

9 класс

Задача 1. Есть три брата-акробата. Их средний рост — 1 метр 74 сантиметра. А средний рост двух из этих братьев: самого высокого и самого низкого — 1 метр 75 сантиметров. Какого роста средний брат? Ответ обоснуйте.

Задача 2. Радиус описанной окружности равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равен основанию AC . На основании AC построен квадрат $AKLC$ так, что отрезок KL пересекает боковые стороны треугольника. Докажите, что треугольник BKL равносторонний.

Задача 3. Назовём трёхзначное число *интересным*, если хотя бы одна его цифра делится на 3. Какое наибольшее количество подряд идущих интересных чисел может быть? (Приведите пример и докажите, что больше чисел получить нельзя.)

Задача 4. Разность корней квадратного уравнения с действительными коэффициентами $2018x^2 + ax + b = 0$ — целое число (при этом сами корни необязательно целые). Докажите, что дискриминант этого уравнения делится на 2018^2 .

Задача 5. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b , что

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОД}(a, b) + 19$$

(и докажите, что других нет).

$\text{НОД}(a, b)$ — это наибольший общий делитель, то есть наибольшее натуральное число, делящее и a , и b . $\text{НОК}(a, b)$ — это наименьшее общее кратное, то есть наименьшее натуральное число, кратное и a , и b .

Задача 6. В стране 100 городов. Между любыми двумя городами либо нет соединения, либо налажено авиасообщение, либо есть железная дорога (одновременно и авиасообщения, и железной дороги быть не может). Известно, что если два города соединены с третьим железной дорогой, то между ними есть авиалиния, а если два города соединены с третьим авиалиниями, то между ними есть железная дорога. Из-за стихийного бедствия отменили все авиарейсы в стране. Правительство постановило в некоторых городах разместить центры гуманитарной помощи, причём так, чтобы из каждого города можно было добраться в подобный центр. Докажите, что необходимо открыть хотя бы 20 таких центров.

Письменная олимпиада.

За полное решение каждой задачи даётся 4 балла.