

§ 3. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

Основные эквивалентности

1. $|x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$
2. $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{при } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{при } f(x) < 0. \end{cases}$
3. $|f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$
4. $\forall b < 0 \quad |f(x)| = b \Leftrightarrow \emptyset.$
5. $\forall b > 0 \quad |f(x)| = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = b, \\ f(x) = -b. \end{cases}$
6. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$
7. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, & \begin{cases} f(x) < 0, \\ f(x) = g(x), & f(x) = -g(x). \end{cases} \end{cases}$

Решить уравнения:

1. $|5x+3|=2.$ 2. $|3x-4|=1/2.$ 3. $|2x-3|=3x+4.$ 4. $|4x+5|=3.$
5. $|4x-3|=5.$ 6. $|x-2|=2x+3.$ 7. $|2-3x|=|5x+4|.$
8. $|5-x|+|x-1|=10.$ 9. $|3-x|+|6-x|=3.$ 10. $|2x-1|=2|x-1|.$
11. $|x-3|+2|x+1|=4.$ 12. $|4-x|+|x-2|=2.$ 13. $|5-2x|+|x+3|=2-3x.$
14. $7|x+2|+7|2-x|=2x+48.$ 15. $3|1-x|-x-12=|2x+3|.$
16. $|3x-8|+|3x-2|=6.$ 17. $|x^2-x-5|=1.$ 18. $|1+x-x^2|=2x^2+x-4.$
19. $|x^2-5x+4|=|x^2-4|.$ 20. $|x^2+4x-8|=4.$ 21. $|x^2+x-4|=2.$
22. $|x^2-6x+7|=\frac{1}{3}(5x-9).$ 23. $|1-2x-x^2|=2x.$ 24. $|x^2-8x+5|=|x^2-5|.$
25. $x^2-5|x|+6=0.$ 26. $x^2+3x+|x+3|=0.$
27. $\frac{|x-2|}{|x-1|-1}=1.$ 28. $\left| \frac{x^2-x-14}{x^2-5x+6} \right|=1.$ 29. $\frac{5}{3-|x-1|}=|x|+2.$
30. $\frac{5-|6-x|-|x-1|}{|x^2-9x+18|}=0.$ 31. $\frac{|x-2|+|3+x|-5}{|16+11x-5x^2|}=0.$
32. $|x^4-6x^3+8x^2|=54x-9x^2-72.$ 33. $|x^4-9x^3+14x^2|=9x^3-14x^2-x^4.$

Решить системы:

34. $\begin{cases} |x+2|-|y-3|=3, \\ x=2-|y-3|. \end{cases}$
35. $\begin{cases} |5x+2y|=|3x-y|, \\ 3y=2x+13. \end{cases}$

Построить графики: 36. $y=|3-|x-1||.$ 37. $y=|2-|x+1||.$

38. $y=||x-1|-|x-5||.$ 39. $y=||x+1|-|x-2||.$ 40. $y=|3+2|x|-x^2|.$
41. $y=|x^2-5|x|+6|.$ 42. $y=|6|x|-8-x^2|.$ 43. $y=|x^2-4|x|+3|.$
44. $y=\frac{|x-2|(x^2-4x+6)}{x-2}.$ 45. $y=\frac{(x-1)(1-x^2)}{|x+1|}.$ 46. $y=\frac{(x^2-3x)(x+1)}{|x|}.$

§ 3. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

1. $\{-1, -1/5\}.$ 2. $\{7/6, 3/2\}.$ 3. $-1/5.$ 4. $\{-2, -1/2\}.$ 5. $\{2, -1/2\}.$ 6. $-1/3.$
7. $\{-3, -1/4\}.$ 8. $\{-2, 8\}.$ 9. $[3, 6].$ 10. $3/4.$ 11. $-1.$ 12. $[2, 4].$ 13. $(-\infty, -3].$
14. $\{-3, 4\}.$ 15. $-3.$ 16. $[2/3, 8/3].$ 17. $\{-2, (1 \pm \sqrt{17})/2, 3\}.$ 18. $\{-3, \sqrt{5}/3\}.$
19. $\{0, 8/5, 5/2\}.$ 20. $\{-6, 2, -2 \pm 2\sqrt{2}\}.$ 21. $\{-3, -2, 1, 2\}.$ 22. $\{3, 6\}.$ 23. $\{1, -2 + \sqrt{5}\}.$
24. $\{0, 5/4, 4\}.$ 25. $\{-3, -2, 2, 3\}.$ 26. $\{-3, -1\}.$ 27. $(2, +\infty).$ 28. $\{-1, 4, 5\}.$
29. $\{3, -2 + \sqrt{5}\}.$ 30. $[1; 3) \cup (3; 6).$ 31. $[-3; -1) \cup (-1; 2].$ 32. $\{2; 3; 4\}.$
33. $\{0\} \cup [2; 7].$ 34. $(3/2; 5/2), (3/2; 7/2).$ 35. $(-13/4, 13/6), (-1/2, 4).$