

55. Разложите на множители многочлены:

а) $m^2n^2 + c + cmn + mn$; б) $5p - k - pk + 5p^2$.

56. Укажите произведение, тождественно равное многочлену $m^2 + mn - bm - bn$.

1) $(m + n)(m + b)$; 3) $(m + n)(m - b)$;

2) $(m - n)(m + b)$; 4) $(m - n)(m - b)$.

57. Упростите выражение $(-c^2 - 1)(1 - c^2)$.

1) $(1 - c^2)^2$; 2) $1 - c^4$; 3) $c^4 - 1$; 4) другой ответ.

58. Для каждого многочлена найдите тождественно равное ему произведение. В таблице укажите номер правильного ответа.

A. $x^3 + 64$; B. $x^2 - 64$; C. $x^3 - 64$.

1) $(x - 8)(x + 8)$;

2)$(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$;

3) $(x - 4)\ (x^2 + 4x + 16)$.

A	B	C

Преобразование дробных выражений

1. Свойства дробей.

1) Основное свойство дроби.

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же выражение, не равное нулю, то получится дробь, тождественно равная данной.

2) Если у дроби изменить знак числителя (знаменателя) и знак перед дробью, то получится дробь, тождественно равная данной.

2. Правила действий с дробями.

1) Сократить дробь — это значит разделить числитель и знаменатель дроби на одно и то же число или выражение, не равное нулю.

Сокращение дроби выполняется согласно основному свойству дроби и правилу деления произведения на число или выражение. (Чтобы произведение нескольких множителей разделить на число или выражение, достаточно только один из множителей разделить на это число или выражение).

Чтобы сократить дробь, необходимо её числитель и знаменатель разложить на множители и лишь после этого произвести сокращение на одинаковые множители. Если общих множителей нет, то сокращение дроби невозможно.

Пример 1. $a \neq 0$.

$$\frac{2a^3+6ab}{6a} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}\cdot\overset{1}{\cancel{a}}\cdot(a^2+3b)}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot 3\cdot\underset{1}{\cancel{a}}} = \frac{a^2+3b}{3}$$

2) Чтобы сложить (вычесть) дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить (вычесть) их числители, а знаменатель оставить прежним.

Пример 2. $\dfrac{2x^2-y}{5x-1} - \dfrac{4y-x}{5x-1} = \dfrac{(2x^3-y)-(4y-x)}{5x-1} =$

$= \dfrac{2x^3-y-4y+x}{5x-1} = \dfrac{2x^3-5y+x}{5x-1}$, $5x-1 \neq 0$.

Чтобы сложить (вычесть) дроби с разными знаменателями, нужно привести дроби к общему знаменателю, а затем применить правило сложения (вычитания) дробей с одинаковыми знаменателями.

Приведение дробей к общему знаменателю выполняется путём умножения числителя и знаменателя каждой дроби на такое число или выражение (называемое дополнительным множителем), чтобы знаменатели у всех дробей стали одинаковыми.

Чтобы найти общий знаменатель нескольких дробей, надо знаменатель каждой дроби разложить на множители, затем выписать знаменатель одной из дробей и приписать к нему недостающие множители из других знаменателей.

Пример 3. $\dfrac{3a+b}{a^3-ab^2} + \dfrac{2}{ab^2+a^2b} - \dfrac{b}{a-b} = \dfrac{3a+b}{a(a^2-b^2)} +$

$+\dfrac{2}{ab(b+a)} - \dfrac{b}{(a-b)} = \dfrac{\overset{b}{\smile}\ 3a+b}{a(a+b)(a-b)} + \dfrac{\overset{a-b}{\smile}\ 2}{ab(b+a)} - \dfrac{\overset{ab(a+b)}{\smile}\ b}{(a-b)} =$

$$= \frac{b\cdot(3a+b)\ +2(a-b)-ab(a+b)\cdot b}{a(a+b)(a-b)\cdot b} =$$

$$= \frac{3ab+b^2+2a-2b-a^2b^2-ab^3}{a\cdot b\ \cdot(a^2-b^2)};\ \begin{cases} a\neq 0,\\ b\neq 0,\\ a\neq \pm b. \end{cases}$$

3) Чтобы умножить дроби, нужно перемножить их числители и их знаменатели, первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем дроби.

Пример 4. $\frac{m^4}{16n}\cdot\frac{8n^3}{m^5}=\frac{m^4\cdot 8n^3}{16n\cdot m^5}=\frac{n^2}{2m},\ \begin{cases} m\neq 0,\\ n\neq 0. \end{cases}$

4) Чтобы возвести дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель дроби и знаменатель, первый результат записать в числитель, а второй — в знаменатель дроби.

Пример 5. $\left(\frac{3a^2}{5b^4}\right)^3=\frac{(3a^2)^3}{(5b^4)^3}=\frac{3^3\cdot(a^2)^3}{5^3\cdot(b^4)^3}=\frac{27a^6}{125b^{12}},\ b\neq 0.$

5) Чтобы разделить дробь на дробь, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй.

Пример 6. $\frac{y^2+10y+25}{y-3}:(y^2+5y)=\frac{(y+5)^2}{y-3}\cdot\frac{1}{y(y+5)}=$

$$=\frac{(y+5)^2\cdot 1}{(y-3)\cdot y\ \cdot(y+5)}=\frac{y+5}{y(y-3)};\ \begin{cases} y\neq 0,\\ y\neq 3,\\ y\neq -5. \end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения

59. При каких значениях t выражение $\frac{(t-1)(t-5)}{t-10}$ не имеет смысла?

1) 1; 2) 5; 3) 10; 4) другой ответ.

60. Какие из следующих выражений определены для любого положительного x?

A. $\frac{x^2}{x^2-1}$; B. $\frac{x+2}{x+4}$; C. $\frac{2x}{2x-1}$.

1) A и B; 2) B и C; 3) только B; 4) только A.

61. Какие из следующих выражений определены для любого p?

A. $\frac{p}{p^2-1}$; B. $\frac{p+1}{p+5}$; C. $\frac{p-p^2}{20}$.

1) Только A; 2) A и C; 3) B и C; 4) только C.

62. Какие из следующих выражений определены для любого отрицательного y?

А. $\frac{y}{10-y}$; В. $\frac{10}{y^2-10}$; С. $\frac{y^2}{y+7}$.

1) А и В; 2) только С; 3) А и С; 4) только А.

63. Из выражений

А. $\frac{y+10}{y-10}$; В. $\frac{y}{y+10}$; С. $\frac{y-10}{10-y^2}$.

Выберите те, которые не имеют смысла при $y = -10$.

1) Только В; 2) только А; 3) А и С; 4) только С.

64. Расположите в порядке возрастания значения выражений $A = -0{,}2x$; $B = \frac{2}{x}$; $C = -2x^2$, если $x = -0{,}1$.

1) А, В, С; 2) В, С, А; 3) А, С, В; 4) С, А, В.

65. Расположите в порядке убывания значения выражений $A = \frac{4-y}{y}$; $B = -\frac{1}{2y^2}$; $C = -\frac{3y}{2-y}$, если $y = -3$.

1) А, В, С; 2) В, А, С; 3) С, В, А; 4) С, А, В.

66. Какое из выражений тождественно равно дроби $\frac{(x-2y)^2}{3y-x}$?

А. $-\frac{(2y-x)^2}{3y-x}$; Б. $\frac{(2y-x)^2}{3y-x}$; В. $\frac{(2y-x)^2}{x+3y}$; Г. $\frac{1-2y}{1-3y}$.

Упростите выражение на области его определения.

67. $\frac{y^2}{x-y} + \frac{x^2}{y-x}$.

А. $x+y$; Б. $-x-y$; В. $\frac{x^2y^2}{x-y}$; Г. $y-x$.

68. $\frac{6x}{x^2-y^2} - \frac{3}{x-y}$. **69.** $3x - \frac{1+3x^2}{x+1}$.

70. $\frac{7a+4}{12a} - \frac{2a+3}{9a}$. **71.** $\frac{x^2-x}{4xy} \cdot \frac{2y}{x^2-1}$.

72. $\frac{a^2-4b^2}{a^2} : (2a-4b)$. **73.** $\frac{m}{m^2-mn} : \frac{m^2}{m^2-n^2}$.

Сократите дробь.

74. $\frac{6x^2-2x}{4x}$. **75.** $\frac{6a-14b^2}{9a^2-49b^4}$. **76.** $\frac{xy^2-x^2y}{x^2-y^2}$.

77. $\frac{4x^2-4x+1}{4x^2-1}$. **78.** $\frac{9a^2+12a+4}{4-9a^2}$. **79.** $\frac{25a^2-10a+1}{10ab-2b}$.

Преобразование иррациональных выражений

Алгебраическое выражение называется *иррациональным*, если в нём содержатся операции извлечения корня из переменных или возведения переменных в степень с дробным показателем.

Напомним основные положения теории.

I) Определение квадратного корня:

$$\sqrt{a} = x,\ a \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 = a. \end{cases}$$

Квадратный корень из отрицательного числа не существует на $\boldsymbol{R}$.

II) Свойства корня.

1. $\underset{a \geq 0}{(\sqrt{a})^2} = a$;
3. $\sqrt{abc} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$; $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$;
2. $\underset{a \in \boldsymbol{R}}{\sqrt{a^2}} = |a|$;
4. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \geqslant 0$, $b > 0$;

III) Правила действий с корнями.

1. $\sqrt{a}\ \sqrt{b}\ \sqrt{c} = \sqrt{abc}$; $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$;
2. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $a \geqslant 0$, $b > 0$.

Начинать преобразование иррациональных выражений необходимо с нахождения области определения выражения.

Напомним, что значения переменных, при которых алгебраическое выражение имеет смысл, называют допустимыми значениями переменных. Множество всех допустимых значений переменных называют областью определения алгебраического выражения.

Квадратный корень теряет смысл, если подкоренное выражение отрицательно.

Пример 1. Определите, при каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{(-x)^2}$. *Ответ:* x — произвольное число.

2) $\sqrt{2-x}$. *Ответ:* $x \leqslant 2$.

3) $\dfrac{1}{\sqrt{-8x}}$. *Ответ:* $x < 0$.

4) $\dfrac{x-3}{\sqrt{3+x}}$. *Ответ:* $x > -3$.

5) $\sqrt{3x-6} + \sqrt{6-3x}$. *Ответ:* $x = 2$.

6) $\frac{\sqrt{x-5}}{x-6}$. *Ответ:* $[5; 6) \cup (6; +\infty)$.

7) $\frac{7}{\sqrt{x}-1}$. *Ответ:* $[0; 1)\ (1; +\infty)$.

Рассмотрим примеры тождественных преобразований выражений, содержащих квадратные корни.

1. Вынесение множителя за знак корня.

Если подкоренное выражение можно разложить на неотрицательные множители, а затем из одного или нескольких множителей извлечь корень, то говорят, что за знак корня вынесен множитель. Цель преобразования — упростить подкоренное выражение.

Пример 2. Упростите выражение $\sqrt{32} + 3\sqrt{8} - 2\sqrt{192}$.

Решение. $\sqrt{32} + 3\sqrt{8} - 2\sqrt{192} = \sqrt{16 \cdot 2} + 3\sqrt{4 \cdot 2} - 2\sqrt{64 \cdot 3} = 4\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 16\sqrt{3} = 10 - 16\sqrt{3}$. *Ответ:* $10 - 16\sqrt{3}$.

Пример 3. Упростите выражение

$$3\sqrt{12x^7} - 2\sqrt{27x^7} + \sqrt{x^3}.$$

Решение. Данное выражение имеет смысл, если $x \geqslant 0$. $3\sqrt{12x^7} - 2\sqrt{27x^7} + \sqrt{x^3} = 3\sqrt{4 \cdot 3(x^3)^2 \cdot x} - 2\sqrt{9 \cdot 3(x) \cdot (x^3)^2} + \sqrt{x^2 \cdot x} = 3 \cdot 2x^3\sqrt{3x} - 2 \cdot 3x^3\sqrt{3x} + x\sqrt{x} = x\sqrt{x}$, $x \geqslant 0$. *Ответ:* $x\sqrt{x}$, $x \geqslant 0$.

Пример 4. Вынесите множитель за знак корня $\sqrt{8x^4y^3t^2}$.

Решение. Корень имеет смысл на $\boldsymbol{R}$, если $y \geqslant 0$, x и t — любые действительные числа. $\sqrt{8x^4y^3t^2} = \sqrt{4 \cdot 2(x^2)^2 \cdot y^2 \cdot y \cdot t^2} = 2|x^2| \cdot |y| \cdot |t|\sqrt{2y} = 2x^2y \cdot |t|\sqrt{2y}$, $|x^2| = x^2$, так как $x^2 \geqslant 0$, $|y| = y$, так как $y \geqslant 0$. *Ответ:* $2x^2y \cdot |t|\sqrt{2y}$, $y \geqslant 0$.

2. Внесение множителя под знак корня.

Внесением множителя под знак корня называется преобразование, в результате которого произведение множителя на корень заменяют корнем из произведения соответствующих множителей.

Пример 5. $3\sqrt{10} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{9 \cdot 10} = \sqrt{90}$.

***Под знак квадратного корня** можно вносить **только неотрицательный** множитель!*

$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$, если $a \geqslant 0$ и $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$, если $a < 0$.

Пример 6. $-2\sqrt{13} = -\sqrt{4} \cdot \sqrt{13} = -\sqrt{4 \cdot 13} = -\sqrt{52}$.

Пример 7. Внесите множитель под знак корня $-a\sqrt{5a}$.

Решение. Корень $\sqrt{5a}$ существует, если $a \geqslant 0$, тогда $-a \leqslant 0$, под знак корня вносим неотрицательный множитель a. (Полезно проверить знак данного выражения до внесения множителя под знак корня и после преобразования, он не должен меняться в результате преобразования). $-a\sqrt{5a} \leqslant 0$, так как $a \geqslant 0$; $-a\sqrt{5a} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{5a} = -\sqrt{5a^3}$. (Знак выражения не изменился). *Ответ:* $-\sqrt{5a^3}$, $a \geqslant 0$.

Пример 8. Внесите множитель под знак корня:

а) $7t\sqrt{-\frac{1}{7t}}$; б) $-3c\sqrt{-c^3 d^8}$; в) $6y^3\sqrt{2y}$.

Решение. а) Выражение $7t\sqrt{-\frac{1}{7t}}$ имеет смысл при $t < 0$; $7t\sqrt{-\frac{1}{7t}} = -\sqrt{(-7t)^2} \cdot \sqrt{-\frac{1}{7t}} = -\sqrt{-\frac{49t^2}{7t}} = -\sqrt{-7t}$. *Ответ:* $-\sqrt{-7t}$, $t < 0$.

б) Данное выражение имеет смысл, если $c \leqslant 0$, d — любое число, тогда $-3c \geqslant 0$; $-3c\sqrt{-c^3 d^8} = \sqrt{(-3c)^2 \cdot (-c^3 d^8)} = \sqrt{-9c^5 d^8}$. *Ответ:* $\sqrt{-9c^5 d^8}$, $c \leqslant 0$.

в) Выражение $6y^3\sqrt{2y}$ существует при $y \geqslant 0$; $6y^3\sqrt{2y} = \sqrt{(6y^3)^2 \cdot 2y} = \sqrt{72y^7}$. *Ответ:* $\sqrt{72y^7}$, $y \geqslant 0$.

3. Освобождение от иррациональности в знаменателе или числителе дроби.

В основе преобразования лежит основное свойство дроби, позволяющее умножать одновременно числитель и знаменатель на одно и то же число или выражение, не равное нулю, а также тождества $(\sqrt{a})^2 = a$ $(a \geqslant 0)$, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ $(a \geqslant 0, b \geqslant 0)$.

Пример 9. Найдите наименьшее значение дроби $\frac{a-9}{\sqrt{a}-3}$. При каком значении a оно достигается?

Решение. $a \in [0; 9) \cup (9; +\infty)$.

Способ 1. $\frac{a-9}{\sqrt{a}-3} = \frac{(a-9)(\sqrt{a}+3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} = \frac{(a-9)(\sqrt{a}+3)}{a-9} =$

$= \sqrt{a} + 3$. Сумма $\sqrt{a} + 3$ имеет наименьшее значение, равное 3, при $a = 0$.

Способ 2. $\frac{a-9}{\sqrt{a}-3} = \frac{(\sqrt{a}+3)(\sqrt{a}-3)}{\sqrt{a}-3} = \sqrt{a} + 3$. *Ответ:* 3; $a = 0$.

Пример 10. Вычислите

$$\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} - \frac{6}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}}\right) \cdot (4\sqrt{6} - 21).$$

Решение. $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} - \frac{6}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}}\right) \cdot (4\sqrt{6} - 21) =$

$= \left(\frac{15(\sqrt{6}-1)}{6-1} - \frac{6(\sqrt{6}+2)}{6-4} - \frac{12(3+\sqrt{6})}{9-6}\right) \cdot (4\sqrt{6} - 21) = (3\sqrt{6} -$

$- 3 - 3\sqrt{6} - 6 - 12 - 4\sqrt{6})(4\sqrt{6} - 21) = -(4\sqrt{6} + 21)(4\sqrt{6} -$
$- 21) = 345$. *Ответ:* 345.

Задания для самостоятельного решения

(эти задания относятся ко второй части экзаменационной работы)

Сократите дробь.

80. $\frac{4x^2-7x+3}{8x-6}$. **81.** $\frac{5x^2+9x+4}{15x+12}$. **82.** $\frac{3x^2-8x+5}{1-2x+x^2}$.

83. $\frac{7x^2-9x+2}{49x^2-28x+4}$. **84.** $\frac{25x^2-10x+1}{1-5x+y-5xy}$.

85. $\frac{7a-1-b+7ab}{1-14a+49a^2}$. **86.** $\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. **87.** $\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{\sqrt{5}-3}$.

88. $\frac{10-\sqrt{10}}{\sqrt{20}-10\sqrt{2}}$. **89.** $\frac{\sqrt{14}+\sqrt{8}}{\sqrt{7}+2}$.

Вычислите.

90. $\frac{\sqrt{\sqrt{13}-2} \cdot \sqrt{\sqrt{13}+2}}{3}$. **91.** $\frac{\sqrt{\sqrt{2}+3} \cdot \sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{28}}$.

92. $(\sqrt{15} - 3\sqrt{2})(\sqrt{15} + \sqrt{18}) + \sqrt{\frac{1}{4}} - 1.$

93. $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}.$

94. $(\sqrt{7} + 2)(2 - \sqrt{7}) + (2 - \sqrt{3})^2 + \sqrt{48}.$

95. $(\sqrt{3} - 2)^2 - (2\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1).$

Разложите многочлен на множители.

96. $5c + cy^2 - c^2y - 5y.$ **97.** $3m^2 - 3n^2 - m + n.$

98. $1 - a^2 + 2ab - b^2.$ **99.** $2b^2 - 20bc + 50c^2 - 2.$

100. $6x^2 + 24y^2 + 24xy - 24.$

Найдите значение выражения.

101. $9y^2 - 12xy + 4x^2 - 2x + 3y$, если $x = \frac{3y-1}{2}$.

102. $9a^2 - 24ab + 16b^2 - 3a + 4b$, если $a = \frac{4b+2}{3}$.

103. Найдите все пары чисел m и n, для каждой из которых значение выражения $(m + n)^2 + 8m - 4n - 2mn + 20$ равно нулю.

104. Найдите все пары чисел a и b, для каждой из которых значение выражения $(a - b)^2 - 6a + 10b + 2ab + 34$ равно нулю.

105. Найдите наименьшее значение выражения $9x^4 - 6x^3 + x^2$. При каких значениях x оно достигается?

106. Найдите наибольшее значение выражения $-4x^4 + 20x^3 - 25x^2$. При каких значениях x оно достигается?

107. При каких значениях коэффициента b выражение $(2x + b)^2 - 4x(x + 2b) - b^2 - x$ равно нулю при любых значениях x?

108. При каких значениях коэффициента m выражение $(3x + 2m)^2 + 9x(m - x) - 4m^2 + 1$ не обращается в нуль ни при каких значениях x?

109. При каких значениях коэффициента c многочлен, тождественно равный произведению $(x^3 + 4 - c)(2x - c)$, не содержит свободного члена?

110. При каком значении коэффициента a многочлен, тождественно равный произведению $(2x^2 - 4x + 5)(3x - a)$, имеет равные коэффициенты при x^3 и при x?

111. При каком значении коэффициента p многочлен, тождественно равный произведению $(6x^2 + 24x + p)(x - 2p)$, не содержит x^2?

Ответы

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Ответ	2	3	1	1	22	1	2	3	25	20	2	2	3	2	3

№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Ответ	$\sqrt{27}$ $\sqrt{15}$ $\sqrt{52}$ N M P	4	3	3	4	2	2	0,006	0,051	3

№ задания	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
Ответ	2	3	2	2	4	3	2	3	2	4	2	3	3	−0,75

№ задания	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
Ответ	25	8	3	2	4	3	1	0,12	3	A B C 3 2 1	A B C 2 3 1	1

№ задания	52	53	54	55	57	56	58	59
Ответ	0,142	2	1	а) $(mn + c)(mn + 1)$ б) $(5p - k)(1 + p)$	3	3	A B C 2 1 3	3

№ задания	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
Ответ	3	4	4	1	2	3	Б	Б	$\frac{3}{x-y}$	$\frac{3x-1}{x+1}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{2(x+1)}$

№ задания	72	73	74	75	76	77	78
Ответ	$\frac{a+2b}{2a^2}$	$\frac{m+n}{m^2}$	$\frac{3x-1}{2}$	$\frac{2}{3a+7b^2}$	$\frac{-xy}{x+y}$	$\frac{2x-1}{2x+1}$	$\frac{2+3a}{2-3a}$

№ задания	79	80	81	82
Ответ	$\frac{5a-1}{2b}$	$\frac{x-1}{2}$, $x \neq \frac{3}{4}$	$\frac{x+1}{3}$, $x \neq -\frac{4}{5}$	$\frac{3x-5}{x-1}$, $x \neq 1$

№ задания	83	84	85
Ответ	$\frac{x-1}{7x-2}$, $x \neq \frac{2}{7}$	$\frac{1-5x}{1+y}$, $x \neq 0{,}2$, $y \neq -1$	$\frac{1+b}{7a-1}$, $a \neq \frac{1}{7}$

№ задания	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
Ответ	$\sqrt{2}$	−2	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	1	0,5	−3,5	$-2\sqrt{35}$	4	$-\sqrt{3}$

№ задания	96	97	98
Ответ	$(c - y)(5 - cy)$	$(m - n)(3m + 3n - 1)$	$(1 + a - b)(1 - a + b)$

№ задания	99	100	101	102
Ответ	$2(b - 5c + 1)(b - 5c - 1)$	$6(x + 2y + 2)(x + 2y - 2)$	2	2

№ задания	103	104	105
Ответ	$m = -4$, $n = 2$	$a = 3$, $b = -5$	0; $x = 0$, $x = 1/3$

№ задания	106	107	108
Ответ	0; $x = 0$, $x = 2{,}5$	$b = -0{,}25$	$m = 0$

№ задания	109	110	111
Ответ	$c = 0$, $c = 4$	$a = -2{,}25$	$p = 2$

ГИА

Г.В. Сычёва, Н.Б. Гусева, В.А. Гусев

МАТЕМАТИКА

ТЕМЫ Числа. Буквенные выражения Преобразование выражений

Издательства «**АСТ**» и «**Астрель**» предлагают новую серию учебных пособий для подготовки к государственной итоговой аттестации «**Азбука ГИА**».

Содержание и структура пособий полностью соответствуют официальным документам ГИА, разработанным **Федеральным институтом педагогических измерений** (ФИПИ).

Каждая книга серии посвящена одной или нескольким крупным предметным темам, которые выносятся на экзамен. Рассматриваются все задания на эти темы частей 1 и 2 — базового, повышенного и высокого уровней сложности. Приводятся тесты на проверку различных умений и навыков.

ВНИМАНИЕ!

Издательство «Астрель», подготовившее эти книги, входит в официальный перечень издательств, которым Министерство образования и науки Российской Федерации дало право выпускать учебные пособия для общеобразовательных школ, имеющих государственную аккредитацию (Приказ № 729 от 14.12.2009 г.).

ISBN 978-5-17-075443-4

9 785170 754434

www.ast.ru
www.elkniga.ru