

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2014 год, Иркутск

1. Для некоторого натурального k десятичная запись числа $k^2 + 6k$ заканчивается цифрой 6. Найдите все значения, которые может принимать предпоследняя цифра этой записи.

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}}} \geq 1.$$

3. Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен $2/\sqrt{5}$. Через середины одного катета и гипотенузы провели окружность, касающуюся другого катета. Найдите отношение части гипотенузы, лежащей внутри получившегося круга, ко всей гипотенузе.

4. Решите уравнение

$$\sin^2\left(\frac{2013x}{2}\right) \cdot \cos^2(2014x) \cdot \sin^2\left(\frac{2015x}{2}\right) = 1.$$

5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$2^{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}} + a^2 - 4 = 2a \cos\left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)$$

имеет единственное решение.

Ответы

- 1.
- $(0; 3] \cup (8; +\infty)$.
- $2/5$ или $11/40$.
- $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
- 0 или 3.