

§ 4. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля

Основные эквивалентности

$$\begin{aligned} 1. |f(x)| \leq g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases} & 2. |f(x)| < g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases} \\ 3. |f(x)| \geq g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x). \end{cases} & 4. |f(x)| > g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{cases} \end{aligned}$$

Решить неравенства:

$$1. |2x-5| \leq 3. \quad 2. |3x-7| > 2. \quad 3. |3x-8| \leq 4. \quad 4. |5x-9| > 4.$$

$$5. |2-3x| < x+1. \quad 6. |1+2x| \geq 3-x. \quad 7. |3-2x| < 4x+5.$$

$$8. |7+2x| \geq 5-4x. \quad 9. |x+2| + |x+3| \leq 5. \quad 10. |x-1| - |x+2| > 3.$$

$$11. 2|x+1| + |6-2x| \leq x+8. \quad 12. |4-x| - 3|x-12| \geq 2x-20.$$

$$13. |x^2+4x+2| \leq |2-x^2|. \quad 14. |x^2-6x+3| \geq |x^2-3|.$$

$$15. |3x-2| - |2x+3| \geq |4-x|. \quad 16. |3-2x| - |5x+9| \leq |4-3x|.$$

$$17. |2x-3| - |6-x| \leq |2-x|. \quad 18. |5x-6| - |x-3| > 2|5-x|.$$

$$19. |x^2-2x-3| < 3x-3. \quad 20. x^2-x-2 < |5x-3|. \quad 21. |5-2|x+1|| \geq 1.$$

$$22. |9-2|2-x|| \leq 3. \quad 23. |7-2|3-x|| \geq 7. \quad 24. |13-2|x+3|| \leq 9.$$

$$25. \left| \frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1} \right| < 3. \quad 26. \frac{|x+2|-x}{x} < 2. \quad 27. \left| \frac{x^2-5x+4}{x^2-4} \right| \leq 1.$$

$$28. \frac{|x+3|+x}{x+2} > 1. \quad 29. \frac{x^2+6x-7}{|x+4|} < 0. \quad 30. \frac{x^2-5x+6}{|x|+7} < 0.$$

$$31. |x-1| \cdot (x^4-2x^2-3) \geq 0. \quad 32. |x^2-9| \cdot (x^4-2x^2-8) \leq 0.$$

$$33. (|x-3|^2-4)(|x|-5) \leq 0. \quad 34. (|x-5|-|x-1|)(|x|-3) \geq 0.$$

$$35. \frac{3-|x-5|-|2-x|}{|x-3|+|1-x|-2} \geq 0. \quad 36. \frac{|1-x|+|x+2|-3}{|4-x|+|x+1|-5} \geq 0.$$

$$37. \frac{|x^2-3x+2|-x^2+2x-1}{|x|-|x-1|} \leq 0. \quad 38. \frac{|x+2|-|x+1|}{|x^2+x|-x^2-2x-1} \geq 0.$$

$$39. \frac{(x-|3-2x|+6)(x+1)}{(x-9)^3} \geq 0. \quad 40. \frac{(7x-3|4-3x|-4)(x-1)}{(x-4)^2} \leq 0.$$

$$41. \frac{(2x-|8-3x|-2)(x-2)^2}{(x-6)^3} \leq 0. \quad 42. \frac{(x-|7-2x|-2)(x-5)}{(x-3)^3} \geq 0.$$

$$43. \frac{|x-6| - |x-4|}{|x-7| - |x-3|} > \frac{|x-7| + |x-3|}{|x+2|}, \quad 44. \frac{|x-6| - |x+3|}{|x-5| - |x+2|} > \frac{|x-5| + |x+2|}{|x-5|}.$$

Найти площадь фигуры, задаваемой на плоскости множеством решений системы неравенств:

$$45. \begin{cases} |y-x| \leq 3, \\ 3 \leq x+y \leq 7. \end{cases} \quad 46. \begin{cases} |x+y| \leq 5, \\ -2 \leq y \leq 4. \end{cases} \quad 47. \begin{cases} |x-y| \leq 2, \\ -3 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad 48. \begin{cases} y \leq 5+2|x|, \\ y \geq 3+4|x|. \end{cases}$$

$$49. |x-2| + |y| \leq 2. \quad 50. |x| + |2-y| \leq 3. \quad 51. |3-x| + |y| \leq 1.$$

$$52. |x+1| + |2y-x-1| \leq 6. \quad 53. |y-2x-1| + 2|x| \leq 3.$$

$$54. |2y+x+1| + |x+1| \leq 4. \quad 55. 2|x| + |y+2x+1| \leq 5.$$

$$56. \begin{cases} |x+y| \leq 4, \\ 4 \leq y-x \leq 8. \end{cases} \quad 57. \begin{cases} |y-x| \leq 5, \\ |y| \leq 2. \end{cases} \quad 58. \begin{cases} y \leq 6-2|x|, \\ y \geq 2+2|x|. \end{cases} \quad 59. \begin{cases} |x+y| \leq 4, \\ |y| \leq 2. \end{cases}$$

$$60. \begin{cases} x^2 - 9 \leq 4y(x-y), \\ |x| \leq |y|. \end{cases} \quad 61. \begin{cases} y^2 - 144 \leq 5x(2y-5x), \\ |x| \geq |y|. \end{cases} \quad 62. \begin{cases} x^2 - 16 \leq 3y(2x-3y), \\ |x| \leq |y|. \end{cases}$$

$$63. \begin{cases} (x-1)^2 \leq (y-1)^2, \\ |y| \leq 4. \end{cases} \quad 64. \begin{cases} (x+1)^2 \geq (y+1)^2, \\ |x| \leq 3. \end{cases}$$

65. Фигура, заданная на плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4r^2, \\ |y| \geq r - \frac{x}{2}, \quad x \geq 0, r > 0, \end{cases} \quad \text{вращается вокруг оси } Oy.$$

При каком значении r объём полученного тела вращения равен 8π ?

66. Фигура, заданная на плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq r^2, \\ |y| \leq r, \quad 0 \leq x \leq 2r, \quad r > 0, \end{cases} \quad \text{вращается вокруг оси } Oy.$$

При каком значении r объём полученного тела вращения равен 180π ?

67. Фигура, заданная на плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq r^2, \\ |y| \leq 2r, \quad 0 \leq x \leq r, \quad r > 0, \end{cases} \quad \text{вращается вокруг оси } Oy.$$

При каком значении r объём полученного тела вращения равен $\frac{64\pi}{3}$?

Найти площадь фигуры, задаваемой на плоскости множеством решений системы неравенств:

$$68. \begin{cases} |x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1,5| \leq 0,5, \\ 4x - y - 9 \leq 0, \quad x + 4y + 2 \leq 0. \end{cases} \quad 69. \begin{cases} |x^2 + y^2 + 6x - 4y + 10| \leq 1, \\ 2x - y + 8 \geq 0, \quad x + 2y - 1 \leq 0. \end{cases}$$

$$70. \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 \leq 0, \\ |y+2| \leq |x+1| - 2. \end{cases} \quad 71. \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 3 \leq 0, \\ |x+1| \geq |y-2| - 2. \end{cases}$$

§ 4. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля

1. $[1; 4]$. 2. $(-\infty; 5/3) \cup (3; +\infty)$. 3. $[4/3; 4]$. 4. $(-\infty; 1) \cup (13/5; +\infty)$.
5. $(1/4; 3/2)$. 6. $(-\infty; -4] \cup [2/3; +\infty)$. 7. $(-1/3; +\infty)$. 8. $[-1/3; +\infty)$.
9. $[-5; 0]$. 10. $\emptyset$. 11. $[0; 4]$. 12. $[10; 13]$. 13. $(-\infty; -2] \cup [-1; 0]$. 14. $(-\infty; 0] \cup [1; 3]$. 15. $(-\infty; -5/4]$. 16. $(-\infty; +\infty)$. 17. $(-\infty; 7/2]$. 18. $(-\infty; -7/2) \cup (19/8; +\infty)$.
19. $(2; 5)$. 20. $(-5; 3+2\sqrt{2})$. 21. $(-\infty, -4] \cup [-3; 1] \cup [2; +\infty)$. 22. $[-4; -1] \cup [5; 8]$.
23. $(-\infty; -4] \cup \{3\} \cup [10; +\infty)$. 24. $[-14; -5] \cup [-1; 8]$. 25. $(-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$.
26. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. 27. $[0; 8/5] \cup [5/2; +\infty)$. 28. $(-5; -2) \cup (-1; +\infty)$.
29. $(-7; -4) \cup (-4; 1)$. 30. $(2; 3)$. 31. $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup \{1\} \cup [\sqrt{3}; +\infty)$. 32. $\{\pm 3\} \cup [-2; 2]$.
33. $[-5; 1] \cup \{5\}$. 34. $(-\infty; -3] \cup \{3\}$. 35. $(3; 5)$. 36. $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$. 37. $(-\infty, 1/2) \cup \{1\} \cup [3/2; +\infty)$. 38. $[-3/2, -1) \cup (-1, -1/2)$. 39. -1 . 40. $\{1\} \cup (4; +\infty)$.
41. $[2, 6) \cup (6, +\infty)$. 42. 5. 43. $(18/5; 5) \cup (5; 22/3)$. 44. $(-24/5; -2)$. 45. 12. 46. 60.
47. 16. 48. 2. 49. 8. 50. 18. 51. 2. 52. 36. 53. 9. 54. 16. 55. 25. 56. 16.
57. 40. 58. 4. 59. 32. 60. 6. 61. 12. 62. 4. 63. 34. 64. 20. 65. 1. 66. 3. 67.
2. 68. $\pi/4$. 69. $\pi/2$. 70. π . 71. 3π .