



Демонстрационный вариант
Профильного Единого государственного экзамена 2018
по математике

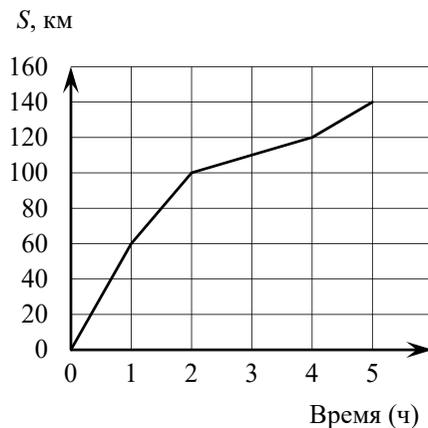
Вариант М1 (средний уровень)

Часть 1

Ответом к заданиям 1—12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Единицы измерения писать не нужно.

- 1 Нефтеперерабатывающий завод увеличил отпускную цену продукции на 20%. При этом издержки производства выросли с 40% до 43% отпускной цены. На сколько процентов увеличилась прибыль завода, если объём производства остался неизменным?

- 2 Грузовик выехал из населённого пункта. На рисунке показано изменение расстояния S в километрах при движении этого грузовика от населённого пункта. На сколько км/ч скорость грузовика в первый час пути превышала его скорость во второй час пути?



- 3 Найдите площадь ромба с диагоналями EF и CD , если $C = (-1; 4)$, $D = (1; 2)$, $E = (-3; 0)$.

- 4 В коробке лежат 100 шаров трёх разных цветов: синего, белого и зелёного. Какое наименьшее количество шаров надо не глядя вынуть из коробки, чтобы среди них было наверняка тридцать шаров одного цвета?

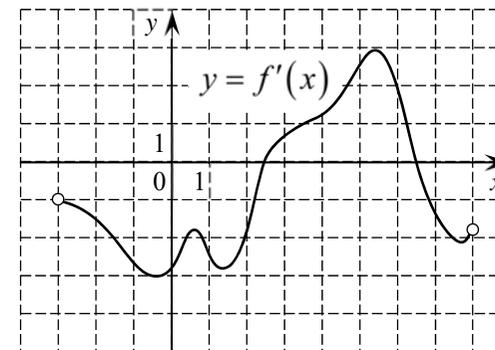
- 5 Решите уравнение:

$$4^x - (7 - x) \cdot 2^x + 12 - 4x = 0$$

Если корней больше одного, в ответе укажите их сумму.

- 6 Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Точка M — середина стороны AB . Найдите площадь треугольника ABC , если описанная около треугольника AMO окружность пересекает прямую AC в точке N , причём $MN = 8$, $AN = 7$ и $\angle MOA = 45^\circ$.

- 7 На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в эти промежутки.



- 8 Рёбра треугольной пирамиды равны 15, 12, 12, 9, 9 и 3. Найдите радиус сферы, описанной около этой пирамиды.

Часть 2

9 Найдите $\cos 2\alpha$, если $2\operatorname{ctg}^2 \alpha + 7\operatorname{ctg} \alpha + 3 = 0$ и $7\pi/4 < \alpha < 2\pi$.

10 Зависимость температуры в градусах Кельвина от времени в минутах для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задается выражением:

$$T(t) = T_0 + at + bt^2$$

где $T_0 = 320$ К, $a = 18$ К/мин, $b = -0,2$ К/мин². Известно, что при температурах нагревателя более 600 К прибор может испортиться, поэтому его надо отключать. Определите, через какое наибольшее время после начала работы прибора его надо отключить. Ответ дайте в минутах.

11 Два приятеля собрались на охоту. Один из них живет в 46 км от охотничьей базы, другой, имеющий машину — в 30 км от базы (между базой и домом первого приятеля). Они двинулись в путь одновременно, причём владелец машины поехал навстречу своему приятелю, идущему пешком. Встретившись, они вместе поехали на базу и прибыли туда через час после выхода из дома. Если бы пешеход вышел из дома на 2 ч 40 мин раньше владельца машины, то приятели встретились бы в 11 км от дома пешехода. Какова скорость машины?

12 Найдите наименьшее значение функции:

$$f(x) = (x-2)(4+(x-1)(x-4))(x-3)$$

Для решения задач 13—19 используйте отдельные бланки. Запишите сначала номер задачи, а затем — полное обоснованное решение и ответ.

13 а) Решите уравнение $12 \cdot 36^{\sin x} - 12^{\sin x} = 4^{\sin x}$.

б) Укажите все корни этого уравнения, лежащие на отрезке $[-3, 5\pi; 2\pi]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N — середины ребер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C .

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

15 Решите неравенство:

$$\log_2 \left(\sqrt{x + \frac{11}{2}} + \frac{1}{2}x + 1 \right) \log_3 (-2x - x^2) \geq \log_3 \left(\frac{1}{2}|x| + \frac{3}{2} \right) \log_2 (-2x - x^2)$$

16 Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K . При этом $AK : KC = 1 : 2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30^\circ$.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P , а прямые AP и BK — в точке Q . Найдите KQ , если $BC = \sqrt{21}$.

17 База находится в лесу в 5 км от прямой дороги, а в 13 км от базы на этой дороге расположена железнодорожная станция. Пешеход пойдёт по дороге со скоростью 5 км/ч, а по лесу — 3 км/ч. За какое минимальное время пешеход сможет добраться от базы до станции?

18 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно одно решение:

$$\begin{cases} \frac{9}{\sqrt{x+a}} + \frac{16}{\sqrt{y-a}} \leq 22 - \sqrt{x+a} - 4\sqrt{y-a}, \\ 2^{x-11} \cdot \log_2(4-y) = 1. \end{cases}$$

19 На сайте проводится опрос, кого из 134 футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округлятся до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 17 посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста стал равен 41. Увидев это, Вася отдал свой голос за другого футболиста. Чему теперь равен рейтинг первого футболиста?

б) Вася проголосовал за некоторого футболиста. Могла ли после этого сумма рейтингов всех футболистов уменьшиться не менее чем на 27?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма рейтингов всех футболистов?