

## Игра в камни, четыре варианта хода

### 1. Задание 26 № 3599

Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 3, а во второй — 6 камней. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или удваивает число камней в какой-то куче, или добавляет 2 камня в какую-то кучу. Выигрывает игрок, после хода которого общее число камней в двух кучах становится не менее 24 камней. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков — игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

### 2. Задание 26 № 3603

Имеются две кучи камней, в одной из которых 1, а в другой — 4 камня. Двум игрокам предлагается игра по следующим правилам. Каждый игрок обеспечивается неограниченным запасом камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок производит одно из возможных действий: или утраивает число камней в одной из куч, или увеличивает на 3 количество камней в какой-либо куче.

Выигрывает тот игрок, после хода которого, суммарное число камней в двух кучах становится равным 22 или более камней. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков — игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Как должен ходить выигрывающий игрок?

### 3. Задание 26 № 4736

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 4, а во второй - 3 камня. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. Ход состоит в том, что игрок или утраивает число камней в какой-то куче, или добавляет 1 камень в какую-то кучу. Игра завершается в тот момент, когда общее количество камней в двух кучах становится не менее 20. Если в момент завершения игры общее число камней в двух кучах не менее 35, то выиграл Ваня, в противном случае - Петя. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков? Укажите, стратегию выигрывающего игрока - какой ход он должен сделать в каждой из позиций, которые могут ему встретиться при правильной игре. Докажите, что описанная стратегия - выигрышная.

### 4. Задание 26 № 4876

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 2, а во второй — 3 камня. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. Ход состоит в том, что игрок или утраивает число камней в какой-то куче, или добавляет 4 камня в какую-то кучу. Игра завершается в тот момент, когда общее число камней в двух кучах становится не менее 32. Если в момент завершения игры количество камней в одной из куч не менее 36, то выиграл Ваня, в противном случае — Петя. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока?

Ответ обоснуйте.

### 5. Задание 26 № 4878

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 3, а во второй — 2 камня. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. Ход состоит в том, что игрок или удваивает число камней в какой-то куче, или добавляет 3 камня в какую-то кучу. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в одной из куч становится не менее 14. Если в момент завершения игры количество камней в одной из куч не менее 21, то выиграл Ваня, в противном случае — Петя. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

### 6. Задание 26 № 4879

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 3, а во второй — 4 камня. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. Ход состоит в том, что игрок или удваивает число камней в какой-то куче, или добавляет 3 камня в какую-то кучу. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в одной из куч становится не менее 16. Если в момент завершения игры общее число камней в двух кучах не менее 24, то выиграл Ваня, в противном случае — Петя. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока? Ответ обоснуйте.

### 7. Задание 26 № 4881

Два игрока, Петя и Вася, играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 4, а во второй — 3 камня. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. Ход состоит в том, что игрок или удваивает число камней в какой-то куче, или добавляет 4 камня в какую-то кучу. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в одной из куч становится не менее 20. Если в момент завершения игры общее число камней в двух кучах не менее 28, то выиграл Вася, в противном случае — Петя. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока?

Ответ обоснуйте.

### 8. Задание 26 № 4882

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 2, а во второй — 3 камня. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. Ход состоит в том, что игрок или удваивает число камней в какой-то куче, или добавляет 3 камня в какую-то кучу. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в одной из куч становится не менее 15. Если в момент завершения

игры количество камней в одной из куч не менее 19, то выиграл Ваня, в противном случае — Петя. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока?

Ответ обоснуйте.

#### 9. Задание 26 № 4883

Два игрока, Петя и Вася играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в первой из которых 5, а во второй — 6 камней. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. Ход состоит в том, что игрок увеличивает или в 2 раза, или в 3 раза число камней в какой-то куче. Выигрывает игрок, после хода которого общее число камней в двух кучах становится не менее 48 камней. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока?

Ответ обоснуйте.

#### 10. Задание 26 № 8114

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучки камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать  $(10, 7)$ . Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций:  $(11, 7)$ ,  $(20, 7)$ ,  $(10, 8)$ ,  $(10, 14)$ . Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 55. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 55 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было 5 камней, во второй куче —  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 49$ .

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит, описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

1. а) Укажите все такие значения числа  $S$ , при которых Петя может выиграть за один ход, и соответствующие выигрывающие ходы. Если при некотором значении  $S$  Петя может выиграть несколькими способами, достаточно указать один выигрывающий ход.

б) Сколько существует значений  $S$ , при которых Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом?

2. Укажите такое значение  $S$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Для указанного значения  $S$  опишите выигрышную стратегию Пети.

3. Укажите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения  $S$  опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте ходы, в узлах указывайте позиции. В заданиях 2 и 3 достаточно указать одно значение  $S$  и объяснить, почему это значение удовлетворяет условию соответствующего задания.

#### 11. Задание 26 № 9377

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучки камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать  $(10, 7)$ . Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций:  $(11, 7)$ ,  $(20, 7)$ ,  $(10, 8)$ ,  $(10, 14)$ . Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 73. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 73 камня или больше.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. Например, при начальных позициях  $(6, 34)$ ,  $(7, 33)$ ,  $(9, 32)$  выигрышная стратегия есть у Пети. Чтобы выиграть, ему достаточно удвоить количество камней во второй куче.

**Задание 1.** Для каждой из начальных позиций  $(6, 33)$ ,  $(8, 32)$  укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

**Задание 2.** Для каждой из начальных позиций  $(6, 32)$ ,  $(7, 32)$ ,  $(8, 31)$  укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

**Задание 3.** Для начальной позиции  $(7, 31)$  укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной Вами выигрышной стратегии. Представьте дерево в виде рисунка или таблицы.

#### 12. Задание 26 № 9776

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучки камней. Игроки ходят по

очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в одной куче 20 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать (20, 7). Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций: (21, 7), (40, 7), (20, 8), (20, 14). Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 77. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т. е. первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 77 камней или больше.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. Например, при начальных позициях (10, 34), (11, 33) выигрышная стратегия есть у Пети. Чтобы выиграть, ему достаточно удвоить количество камней во второй куче.

**Задание 1.** Для каждой из начальных позиций (10, 33), (12, 32) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

**Задание 2.** Для каждой из начальных позиций (10, 32), (11, 32), (12, 31) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

**Задание 3.** Для начальной позиции (11, 31) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной Вами выигрышной стратегии. Представьте дерево в виде рисунка или таблицы.

### 13. Задание 26 № 9812

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в одной куче 20 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать (20, 7). Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций: (21, 7), (40, 7), (20, 8), (20, 14). Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 97. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т. е. первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 97 камней или больше.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. Например, при начальных позициях (10, 44), (11, 43) выигрышная стратегия есть у Пети. Чтобы выиграть, ему достаточно удвоить количество камней во второй куче.

**Задание 1.** Для каждой из начальных позиций (10, 43), (12, 42) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

**Задание 2.** Для каждой из начальных позиций (10, 42), (11, 42), (12, 41) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

**Задание 3.** Для начальной позиции (11, 41) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной Вами выигрышной стратегии. Представьте дерево в виде рисунка или таблицы.

### 14. Задание 26 № 10516

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в одной куче 6 камней, а в другой 9 камней; такую позицию в игре будем обозначать (6, 9). Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций: (12, 9), (7, 9), (6, 10), (6, 18). Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 77. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т. е. первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 77 или больше камней.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. Например, при начальных позициях (20, 30) и (37, 20) выигрышная стратегия есть у Пети. Чтобы выиграть, ему достаточно удвоить количество камней во второй куче.

**Задание 1**

Для каждой из начальных позиций (10, 33), (14, 31) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

**Задание 2**

Для каждой из начальных позиций (10, 32), (13, 31), (14, 30) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

**Задание 3**

Для начальной позиции (13, 30) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной Вами выигрышной стратегии. Представьте дерево в виде рисунка или таблицы.

**15. Задание 26 № 12442**

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) **один** камень или увеличить количество камней в куче в **два раза**. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать (10, 7). Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций: (11, 7), (20, 7), (10, 8), (10, 14). Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 77. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т. е. первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 77 или больше камней.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит, описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. Например, при начальных позициях (6, 36), (7, 35), (9, 34) выигрышная стратегия есть у Пети. Чтобы выиграть, ему достаточно удвоить количество камней во второй куче.

**Задание 1.** Для каждой из начальных позиций (6, 35), (8, 34) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

**Задание 2.** Для каждой из начальных позиций (6, 34), (7, 34), (8, 33) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

**Задание 3.** Для начальной позиции (7, 33) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной Вами выигрышной стратегии. Представьте дерево в виде рисунка или таблицы.