

VI. Формулы половинного аргумента (знак – по функции в левой части):

$$1. \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad 2. \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$3. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

VII. Формулы сумм:

$$1. \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2. \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$3. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$4. \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$5. \operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$6. \operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}; \quad \alpha, \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

VIII. Формулы произведений:

$$1. \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$2. \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$3. \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

IX. Универсальная тригонометрическая подстановка:

$$1. \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad 2. \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

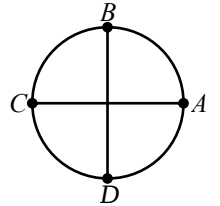
X. Некоторые дополнительные формулы:

$$1. a \sin \alpha + b \cos \alpha = A \sin(\alpha + \varphi), \quad \text{где } A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

$$2. \cos \alpha \pm \sin \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} \mp \alpha\right)$$

1. Считая числовую окружность образом беговой дорожки стадиона, отметьте на ней конец дистанции: а) 1500 м; б) 42 км 195 м.
2. Дана окружность радиуса 1 см. Чему равна длина: а) всей окружности; б) ее половины; в) ее четверти?

Горизонтальный диаметр CA и вертикальный диаметр DB разбивают единичную окружность на четыре четверти: AB – первая, BC – вторая, CD – третья, DA – четвертая. Опираясь на эту геометрическую модель, решите задачи № 3, 4, 5, 6, 7, 8.



3. Первая четверть разделена точкой M на две равные части, а точками K и P – на три равные части (точка P между M и B). Чему равна длина дуги: $AM, MB, AK, KP, PB, AP, KM$?
4. Вторая четверть разделена пополам точкой M , а третья четверть разделена на три равные части точками K и P (точка P между K и D). Чему равна длина дуги: $AM, BK, MP, DC, KA, BP, CB, BC$?
5. Вторая четверть разделена точкой M пополам, а четвертая четверть разделена на три равные части точками K и P (точка P между K и A). Чему равна длина дуги: AM, AK, AP, PB, MK, KM ?
6. Первая четверть разделена на две равные части точкой M , а четвертая четверть разделена на три равные части точками K и P (точка P между K и A). Чему равна длина дуги: $AM, BD, CK, MP, DM, MK, CP, PC$?
7. Третья четверть разделена точкой P в отношении 1 : 5. Чему равна длина дуги: CP, PD, AP ?
8. Первая четверть разделена точкой M в отношении 2 : 3. Чему равна длина дуги: AM, MB, DM, MC ?
9. Выразите в радианах:

1) 1° ;	4) 10° ;	7) 15° ;	10) 30° ;
2) 45° ;	5) 60° ;	8) 70° ;	11) 90° ;
3) 225° ;	6) 240° ;	9) 320° ;	12) 330° .
10. Переведите из градусной меры в радианную:

1) 120° ;	3) 220° ;	5) 300° ;	7) 765° ;
2) 210° ;	4) 150° ;	6) 315° ;	8) 675° .

11. Выразите в градусах:

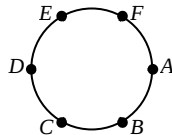
- 1) $\frac{\pi}{15}$; 4) $\frac{\pi}{12}$; 7) $\frac{\pi}{8}$; 10) $\frac{7\pi}{9}$;
 2) $\frac{2\pi}{3}$; 5) $\frac{11\pi}{6}$; 8) $1,5\pi$; 11) 3π ;
 3) $0,25\pi$; 6) $\frac{21}{4}\pi$; 9) $-\frac{31}{6}\pi$; 12) $\frac{101}{12}\pi$.

12. Переведите из радианной меры в градусную:

- 1) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{11\pi}{3}$; 5) $\frac{6\pi}{5}$; 7) $\frac{46\pi}{9}$;
 2) $\frac{5\pi}{8}$; 4) $\frac{7\pi}{12}$; 6) $\frac{11\pi}{12}$; 8) $\frac{47\pi}{9}$.

13. Окружность разделена на шесть равных частей. Выразить в градусах и радианах сумму дуг:

- 1) $\cup AECBF + \cup EAB + \cup DCB$;
 2) $\cup AFE + \cup EDC + \cup CD + \cup BD + \cup DCBA$.



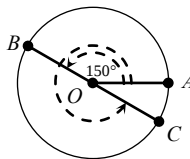
14. Угол A трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) на 70° меньше угла B и на 10° больше угла D . Найдите радианную меру каждого из углов трапеции.

15. Перечертите в тетрадь и заполните таблицу:

1°		3°		5°		9°		12°		18°		30°		45°		90°	
	$\frac{\pi}{90}$		$\frac{\pi}{45}$		$\frac{\pi}{30}$		$\frac{\pi}{18}$		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{9}$		$\frac{\pi}{5}$		$\frac{\pi}{3}$		π

16. Один из углов треугольника больше другого на 20° и меньше третьего на 50° . Найдите радианную меру каждого из углов этого треугольника.

17. Записать общий вид углов для случаев, когда конечный радиус их занимает положение: 1) OB ;
 2) OC и найти несколько частных значений этих углов.



18. В какой четверти находится конечная точка поворота на угол:

- 1) 220° ; 3) -160° ; 5) 906° ;
 2) 285° ; 4) -290° ; 6) 4825° ;

19. Представьте в виде $\alpha_0 + 360^\circ \cdot n$ ($\alpha_0 \in [0^\circ; 360^\circ)$, $n \in \mathbb{Z}$) углы:

- 1) 840° ; 3) -1700° ; 5) 3200° ; 7) -2450° ;
 2) 1200° ; 4) -3900° ; 6) 3500° ; 8) -3100° .

I. Основное тригонометрическое тождество и следствия из него:

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
 2. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$; $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
 3. $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$; $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
 4. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$; $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

II. Формулы (теоремы) сложения аргументов:

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
 3. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
 4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
 5. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$; $\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$
 6. $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$; $\alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

III. Формулы приведения:

- 1) функция меняется на кофункцию при переходе через вертикальную ось и не меняется при переходе через горизонтальную;
 2) перед приведенной функцией ставится знак приводимой функции, считая α углом первой четверти.

IV. Формулы двойного аргумента:

1. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, отсюда $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$
 2. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
 3. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ 4. $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$

V. Формулы понижения степени:

1. $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ 3. $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$
 2. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ 4. $\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$

128. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит один из его катетов на отрезки 3 см и 4 см. Вычислите косинусы острых углов треугольника.

129. В квадрат со стороной a вписан другой квадрат так, что вершины второго квадрата лежат на сторонах первого, а сторона второго квадрата образует угол α со сторонами первого. Найдите сторону вписанного квадрата.

130. Пусть α , β и γ – углы некоторого треугольника. Докажите, что для них выполняются следующие соотношения:

$$1) \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2};$$

$$2) \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma;$$

$$3) \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2};$$

$$4) \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma;$$

$$5) \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma;$$

$$6) \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma;$$

$$7) \sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2};$$

$$8) \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = -1 + 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2};$$

$$9) \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma;$$

$$10) \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma = \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma;$$

$$11) \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma = 1;$$

$$12) \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \beta \cdot \operatorname{ctg} \gamma = 1;$$

$$13) \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma;$$

$$14) \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma;$$

$$15) \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma;$$

$$16) \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma;$$

$$17) \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma = 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma.$$

20. Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу:

$$1) \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{7\pi}{2}, 9\pi, -\frac{3\pi}{2};$$

$$2) \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}.$$

21. Отметьте на координатной окружности точки, соответствующие числам:

$$1) \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \pi, 3\pi; \quad 2) -\frac{9\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, -\frac{17\pi}{4}.$$

22. Какой четверти числовой окружности принадлежит число:

$$1) \frac{19\pi}{4}; \quad 2) -\frac{37\pi}{6}; \quad 3) 100?$$

23. Запишите три числа, которые изображаются на окружности той же точкой, что и $\frac{17\pi}{3}$.

24. Часы отстают на 18 минут. На какой угол надо повернуть минутную стрелку, чтобы часы показывали верное время?

25. Переведите углы из градусной меры в радианную:

$$1) 36^\circ; \quad 3) -120^\circ; \quad 5) 870^\circ; \quad 7) -2510^\circ; \\ 2) 265^\circ; \quad 4) -135^\circ; \quad 6) 1020^\circ; \quad 8) -2940^\circ.$$

26. Найдите радианную меру дуг:

$$1) 18^\circ; \quad 3) -252^\circ; \quad 5) 1530^\circ; \\ 2) 324^\circ; \quad 4) 828^\circ; \quad 6) -2490^\circ.$$

27. Чему равна градусная мера углов:

$$1) \frac{3\pi}{10}; \quad 3) \frac{5\pi}{6}; \quad 5) -\frac{11\pi}{15}; \quad 7) \frac{35\pi}{18}; \\ 2) \frac{19\pi}{16}; \quad 4) \frac{7\pi}{4}; \quad 6) -\frac{17\pi}{12}; \quad 8) \frac{13\pi}{45}?$$

28. Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна:

$$1) \frac{23\pi}{12}; \quad 3) \frac{3\pi}{8}; \quad 5) -\frac{11\pi}{9}; \\ 2) \frac{7\pi}{3}; \quad 4) \frac{9\pi}{5}; \quad 6) -\frac{13\pi}{6}.$$

29. Найдите на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу:

- 1) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$; -2π ;
2) π ; $\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{2\pi}{3}$; 4) 2π ; $\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{4}$.

30. На числовой окружности укажите точку, соответствующую числу:

- 1) 7π ; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{25\pi}{4}$; 3) 10π ; $\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{26\pi}{3}$;
2) 4π ; $\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{25\pi}{6}$; 4) 3π ; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{16\pi}{3}$.

31. Какой четверти числовой окружности принадлежит точка, соответствующая числу:

- 1) 6,1; 4) 2,8; 7) 4,8; 10) 31;
2) 5,4; 5) 3,2; 8) 1,4; 11) -17;
3) -4,3; 6) -5,1; 9) -2,8; 12) -95?

32. Какой четверти принадлежат точки:

- 1) $\frac{7\pi}{3}$; 3) $\frac{17\pi}{5}$; 5) 4,3; 7) 20;
2) $\frac{19\pi}{4}$; 4) $-\frac{8\pi}{7}$; 6) -3,3; 8) -100?

33. Как расположены на числовой окружности точки, соответствующие числам:

- 1) t и $-t$; 3) t и $t + \pi$;
2) t и $t + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $t - \pi$ и $t + \pi$?

34. Ведро в колоде поднимается на 2 м, если рукоятка ворота повернута на пять полных оборотов по часовой стрелке. На какой угол надо повернуть рукоятку ворота, чтобы ведро: 1) поднялось на 1,5 м? 2) опустилось на 1,25 м?

35. Вычислите:

- 1) $2\sin 30^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ$;
2) $\operatorname{tg} 60^\circ + 2\cos 45^\circ - \sqrt{3}\operatorname{ctg} 45^\circ$;
3) $6\cos 30^\circ - 3\operatorname{tg} 60^\circ + 2\sin 45^\circ$;
4) $\sqrt{3}\operatorname{tg} 30^\circ + 4\sin 30^\circ - \sqrt{3}\operatorname{ctg} 30^\circ$;
5) $\sqrt{3}\sin \frac{\pi}{3} - 2\cos \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$;

122. Замените произведение тригонометрических функций суммой:

- 1) $\cos 52^\circ \cos 22^\circ$; 5) $\cos 50^\circ \cos 58^\circ$;
2) $2\sin 52^\circ \cos 8^\circ$; 6) $\sin 31^\circ \cos 41^\circ$;
3) $\sin 52^\circ \sin 7^\circ$; 7) $2\sin 24^\circ \sin 44^\circ$;
4) $2\cos \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{4}$; 8) $2\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{14}$.

123. Упростите выражения:

- 1) $\cos 3\alpha \cos \alpha - \cos 7\alpha \cos 5\alpha$; 3) $\sin 4\beta \cos 3\beta - \sin 5\beta \cos 2\beta$;
2) $\cos 3\alpha \cos \alpha - \sin 3\alpha \sin \alpha$; 4) $\sin 4\beta \cos 3\beta - \cos 4\beta \sin 3\beta$.

124. Преобразуйте выражения:

- 1) $\cos 7\varphi \cos 3\varphi + \sin 8\varphi \sin 2\varphi$; 2) $\cos 7\varphi \cos 3\varphi + \sin 7\varphi \sin 3\varphi$.

125. Проверьте равенства:

- 1) $\cos 50^\circ + 2\sin 40^\circ \sin 10^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $2\cos 40^\circ \cos 10^\circ - \cos 50^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
2) $2\sin 25^\circ \cos 5^\circ - \sin 20^\circ = \frac{1}{2}$; 5) $\sin 20^\circ + 2\cos 25^\circ \sin 5^\circ = \frac{1}{2}$;
3) $\sin 5\alpha - 2\cos 4\alpha \sin \alpha = \sin 3\alpha$; 6) $\cos 3\alpha - 2\sin 2\alpha \sin 5\alpha = \cos 7\alpha$.

126. Вычислите:

- 1) $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 75^\circ$; 5) $\sin^4 \frac{3\pi}{8} - \cos^4 \frac{3\pi}{8}$;
2) $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cos 2$; 6) $\sin^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8}$;
3) $\operatorname{tg} 41^\circ \operatorname{tg} 43^\circ \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 47^\circ \operatorname{tg} 49^\circ$; 7) $\sin^6 \frac{3\pi}{8} + \cos^6 \frac{3\pi}{8}$;
4) $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ$; 8) $\cos^8 \frac{\pi}{8} - \sin^8 \frac{\pi}{8}$.

127. Вычислите значение выражения $\frac{\cos 11\alpha + 3\cos 9\alpha + 3\cos 7\alpha + \cos 5\alpha}{\cos 8\alpha}$, если $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

116. Докажите тождество:

$$\frac{\cos^2 3x + \cos^2 4x - \sin^2 5x - \sin^2 6x}{\sin^2 3x - \sin^2 5x + \sin^2 4x - \sin^2 6x} = -\operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg} 9x.$$

117. Упростите выражение:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{\sin 5\gamma + \sin 3\gamma}{\sin 5\gamma - \sin 3\gamma}; & 5) \frac{\sin 7\alpha + \sin 5\alpha + \sin 3\alpha}{\cos 7\alpha + \cos 5\alpha + \cos 3\alpha}; \\ 2) \frac{\cos 2\alpha - \cos 8\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 8\alpha}; & 6) \frac{\cos 6\alpha - \cos 4\alpha + \cos 2\alpha - \cos 8\alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha}; \\ 3) \frac{\sin x - \sin 2x}{\cos x - \cos 2x}; & 7) \frac{\sin \alpha + 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos \alpha}; \\ 4) \frac{2\sin^2 \alpha - \sin \alpha}{\sin 2\alpha - \cos \alpha}; & 8) \frac{\cos \alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha + \sin \alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}. \end{array}$$

118. Вычислите:

$$\begin{array}{l} 1) \cos 95^\circ + \cos 94^\circ + \cos 93^\circ + \cos 85^\circ + \cos 86^\circ + \cos 87^\circ; \\ 2) \operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ; \\ 3) \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}. \end{array}$$

119. Преобразуйте выражение:

$$\frac{\sin 8\alpha + \sin 9\alpha + \sin 10\alpha + \sin 11\alpha}{\cos 8\alpha + \cos 9\alpha + \cos 10\alpha + \cos 11\alpha} \cdot \frac{\cos 8\alpha - \cos 9\alpha - \cos 10\alpha + \cos 11\alpha}{\sin 8\alpha - \sin 9\alpha - \sin 10\alpha + \sin 11\alpha}.$$

120. Тангенсы двух углов треугольника равны соответственно 1,5 и 5. Найдите третий угол треугольника.

121. Преобразуйте произведение в сумму:

$$\begin{array}{ll} 1) \sin 42^\circ \cos 12^\circ; & 5) \cos 23^\circ \cos 27^\circ; \\ 2) \cos 42^\circ \cos 18^\circ; & 6) 2 \sin 18^\circ \sin 22^\circ; \\ 3) 2 \sin 42^\circ \sin 3^\circ; & 7) \sin 40^\circ \cos 56^\circ; \\ 4) 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{10}; & 8) 2 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{3\pi}{10}. \end{array}$$

$$6) 2 \cos \frac{\pi}{3} + 2 \sin \frac{\pi}{6} - 2 \sin \frac{\pi}{4};$$

$$7) \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} + 2 \sin \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6};$$

$$8) \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} - 2 \sin \frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6};$$

$$9) 2 \sin \pi - \cos 0 + \operatorname{tg} 0 + 3 \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{3};$$

$$10) 5 \sin 90^\circ + 2 \cos 0^\circ - 2 \sin 270^\circ + 10 \cos 180^\circ.$$

36. Найдите значение выражения:

$$1) 4 \cos 60^\circ + 2 \sin 45^\circ - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} 30^\circ;$$

$$2) \sqrt{2} \cos 45^\circ - 3\sqrt{3} \operatorname{tg} 60^\circ + 6 \cos 30^\circ;$$

$$3) 2 \cos \frac{\pi}{6} - 4 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + 2 \sin \frac{\pi}{6};$$

$$4) 4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - 2 \cos \frac{\pi}{3} - 2 \sin \frac{\pi}{6};$$

$$5) 3 \sin \frac{\pi}{2} + \cos 2\pi - 4 \operatorname{tg} 0 + \sin \pi + \cos \frac{\pi}{2};$$

$$6) 4 \cos 180^\circ - 3 \sin 270^\circ + 3 \sin 360^\circ - \operatorname{ctg} 90^\circ.$$

37. (Устно). Существуют ли числа α , β и γ , для которых:

$$1) \sin \alpha = -0,5, \quad \cos \beta = \sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} \gamma = -2,5;$$

$$2) \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \cos \beta = -2,2, \quad \operatorname{tg} \gamma = 0,31;$$

$$3) \sin \alpha = 1,3, \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{4}, \quad \operatorname{tg} \gamma = 5,2?$$

38. Оцените выражение, т.е. укажите его наименьшее и наибольшее значение:

$$\begin{array}{lll} 1) 1 + 2 \sin \alpha; & 4) 2 \sin x + 3; & 7) 1 - 4 \cos^2 x; \\ 2) 4 \sin \alpha + 1; & 5) 2 \cos^2 \alpha; & 8) 4 + \cos(\alpha - 15^\circ); \\ 3) 1 - 3 \cos \alpha; & 6) 5 + 2 \cos^2 x; & 9) 2 - \sin(\alpha - \beta). \end{array}$$

39. Найти наибольшее и наименьшее значение выражения:

$$\begin{array}{lll} 1) 3 \sin x - 1; & 3) 2 \cos x - 3; & 5) 10 - 9 \sin^2 x; \\ 2) 2 + 3 \cos x; & 4) 5 - 4 \sin x; & 6) \sin^2 x - 5. \end{array}$$

40. Определить, в какой четверти находится конечная точка поворота на угол α и каковы знаки $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$, если угол равен:

- 1) 260° ; 3) 565° ; 5) -915° ; 7) 8760° ;
2) 290° ; 4) 480° ; 6) -825° ; 8) 8000° .

41. Определить знак каждого из данных произведений:

- 1) $\sin 100^\circ \cdot \sin 132^\circ$; 5) $\operatorname{ctg} 300^\circ \cdot \sin 222^\circ$;
2) $\cos 210^\circ \cdot \sin 115^\circ$; 6) $\sin 118^\circ \cdot \cos 118^\circ \cdot \operatorname{tg} 118^\circ$;
3) $\cos 285^\circ \cdot \cos 316^\circ$; 7) $\sin 2,1 \cdot \operatorname{ctg} 2,1 \cdot \cos 2,1$;
4) $\operatorname{tg} 112^\circ \cdot \sin 165^\circ$; 8) $\cos 123^\circ \cdot \operatorname{tg} 123^\circ \cdot \sin 312^\circ$.

42. Какой знак имеет произведение $\sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi$, если число φ равно:

- 1) 4,1; 2) -240° ; 3) $\frac{7\pi}{6}$?

43. Вычислите:

- 1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;
2) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;
3) $\sin(-\pi)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

44. Найдите значение выражения:

- 1) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;
2) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;
3) $\cos(-2\pi)+\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}(-\pi)$.

45. Найдите значение:

- 1) $\cos 2550^\circ$; 5) $\sin(-4005^\circ)$; 9) $\cos(-2220^\circ)$;
2) $\operatorname{tg} 2205^\circ$; 6) $\operatorname{tg} 3630^\circ$; 10) $\sin(-3555^\circ)$;
3) $\sin 3300^\circ$; 7) $\operatorname{ctg} 2100^\circ$; 11) $\operatorname{tg}(-2460^\circ)$;
4) $\operatorname{ctg} 2130^\circ$; 8) $\cos(-3210^\circ)$; 12) $\operatorname{ctg}(-2115^\circ)$.

46. Вычислите:

- 1) $\sin 2580^\circ$; 3) $\operatorname{tg}(-2835^\circ)$; 5) $\operatorname{ctg}(-2565^\circ)$;
2) $\operatorname{ctg} 2190^\circ$; 4) $\sin 2490^\circ$; 6) $\cos(-2820^\circ)$.

109. Вычислите:

$$\sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}.$$

110. Известно, что $\sin \alpha = \frac{336}{625}$, где $\frac{5\pi}{4} < \alpha < 3\pi$. Вычислите $\sin \frac{\alpha}{4}$.

111. Вычислите $\sin \frac{\pi}{8} = \sin 22,5^\circ$.

112. В равнобедренном треугольнике косинус угла при вершине равен $\frac{5}{13}$. Найдите синус угла при основании.

113. Преобразуйте сумму в произведение и упростите результат, если это возможно:

- 1) $\sin 50^\circ + \sin 20^\circ$; 4) $\cos 160^\circ + \cos 80^\circ$; 7) $\cos 3\alpha - \cos 5\alpha$;
2) $\cos 28^\circ - \cos 12^\circ$; 5) $\sin 83^\circ - \sin 23^\circ$; 8) $\sin 10^\circ + \cos 40^\circ$;
3) $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5}$; 6) $\sin \frac{\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12}$; 9) $\sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{12}$.

114. Замените сумму произведением:

- 1) $\cos 40^\circ - \cos 10^\circ$; 4) $\cos 37^\circ + \cos 23^\circ$; 7) $\cos 20^\circ - \cos 70^\circ$;
2) $\sin 42^\circ - \sin 26^\circ$; 5) $\sin 130^\circ + \sin 110^\circ$; 8) $\sin \beta - \sin 3\beta$;
3) $\sin \frac{5\pi}{24} + \sin \frac{7\pi}{24}$; 6) $\sin \frac{\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12}$; 9) $\cos \frac{\pi}{8} - \cos \frac{\pi}{10}$.

115. Упростите выражение:

- 1) $\frac{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$; 5) $\frac{\sin 3\alpha + \sin 7\alpha + \sin 11\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 7\alpha + \cos 11\alpha}$;
2) $\frac{\cos x - \cos 3x}{\sin x + \sin 3x}$; 6) $\frac{\cos 4\alpha - \cos 6\alpha - \cos 10\alpha + \cos 8\alpha}{\cos 8\alpha - \cos 6\alpha}$;
3) $\frac{\sin 2\beta - \sin 3\beta}{\cos 2\beta - \cos 3\beta}$; 7) $\frac{\cos \alpha - 2\sin 3\alpha - \cos 5\alpha}{\sin 5\alpha - 2\cos 3\alpha - \sin \alpha}$;
4) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{\cos \alpha + 2\cos^2 \alpha}$; 8) $\frac{\sin 3\alpha + \sin 4\alpha + \sin \alpha + \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 3\alpha}$.

99. Упростите выражения:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; & 3) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha}; & 5) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}; \\ 2) \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; & 4) \frac{\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha}; & 6) \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha}. \end{array}$$

100. Преобразуйте следующие выражения:

$$\begin{array}{ll} 1) \sin^2 \alpha \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha \right) \left(1 - \frac{1}{\cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \right); & \\ 2) \frac{\cos^2 2\alpha - 4 \cos^2 \alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 4 \cos^2 \alpha - 1}; & 3) \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha - 6}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 2}. \end{array}$$

101. Вычислите без помощи калькулятора или таблиц:

$$1) (\operatorname{tg} 255^\circ - \operatorname{tg} 555^\circ)(\operatorname{tg} 795^\circ + \operatorname{tg} 195^\circ); \quad 2) \frac{\operatorname{tg} 615^\circ - \operatorname{tg} 555^\circ}{\operatorname{tg} 795^\circ + \operatorname{tg} 735^\circ}.$$

Вычислите:

102. $\sin \left(2\alpha + \frac{5\pi}{4} \right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$.

103. $\cos \left(2\alpha + \frac{7\pi}{4} \right)$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{3}$.

104. $\operatorname{tg} (4x - y)$, если $\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} y = \frac{1}{239}$.

105. $(\sin 4\alpha + 2 \sin 2\alpha) \cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

106. Упростите выражение $\cos^2 \left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha \right) - \cos^2 \left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha \right)$.

107. Найдите значение выражения:

$$1) \sin^2 \frac{\pi}{13} + \sin^2 \frac{11\pi}{26}; \quad 2) \cos^2 \frac{3\pi}{34} + \cos^2 \frac{7\pi}{17}.$$

108. Без помощи таблиц или калькулятора вычислите:

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}.$$

47. Определите:

$$\begin{array}{lll} 1) \sin \frac{37\pi}{6}; & 5) \cos \frac{13\pi}{3}; & 9) \cos \left(-\frac{11\pi}{3} \right); \\ 2) \operatorname{tg} \left(-\frac{37\pi}{3} \right); & 6) \operatorname{tg} \frac{31\pi}{6}; & 10) \operatorname{ctg} \frac{49\pi}{4}; \\ 3) \operatorname{ctg} \frac{47\pi}{4}; & 7) \sin \left(-\frac{23\pi}{6} \right); & 11) \sin \left(-\frac{49\pi}{6} \right); \\ 4) \cos \frac{17\pi}{4}; & 8) \operatorname{ctg} \frac{26\pi}{3}; & 12) \operatorname{tg} \left(-\frac{27\pi}{4} \right). \end{array}$$

48. Вычислите:

$$\begin{array}{lll} 1) \cos \frac{19\pi}{3}; & 3) \operatorname{ctg} \left(-\frac{10\pi}{3} \right); & 5) \sin \frac{35\pi}{3}; \\ 2) \sin \left(-\frac{23\pi}{4} \right); & 4) \cos \frac{59\pi}{6}; & 6) \operatorname{tg} \left(-\frac{17\pi}{3} \right). \end{array}$$

49. С помощью тригонометрической окружности решите уравнения:

$$\begin{array}{lll} 1) \sin 6x = \frac{1}{2}; & 3) \cos \frac{x}{5} = -\frac{1}{2}; & 5) \sin \frac{x}{3} = 0; \\ 2) \sin \frac{3x}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; & 4) \cos \frac{4x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; & 6) \cos 3x = -1. \end{array}$$

50. Используя единичную окружность, решите уравнения:

$$\begin{array}{lll} 1) \sin \frac{x}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}; & 3) \cos 6x = \frac{1}{2}; & 5) \sin 3x = 1; \\ 2) \sin \frac{2x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; & 4) \cos \frac{x}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}; & 6) \cos \frac{4x}{5} = 0. \end{array}$$

51. Найдите значения тригонометрических функций угла α , если известно, что:

$$\begin{array}{ll} 1) \sin \alpha = \frac{5}{13}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; & 3) \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \\ 2) \cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi; & 4) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{12}{5}, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}. \end{array}$$

52. По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций:

$$1) \cos \alpha = -0,6, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}; \quad 2) \sin \alpha = \frac{8}{17}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

53. Упростите выражения (предпочтительно устно):

- | | |
|---|--|
| 1) $4\cos^2 3\alpha + 4\sin^2 3\alpha$; | 2) $2\sin^2 5\alpha + 2\cos^2 5\alpha$; |
| 3) $1 - \sin^2 3x$; | 4) $1 - \cos^2 4\beta$; |
| 5) $\sin^2 7y - 1$; | 6) $\cos^2 3t - 1$; |
| 7) $2\sin^2 t - 1$; | 8) $1 - 2\cos^2 3\gamma$; |
| 9) $\operatorname{tg} 3\beta \operatorname{ctg} 3\beta$; | 10) $\operatorname{ctg} 1,1 \cdot \operatorname{tg} 1,1$; |
| 11) $\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha$; | 12) $\sin 2\varphi \operatorname{ctg} 2\varphi$; |
| 13) $\operatorname{ctg}^2 \varphi \sin^2 \varphi$; | 14) $\operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \alpha$; |
| 15) $\operatorname{tg} \gamma \cos \gamma \sin \gamma$; | 16) $\sin 2\alpha \cos 2\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha$; |
| 17) $(1 - \cos 3\beta)(1 + \cos 3\beta)$; | 18) $(1 - \sin 2\varphi)(1 + \sin 2\varphi)$; |
| 19) $(\sin t + 1)(\sin t - 1)$; | 20) $(\cos 5\alpha - 1)(1 + \cos 5\alpha)$; |
| 21) $\sin^2 \gamma \cos^2 \gamma + \cos^4 \gamma$; | 22) $\sin^4 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$; |
| 23) $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$; | |
| 24) $(3\sin t + 4 \cos t)^2 + (4\sin t - 3 \cos t)^2$. | |

54. Преобразуйте следующие выражения:

- | | |
|---|--|
| 1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$; | 13) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha$; |
| 2) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x - \cos^2 3\alpha$; | 14) $\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha$; |
| 3) $\operatorname{tg}^2 5\beta + \operatorname{tg} t \operatorname{ctg} t$; | 15) $\sin^4 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \beta + \cos^2 \beta$; |
| 4) $(1 - \sin^2 3\alpha) \operatorname{tg}^2 3\alpha$; | 16) $\operatorname{tg}^2 \varphi - \sin^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi \sin^2 \varphi$; |
| 5) $\operatorname{ctg}^2 \beta (\cos^2 \beta - 1) + 1$; | 17) $(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha$; |
| 6) $1 + \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma$; | 18) $\operatorname{ctg}^2 y (1 - \cos y)(1 + \cos y)$; |
| 7) $1 - \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha$; | 19) $(\operatorname{tg} x - 1)^2 - \frac{1}{\cos^2 x}$; |
| 8) $(\operatorname{tg} \beta \cos \beta)^2 + (\operatorname{ctg} \beta \sin \beta)^2$; | 20) $\frac{1}{\sin^2 x} - (\operatorname{ctg} x + 1)^2$; |
| 9) $2 - \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \varphi - \cos^2 \varphi$; | 21) $\frac{1 - \cos^2 7y}{\cos^2 7y}$; |
| 10) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha$; | 22) $\frac{1 - \sin^2 7\alpha}{1 - \cos^2 7\alpha} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{9} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{9}$; |
| 11) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sin^2 3\gamma}$; | 23) $\frac{\sin^2 x}{\cos 0 + \cos x}$; |
| 12) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$; | 24) $\operatorname{tg} \gamma \frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \gamma - 1}$. |

95. Упростите выражения:

- | | |
|---|---|
| 1) $0,5 \sin 2\beta \operatorname{ctg} \beta$; | 5) $\cos^2 2x - 4 \sin^2 x \cos^2 x$; |
| 2) $2 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha$; | 6) $2\sin^2 4\alpha + \cos 8\alpha + 1$; |
| 3) $\cos^2 4\beta - \cos 8\beta$; | 7) $4 \sin^4 x + \sin^2 2x$. |

96. Преобразуйте выражение:

- | | |
|---|--|
| 1) $\sin 2t \operatorname{ctg} t - 1$; | 7) $\operatorname{ctg} \beta (1 - \cos 2\beta)$; |
| 2) $\frac{\sin^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha}{\sin 2\alpha}$; | 8) $\frac{1 + \sin 2x}{(\sin x + \cos x)^2}$; |
| 3) $\frac{\cos 2t - \cos^2 t}{1 - \cos^2 t}$; | 9) $(\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t) \sin 2t$; |
| 4) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{2 \cos \alpha}$; | 10) $\frac{2}{\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t}$; |
| 5) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha}$; | 11) $\frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x}$; |
| 6) $\frac{\sin 2\beta}{1 + \cos 2\beta}$; | 12) $\left(\frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta} + \frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta} \right) \sin 2\beta$. |

97. Выполните преобразование:

- | | |
|---|--|
| 1) $\frac{2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$; | 5) $\operatorname{tg} \alpha (1 + \cos 2\alpha)$; |
| 2) $\frac{\sin 2t - 2 \sin t}{\cos t - 1}$; | 6) $\frac{(\sin \beta + \cos \beta)^2}{1 + \sin 2\beta}$; |
| 3) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$; | 7) $\frac{2}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t}$; |
| 4) $\frac{1 + \cos 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi}$; | 8) $\left(\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \right) \sin 2\alpha$. |

98. Вычислите:

- $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \times \dots \times \operatorname{tg} 87^\circ \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ$;
- $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cdot \cos 2$.

(Указание: представьте $3 = 2 + 1$, $1 = 2 - 1$, $4 = 2 \cdot 2$, $2 = 2 \cdot 1$).

87. Применить формулы двойного угла к следующим выражениям:

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $\sin 80^\circ$; | 5) $\cos 46^\circ$; | 9) $\operatorname{tg} 72^\circ$; |
| 2) $\sin 4\varphi$; | 6) $\cos 6\beta$; | 10) $\operatorname{tg} 8\gamma$; |
| 3) $\sin 15\gamma$; | 7) $\cos 13x$; | 11) $\operatorname{tg} 11\varphi$; |
| 4) $\frac{\sin 66^\circ}{2\sin 33^\circ}$; | 8) $\frac{\cos 20^\circ}{\sin 10^\circ + \cos 10^\circ}$; | 12) $\frac{2\operatorname{tg} 70^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 70^\circ}$. |

88. Применить формулы двойного угла к следующим выражениям:

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\sin 42^\circ$; | 4) $\cos 38^\circ$; | 7) $\operatorname{tg} 54^\circ$; |
| 2) $\sin 10\alpha$; | 5) $\cos 12\beta$; | 8) $\operatorname{tg} 14\gamma$; |
| 3) $\frac{\sin 50^\circ}{\cos 25^\circ}$; | 6) $\frac{\cos 18^\circ - \sin 18^\circ}{\cos 36^\circ}$; | 9) $\frac{2\operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 10^\circ}$. |

Вычислите:

89. а) $\sin 15^\circ$; б) $\cos 75^\circ$.

90. а) $\cos 15^\circ$; б) $\sin 75^\circ$.

91. 1) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$;

2) $\sin \frac{7\pi}{18} \sin \frac{5\pi}{18} \sin \frac{\pi}{18}$;

3) $\cos \frac{\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11} \cos \frac{3\pi}{11} \cos \frac{4\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11}$.

92. Дано: $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

93. Дано: $\cos \alpha = \frac{15}{17}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

94. Упростите выражения:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1) $2 \cos^2 x \operatorname{tg} x$; | 5) $8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos 4\alpha$; |
| 2) $\cos 6\gamma + \sin^2 3\gamma$; | 6) $1 + 2\cos^2 t - \cos 2t$; |
| 3) $\cos 2\beta - 2 \cos^2 \beta$; | 7) $4 \sin^4 x + \sin^2 2x$; |
| 4) $1 + \cos 2\alpha$; | 8) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$. |

55. Упростите выражения:

- | | |
|--|--|
| 1) $\sin^2 x - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha$; | 10) $\sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha$; |
| 2) $\sin^2 4\alpha + \operatorname{tg}^2 \varphi + \cos^2 4\alpha$; | 11) $\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x$; |
| 3) $\operatorname{tg} 3 \operatorname{ctg} 3 + \operatorname{ctg}^2 x$; | 12) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$; |
| 4) $7 - 4\sin^2 \beta - 4\cos^2 \beta$; | 13) $\cos^2 t + \operatorname{ctg}^2 t \cos^2 t - \operatorname{ctg}^2 t$; |
| 5) $\cos \varphi \operatorname{ctg} \varphi \sin \varphi - 1$; | 14) $(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha$; |
| 6) $\left(\frac{1}{\cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \right) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right)$; | 15) $\frac{\sin^2 \beta}{1 - \sin^2 \beta} \operatorname{ctg}^2 \beta$; |
| 7) $\frac{1}{\cos^2 2t} - \operatorname{tg}^2 2t$; | 16) $\frac{1 - \cos^2 3x}{1 - \sin^2 3x}$; |
| 8) $\frac{1}{\sin^2 3x} - \operatorname{ctg}^2 3x - \sin^2 \alpha$; | 17) $\frac{\cos^2 5\alpha}{2 \cos \frac{\pi}{3} - \sin 5\alpha}$; |
| 9) $1 - \frac{1}{\sin^2 2x}$; | 18) $\frac{\cos^2 x - \cos^2 0}{\sin^2 x - \sin^2 \frac{\pi}{2}}$. |

56. Преобразуйте выражения:

- | | |
|---|--|
| 1) $\operatorname{ctg} t - \frac{\cos t - 1}{\sin t}$; | 7) $(\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg} \alpha$; |
| 2) $\frac{\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\sin^2 \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha$; | 8) $\frac{(\sin 2x + \cos 2x)^2 - 1}{2 \sin 2x \operatorname{ctg} 2x}$; |
| 3) $\sin x + \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$; | 9) $\sin t \cos t (\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)$; |
| 4) $\frac{(\sin t \operatorname{ctg} t)^2}{\sin^2 t - 1} + \cos^2 t$; | 10) $\sin t - \cos t (\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)$; |
| 5) $2 \sin \beta - \frac{\cos \beta - \cos^3 \beta}{\sin \beta \cos \beta}$; | 11) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$; |
| 6) $\frac{1 - 2 \cos^2 \varphi}{2 \sin^2 \varphi - 1} - \cos^2 \varphi$; | 12) $\frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}$. |

57. Замените выражение ему равным:

- | | |
|--|---|
| 1) $\cos^2 \alpha - (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1) \sin^2 \alpha$; | 7) $(\cos^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \operatorname{ctg} \alpha$; |
| 2) $\frac{1 + \sin x}{\cos x} - \operatorname{tg} x$; | 8) $\frac{1 - (\cos 3\alpha - \sin 3\alpha)^2}{2 \cos 3\alpha \operatorname{tg} 3\alpha}$; |
| 3) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}$; | 9) $\frac{\sin \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}$; |
| 4) $\frac{1 - 2 \sin^2 \gamma}{\sin \gamma - \cos \gamma} + \cos \gamma$; | 10) $\frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta} \cdot \frac{1 - \sin \beta}{\cos \beta}$; |
| 5) $\operatorname{ctg}^2 t - \frac{1 - 2 \cos^2 t}{1 - 2 \sin^2 t}$; | 11) $(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2$; |
| 6) $\frac{\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha - \sin^3 \alpha} - 1$; | 12) $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2$. |

58. Зная значение одной функции угла α , найдите значения остальных тригонометрических функций этого угла:

- | | |
|---|--|
| 1) $\cos \alpha = -\frac{5}{13}, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; | 2) $\sin \alpha = 0,6, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. |
|---|--|

59. Вычислите остальные три тригонометрические функции, если:

- | | |
|--|--|
| 1) $\sin \alpha = -\frac{9}{41}, \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; | 2) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{7}{24}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. |
|--|--|

60. Упростите выражения:

- | | |
|--|---|
| 1) $\frac{\operatorname{tg} \beta + 1}{1 + \operatorname{ctg} \beta}$; | 7) $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \operatorname{tg} \alpha$; |
| 2) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}$; | 8) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} + \sin \alpha$; |
| 3) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} \cdot \frac{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}$; | 9) $\frac{2 \sin^2 \varphi}{1 - \cos \varphi} - 2 \cos \varphi$; |
| 4) $\frac{(\sin t + \cos t)^2 - 1}{\operatorname{tg} t - \sin t \cos t}$; | 10) $\frac{1}{1 + \cos \alpha} + \frac{1}{1 - \cos \alpha}$; |
| 5) $\frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}$; | 11) $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$; |
| 6) $\frac{2 \sin x \cos x - \cos x}{1 - \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x}$; | 12) $\frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta} - \frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta}$. |

81. Тангенсы трех острых углов соответственно равны $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}$.
Докажите, что первый угол равен сумме двух других углов.

82. Синусы острых углов треугольника соответственно равны $\frac{20}{29}$ и $\frac{3}{5}$.
Найдите косинус внешнего угла треугольника, не смежного с двумя данными.

83. Вычислите:

- 1) $\operatorname{tg} 420^\circ + 2 \cos 870^\circ - 2 \cos 1410^\circ$;
- 2) $\operatorname{ctg} 585^\circ - 2 \cos 1080^\circ + \sqrt{2} \sin 1125^\circ$;
- 3) $3 \operatorname{tg} 930^\circ + \sin 1200^\circ - \cos 1770^\circ$.

84. Найдите значение выражения:

- 1) $3 \operatorname{tg} 570^\circ - 2 \cos 1350^\circ + 2 \sin 1200^\circ$;
- 2) $\operatorname{ctg} 510^\circ - 2 \cos 765^\circ - \sqrt{3} \operatorname{tg} 855^\circ$;
- 3) $2 \sin 750^\circ + \sin 1230^\circ + \operatorname{ctg} 1395^\circ$.

85. Преобразуйте в синус, косинус или тангенс некоторого угла выражение:

- | | |
|---|---|
| 1) $2 \sin \varphi \cos \varphi$; | 7) $\cos^2 70^\circ - \sin^2 70^\circ$; |
| 2) $2 \sin 12^\circ \cos 12^\circ$; | 8) $\cos^2 112,5^\circ - \sin^2 67,5^\circ$; |
| 3) $2 \cos 105^\circ \sin 105^\circ$; | 9) $\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$; |
| 4) $4 \sin \varphi \cos \varphi \cos 2\varphi$; | 10) $\sin^2 3x - \cos^2 3x$; |
| 5) $7 \sin \frac{x}{6} \cos \frac{x}{6} \cos \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3}$; | 11) $\cos^2 \frac{5\beta}{2} - \sin^2 \frac{5\beta}{2}$; |
| 6) $8 \cos 2x \cos 4x \cos 8x$; | 12) $\sin^2 \frac{3\pi}{8} - \cos^2 \frac{3\pi}{8}$. |

86. Упростите выражение:

- | | |
|--|--|
| 1) $2 \sin 2\varphi \cos 2\varphi$; | 5) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$; |
| 2) $2 \cos 72^\circ \sin 72^\circ$; | 6) $\cos^2 22,5^\circ - \sin^2 22,5^\circ$; |
| 3) $3 \sin \beta \cos \beta \cos 2\beta$; | 7) $\cos^2 5\alpha - \sin^2 5\alpha$; |
| 4) $16 \cos 3x \cos 6x \cos 12x$; | 8) $\sin^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{\pi}{12}$. |

77. Вычислите:

- 1) $\cos 73^\circ \sin 103^\circ + \cos 17^\circ \sin 13^\circ$; 6) $\cos 73^\circ \sin 107^\circ + \sin 73^\circ \sin 197^\circ$;
- 2) $\sin 170^\circ \cos 20^\circ + \sin 20^\circ \cos 350^\circ$; 7) $\cos 109^\circ \cos 49^\circ + \cos 41^\circ \sin 71^\circ$;
- 3) $\cos 118^\circ \cos 28^\circ - \cos 152^\circ \sin 28^\circ$; 8) $\sin 7^\circ \cos 217^\circ + \cos 7^\circ \cos 53^\circ$;
- 4) $\cos 5^\circ \cos 40^\circ - \sin 140^\circ \sin 175^\circ$; 9) $\sin 22^\circ \cos 203^\circ + \cos 22^\circ \cos 113^\circ$;
- 5) $\frac{\cos 34^\circ \cos 154^\circ + \sin 386^\circ \sin 34^\circ}{\sin 53^\circ \cos 8^\circ - \cos 53^\circ \sin 172^\circ}$; 10) $\frac{\cos 378^\circ \sin 27^\circ + \cos 27^\circ \sin 18^\circ}{\sin 158^\circ \sin 52^\circ + \cos 52^\circ \cos 22^\circ}$.

78. Найдите значение выражения:

- 1) $\sin 49^\circ \cos 11^\circ + \cos 229^\circ \cos 101^\circ$; 5) $\cos 11^\circ \sin 236^\circ - \sin 214^\circ \sin 11^\circ$;
- 2) $\sin 43^\circ \cos 13^\circ + \cos 103^\circ \sin 47^\circ$; 6) $\sin 175^\circ \cos 140^\circ - \sin 85^\circ \cos 50^\circ$;
- 3) $\frac{\sin 24^\circ \cos 6^\circ - \sin 6^\circ \sin 66^\circ}{\sin 21^\circ \cos 39^\circ - \cos 51^\circ \sin 69^\circ}$; 7) $\frac{\cos 54^\circ \cos 7^\circ - \cos 36^\circ \sin 7^\circ}{\sin 73^\circ \cos 44^\circ - \cos 73^\circ \cos 46^\circ}$;
- 4) $\frac{\operatorname{ctg} 78^\circ - \operatorname{ctg} 303^\circ}{1 + \operatorname{tg}(-192^\circ) \operatorname{ctg} 237^\circ}$; 8) $\frac{\operatorname{tg} 225^\circ - \operatorname{ctg} 81^\circ \operatorname{ctg} 69^\circ}{\operatorname{ctg} 261^\circ + \operatorname{tg} 201^\circ}$.

79. Упростите выражения:

- 1) $\cos(3\pi - \beta) + \operatorname{ctg}(3,5\pi - \beta) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right) \operatorname{ctg}(\pi + \beta)$;
- 2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \sin \alpha + \cos^2(3\pi + \alpha) + \operatorname{tg}(5\pi + \alpha) \operatorname{ctg} \alpha$;
- 3) $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)} - \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(2\pi - \beta) \cdot \operatorname{tg}(\pi + \alpha)}$.

80. Преобразуйте выражения:

- 1) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\pi + \alpha)$;
- 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right) \operatorname{ctg}(\pi - \beta) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \operatorname{tg}(2\pi + \beta)$;
- 3) $\frac{\cos(\pi + \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} - \frac{\cos(\pi - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(2\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$.

61. Преобразуйте выражения:

- 1) $\operatorname{ctg} \alpha + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$; 6) $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$;
- 2) $\frac{\cos \beta}{1 - \sin \beta} - \operatorname{tg} \beta$; 7) $\operatorname{tg} \gamma \frac{1 - \operatorname{ctg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \gamma}$;
- 3) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$; 8) $\frac{\operatorname{tg}^2 t}{\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t + 2}$;
- 4) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$; 9) $\frac{\operatorname{tg}^2 t + 1}{\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t + 2}$.
- 5) $\frac{\cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos \alpha (4 \sin \alpha + 1)}$;

62. Докажите тождество:

- 1) $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$;
- 2) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$;
- 3) $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = (1 + \sin \alpha)(1 + \operatorname{ctg} \alpha)$;
- 4) $(\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha)(\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) = (1 + \sin \alpha)(1 + \cos \alpha)$;
- 5) $\left(\frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}\right) : (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha - 1) = \sin \alpha + \cos \alpha$;
- 6) $\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right)^2 + \left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right)^2 = 7 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

63. Покажите, что при всех допустимых значениях углов значение выражения не зависит от величины угла:

- 1) $\sin^2 \alpha (2 + \operatorname{ctg} \alpha)(2 \operatorname{ctg} \alpha + 1) - 5 \sin \alpha \cos \alpha$;
- 2) $\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta$;
- 3) $\frac{(\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + 1)(\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1)}{(\cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1)(\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha - 1)}$;
- 4) $\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha} - \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}\right) \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right)$;
- 5) $\frac{\cos^4 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}$;
- 6) $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1}$.

64. Вычислите:
- 1) $\sin 17^\circ \cos 13^\circ + \cos 17^\circ \sin 13^\circ$; 6) $\sin 20^\circ \cos 50^\circ - \cos 20^\circ \sin 50^\circ$;
 - 2) $\sin 9^\circ \cos 99^\circ - \sin 99^\circ \cos 9^\circ$; 7) $\cos 10^\circ \cos 35^\circ - \sin 35^\circ \sin 10^\circ$;
 - 3) $\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{5\pi}{7}$; 8) $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{11\pi}{12}$;
 - 4) $\sin 15^\circ \sin 15^\circ - \cos 15^\circ \cos 15^\circ$; 9) $\sin 22,5^\circ \sin 22,5^\circ - \cos 22,5^\circ \cos 22,5^\circ$;
 - 5) $\frac{\sin 20^\circ \cos 5^\circ - \sin 5^\circ \cos 20^\circ}{\cos 10^\circ \cos 5^\circ - \sin 10^\circ \sin 5^\circ} - \operatorname{tg} 15^\circ$; 10) $\frac{\cos 18^\circ \cos 28^\circ - \sin 18^\circ \sin 28^\circ}{\sin 34^\circ \sin 12^\circ - \cos 12^\circ \cos 34^\circ}$.
65. Найдите значение выражения:
- 1) $\sin 10^\circ \cos 20^\circ + \sin 20^\circ \cos 10^\circ$; 6) $\cos 109^\circ \cos 49^\circ + \sin 109^\circ \sin 49^\circ$;
 - 2) $\sin 50^\circ \cos 20^\circ - \cos 50^\circ \sin 20^\circ$; 7) $\cos 71^\circ \sin 11^\circ - \sin 71^\circ \cos 11^\circ$;
 - 3) $\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{20} + \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{20}$; 8) $\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}$;
 - 4) $\frac{\sin 37^\circ \cos 7^\circ - \cos 37^\circ \sin 7^\circ}{\cos 47^\circ \cos 17^\circ + \sin 17^\circ \sin 47^\circ}$; 9) $\frac{\operatorname{tg} 31^\circ + \operatorname{tg} 14^\circ}{1 - \operatorname{tg} 31^\circ \operatorname{tg} 14^\circ}$;
 - 5) $\frac{\sin 0,3\pi \cos(-2,8\pi) + \cos 0,3\pi \sin(-2,8\pi)}{\cos 0,3\pi \cos 2,3\pi - \sin 0,3\pi \sin(-2,3\pi)}$; 10) $\frac{\operatorname{tg} 74^\circ - \operatorname{tg} 14^\circ}{1 + \operatorname{tg} 74^\circ \operatorname{tg} 14^\circ}$.
66. Упростите выражения:
- 1) $\frac{\sin(2\alpha + \varphi) + \sin(2\alpha - \varphi)}{\sin(2\alpha + \varphi) - \sin(2\alpha - \varphi)}$; 4) $\frac{\cos(3x + a) + \sin 3x \sin a}{\cos(3x - a) - \sin 3x \sin a}$;
 - 2) $\frac{\sin(5\varphi + \beta) - \sin \beta \cos 5\varphi}{\sin(5\varphi - \beta) + \sin \beta \cos 5\varphi}$; 5) $\frac{\cos(\alpha - 3\beta) - \sin 3\beta \sin \alpha}{\cos(3\beta + \alpha) + \sin \alpha \sin 3\beta}$;
 - 3) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}$; 6) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}$.
67. Упростите следующие выражения:
- 1) $\frac{\sin(3a + 2b) - \sin(2b - 3a)}{\cos(2b + 3a) + \cos(2b - 3a)}$; 3) $\frac{\sin(45^\circ - \alpha) + \cos(45^\circ - \alpha)}{\sin(45^\circ - \alpha) - \cos(45^\circ - \alpha)}$;
 - 2) $\frac{\sin(\alpha - 2\beta) + 2 \cos \alpha \sin 2\beta}{2 \cos \alpha \cos 2\beta - \cos(\alpha - 2\beta)}$; 4) $\frac{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} 7\alpha}{1 - \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg} 7\alpha}$.

Дано:

68. $\operatorname{tg} \alpha = 3$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}$. Найти: а) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; б) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.
69. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; $\cos \beta = -\frac{4}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Найти $\sin(\alpha - \beta)$.
70. $\cos \alpha = \frac{7}{25}$; $\sin \beta = \frac{4}{5}$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Найти $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.
71. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{12}{13}$, $\sin \gamma = \frac{7}{25}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Найти $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$.
72. Упростите выражения:
- 1) $\frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta - \alpha)}{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta - \alpha)}$;
 - 2) $\frac{\sin(\beta - \gamma)}{\cos \beta \cos \gamma} + \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\cos \gamma \cos \alpha} + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$.
73. Замените тригонометрической функцией угла α :
- 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 5) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; 9) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;
 - 2) $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)$; 6) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$; 10) $\cos(90^\circ - \alpha)$;
 - 3) $\cos(2\pi - \alpha)$; 7) $\sin(180^\circ + \alpha)$; 11) $\sin(270^\circ - \alpha)$;
 - 4) $\sin(2\pi + \alpha)$; 8) $\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha)$; 12) $\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha)$.
74. Упростите выражение:
- 1) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $\operatorname{tg}(\alpha - 2\pi)$.
75. Преобразуйте выражение:
- 1) $\sin^2(\pi + \alpha)$; 2) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 3) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.
76. Приведите к тригонометрической функции угла α :
- 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 5) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; 9) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$;
 - 2) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$; 6) $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)$; 10) $\cos(\alpha - \pi)$;
 - 3) $\cos(2\pi + \alpha)$; 7) $\sin(\pi + \alpha)$; 11) $\operatorname{ctg}(\alpha - 360^\circ)$;
 - 4) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$; 8) $\cos(90^\circ + \alpha)$; 12) $\operatorname{tg}(-\alpha + 270^\circ)$.