

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2013 год, вариант 1

1. Выясните, какое из чисел больше: $\log_{2012} 2013$ или $\log_{2013} 2014$.
2. Несколько чисел образуют арифметическую прогрессию, причём их сумма равна 63, а первый член в полтора раза больше разности прогрессии. Если все члены прогрессии уменьшить на одну и ту же величину так, чтобы первый член прогрессии был равен разности прогрессии, то сумма всех чисел уменьшится не более, чем на 8, но не менее, чем на 7. Определите, какой может быть разность этой прогрессии.
3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\sqrt{\arcsin x} \leq \sqrt{\arccos y}.$$

4. Кратчайшее расстояние от вершины B треугольника ABC до точек противоположащей стороны равно 12. Найдите стороны AB и BC этого треугольника, если $\sin \angle C = \sqrt{3}/2$ и $AC = 5$.
5. Найти все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y| + |y - x| \leq a - |x - 1|, \\ (y - 4)(y + 3) \geq (4 - x)(3 + x) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответы

1. Первое.
2. 2 или $21/8$.
3. $1 + \frac{\pi}{4}$.
4. Одна сторона равна 12, а другая $\frac{5+\sqrt{501}}{2}$ или $\sqrt{229}$.
5. $a = 7$.