

ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 18 марта 2012 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

баллы задачи

- 4 1. В ряд лежит четное число групп. Массы любых двух соседних групп отличаются не более, чем на 1 г. Докажите, что можно все группы разложить по две в одинаковые пакеты и выложить пакеты в ряд так, чтобы массы любых двух соседних пакетов тоже отличались не более, чем на 1 г.

А. В. Шаповалов

- 4 2. На плоскости отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Саша разбивает точки на пары и соединяет точки в каждой паре отрезком. Всегда ли он может сделать это так, чтобы каждые два отрезка пересекались?

А. В. Шаповалов

- 6 3. В бригаде сторожей у каждого есть разряд (натуральное число). Сторож N -го разряда N суток дежурит, потом N суток спит, снова N суток дежурит, N — спит, и так далее. Известно, что разряды любых двух сторожей различаются хотя бы в три раза. Может ли такая бригада осуществлять ежедневное дежурство? (Приступить к дежурству сторожа могут не обязательно одновременно, в один день могут дежурить несколько сторожей.)

А. С. Бердников

- 6 4. В клетках таблицы $n \times n$ стоят знаки «+» и «-». За ход разрешается в любой строке или в любом столбце изменить все знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно за сколько-то ходов сделать все знаки в таблице плюсами. Докажите, что этого можно добиться, сделав не более n ходов.

А. Я. Канель-Белов

- 8 5. Пусть p — простое число. Набор из $p + 2$ натуральных чисел (не обязательно различных) назовем «интересным», если сумма любых p из них делится на каждое из двух оставшихся чисел. Найдите все «интересные» наборы.

А. А. Полянский

- 8 6. Банк обслуживает миллион клиентов, список которых известен Остапу Бендеру. У каждого клиента есть свой PIN-код из шести цифр, у разных клиентов коды разные. Остап Бендер за один ход может выбрать любого клиента, которого он еще не выбирал, и подсмотреть у него цифры кода на любых N позициях (у разных клиентов он может выбирать разные позиции). Остап хочет узнать код миллионера Корейко. При каком наименьшем N он гарантированно сможет это сделать?

Г. К. Жуков

- 8 7. В равностороннем треугольнике ABC провели высоту $АН$. В треугольнике ABH отметили точку пересечения биссектрис I . В каждом из треугольников ABI , BCI и CAI отметили по точке пересечения биссектрис — L , K и J соответственно. Найдите величину угла KJL .

К. Голубев

ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 18 марта 2012 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 4 1. В бригаде сторожей у каждого есть разряд (натуральное число). Сторож N -го разряда N суток дежурит, потом N суток спит, снова N суток дежурит, N — спит, и так далее. Известно, что разряды любых двух сторожей различаются хотя бы в три раза. Может ли такая бригада осуществлять ежедневное дежурство? (Приступить к дежурству сторожа могут не обязательно одновременно, в один день могут дежурить несколько сторожей.)
А. С. Бердников
- 5 2. Внутри круга отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что их можно разбить на пары и провести прямую через каждую пару так, чтобы все точки пересечения прямых лежали в круге.
А. В. Шаповалов
- 6 3. Докажите, что для любого натурального n существуют такие целые числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, что при всех целых x число $(\dots((x^2 + a_1)^2 + a_2)^2 + \dots + a_{n-1})^2 + a_n$ делится на $2n - 1$.
А. С. Бердников
- 6 4. Внутри каждой грани единичного куба выбрали по точке. Затем каждые две выбранные точки, лежащие на соседних гранях, соединили отрезком. Докажите, что сумма длин этих отрезков не меньше, чем $6\sqrt{2}$.
В. В. Произволов
- 8 5. Дан треугольник ABC и прямая l , касающаяся вписанной в него окружности. Обозначим через l_a, l_b, l_c прямые, симметричные l относительно биссектрис внешних углов треугольника. Докажите, что треугольник, образованный этими прямыми, равен треугольнику ABC .
А. А. Заславский
- 3 6. а) В бесконечной последовательности бумажных прямоугольников площадь n -го прямоугольника равна n^2 (для $n = 1, 2, 3, \dots$). Обязательно ли можно покрыть ими плоскость? Наложения допускаются.
- 6 б) Дана бесконечная последовательность бумажных квадратов. Обязательно ли можно покрыть ими плоскость (наложения допускаются), если известно, что для любого числа N найдутся квадраты суммарной площади больше N ?
А. С. Бердников
- 6 7. У Кости была кучка из 100 камешков. Каждым ходом он делил какую-то из кучек на две меньших, пока у него в итоге не оказалось 100 кучек по одному камешку. Докажите, что
- 3 а) в какой-то момент в каких-то 30 кучках было в сумме ровно 60 камешков;
- 3 б) в какой-то момент в каких-то 20 кучках было в сумме ровно 60 камешков;
- 3 в) Костя мог действовать так, чтобы ни в какой момент не нашлось 19 кучек, в которых в сумме ровно 60 камешков.

К. Кноп