

# Олимпиада «Ломоносов» по математике

10–11 классы, 2015 год

1. В ящике лежат сто разноцветных шариков: 28 красных, 20 зелёных, 13 жёлтых, 19 синих, 11 белых и 9 чёрных. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них заведомо оказалось не менее 15 шариков одного цвета?

76

2. Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y = (\arcsin(\sin(\arccos(\cos 3x))))^{-5}.$$

ξ π

3. В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  диагонали  $AC$  и  $DB$  перпендикулярны сторонам  $DC$  и  $AB$  соответственно. Из точки  $B$  проведён перпендикуляр на сторону  $AD$ , пересекающий  $AC$  в точке  $O$ . Найдите  $AO$ , если  $AB = 4$ ,  $OC = 6$ .

2

4. Найдите наибольшее значение  $x + y$ , если числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют неравенству

$$\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} y \geq 1.$$

z^a + 1

5. Отрезок  $AB = 8$  пересекает плоскость  $\alpha$  под углом  $30^\circ$  и делится этой плоскостью в отношении  $1 : 3$ . Найдите радиус сферы, проходящей через точки  $A$  и  $B$  и пересекающей плоскость  $\alpha$  по окружности наименьшего радиуса.

2 √7

6. Для любого натурального  $n$  и для любого набора чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  из отрезка  $[0; 3]$  уравнение

$$\sum_{i=1}^n |x - x_i| = an$$

имеет решение  $x$ , принадлежащее отрезку  $[0; 3]$ . Укажите, какие из следующих значений  $a$  удовлетворяют этому условию: а)  $a = 0$ ; б)  $a = \frac{3}{2}$ ; в)  $a = 2$ .

Tanya = a  
3 = z

7. Каков минимальный объём пирамиды, у которой в основании лежит правильный треугольник со стороной 6, а все плоские углы при вершине равны между собой и не превосходят  $2 \arcsin \frac{1}{3}$ ?

5 √23

8. Маша, скучая на уроке математики, проделала с некоторым 2015-значным натуральным числом следующую операцию: от десятичной записи этого числа она отбросила последнюю цифру и к умноженному на 3 получившемуся числу прибавила удвоенную отброшенную цифру. С полученным числом она опять проделала ту же операцию и так далее. После многократного применения этой операции получающиеся у Маши числа перестали меняться, и тогда она остановилась.

- а) Какое число оказалось у Маши в конце?
- б) Какое наименьшее число могло быть у Маши в самом начале (укажите две его последние цифры)?

а) 17; б) 60 (или 100...00)