

Московская математическая олимпиада

9 класс, 2016 год

1. Сумма трёх положительных чисел равна их произведению. Докажите, что хотя бы два из них больше единицы.

2. В треугольнике ABC на продолжении медианы CM за точку C отметили точку K так, что $AM = CK$. Известно, что угол BMC равен 60° . Докажите, что $AC = BK$.

3. Васе задали на дом уравнение $x^2 + p_1x + q_1 = 0$, где p_1 и q_1 — целые числа. Он нашёл его корни p_2 и q_2 и написал новое уравнение $x^2 + p_2x + q_2 = 0$. Повторив операцию ещё трижды, Вася заметил, что он решал четыре квадратных уравнения и каждое имело два различных целых корня (если из двух возможных уравнений два различных корня имело ровно одно, то Вася всегда выбирал его, а если оба — любое). Однако, как ни старался Вася, у него не получилось составить пятое уравнение так, чтобы оно имело два различных вещественных корня, и Вася сильно расстроился. Какое уравнение Васе задали на дом?

$$0 = 0x - x + x^2$$

4. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Прямая, перпендикулярная стороне AC , пересекает сторону BC и прямую AB в точках Q и P соответственно. Докажите, что точки B , O и середины отрезков AP и CQ лежат на одной окружности.

5. Существует ли 2016-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2016 разных 2016-значных полных квадратов?

$$\varphi$$

6. В стране лингвистов существует n языков. Там живет m людей, каждый из которых знает ровно три языка, причём для разных людей эти наборы различны. Известно, что максимальное число людей, любые два из которых могут поговорить без посредников, равно k . Оказалось, что $11n \leq k \leq m/2$. Докажите, что тогда в стране найдутся хотя бы mn пар людей, которые не смогут поговорить без посредников.