Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

7 класс, 2013 год

1. Найдите остаток от деления числа $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2013 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2014$ на 2015.

2. Натуральные числа m и n, $m \neq n$, таковы, что число 2013^m имеет такую же последнюю цифру, как и 2013^n.

а) Приведите пример таких чисел m и n.

б) Выясните, какое наименьшее значение может принимать величина $m + n$.

3. Дан угол с вершиной O_1. Провели окружность с центром в точке O_1, она пересекает стороны угла в точках A и B. Потом провели касательные к окружности в точках A и B, они пересеклись в точке O_2. Построили вторую окружность, с центром O_2 и радиусом O_2A, и провели касательные в точках A и B. Эти касательные пересекаются в точке O_3. Затем построили окружность с центром O_3, и так далее. Так проделали 1001 раз. Найдите угол $AO_{1001}B$, если $\angle AO_1B = 60°$.

4. Великий алхимик Теофраст фон Парацетамол приготовил колбу с водным раствором эликсира вечной молодости. Первому покупателю Теофраст продал $1/2013$ часть объёма колбы и затем долил колбу доверху дистиллированной водой. Второму покупателю он продал $1/2012$ часть объёма колбы и снова долил водой, и так далее. Последнему покупателю он продал $1/2$ колбы и снова долил колбу водой. В результате концентрация эликсира молодости в колбе стала равна 0,02%. Какова была изначальная концентрация эликсира?

5. Можно ли подобрать целые числа $A \neq 0$, $B \neq 0$ и $C \neq 0$ так, чтобы каждый из многочленов $Ax^2 + Bxy + Cy^2$, $Bx^2 + Cxy + Ay^2$ и $Cx^2 + Axy + By^2$ раскладывался в произведение двух линейных множителей с целыми коэффициентами?

6. а) Представьте число 2013 в виде суммы нескольких (более одного) последовательных натуральных чисел.

б) Выясните, существует ли способ составить эту сумму так, чтобы она содержала более 63 слагаемых.

Ответы

1. 0.

2. а) 1 и 5; б) 6.

3. 60°.

4. 40,26%.

5. Можно.

6. б) Нет.