I. Задания заключительного этапа олимпиады 2015-16 года

11 класс
1 вариант

1. (2 балла) Мальчик Вася выписал в тетрадку ненулевые коэффициенты многочлена $P(x)$ десятой степени. Затем у получившегося многочлена вычислил производную и выписал её ненулевые коэффициенты, и так далее, пока не получилась константа, которую он также выписал.

Какое наименьшее количество различных чисел у него могло получиться?

Коэффициенты выписываются с учётом знака, свободные члены также выписываются, если имеется одночлен вида $\pm x^n$, выписывается ± 1.

Ответ: 10

Решение: Оценка: так как многочлен имеет степень 10, у него совершенно точно есть ненулевой коэффициент при x^10, назовём его a. Тогда старший коэффициент производной этого многочлена равен $10a$, старший коэффициент второй производной равен $10 \cdot 9a$ и т.д., старшие коэффиценты девятой и десятой производных равны $10!a$, причем все эти числа, кроме двух последних, различны, таким образом 10 различных чисел точно есть.

Пример: $\dfrac{x^{10}}{10!} + \dfrac{x^9}{9!} + \ldots + x + 1$ даёт нам ровно 10 различных чисел, так как каждый следующий одночлен — производная предыдущего.

Также подходит любой многочлен пропорциональный данному, а также отличающийся от пропорционального данному вычёркиванием некоторых одночленов, например x^{10}. Легко доказать, что других примеров нет, впрочем, в задаче это не требуется.

2. (2 балла) Решите уравнение или докажите, что оно не имеет решений: $3\sin x + 4\cos x = -5 - \frac{1}{|x|}$

Ответ: Решений нет.

Решение:

$3\sin x + 4\cos x = 5\sin(x + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}) \geqslant -5 > -5 - \frac{1}{|x|}$, следовательно, равенство невозможно.

3. (3 балла) В некоторой стране 100 городов. Министерство авиации требует, чтобы каждые два города были соединены двусторонним авиарейсом ровно одной авиакомпании и чтобы рейсами каждой авиакомании можно было бы добраться от любого города до любого (возможно, с пересадками). При каком наибольшем числе авиакомпаний это возможно?

Ответ: 50

Решение: Оценка: для того, чтобы соединить все города, авиакомпании надо иметь хотя бы 99 рейсов. Всего пар городов $100 \cdot 99/2$, значит, авиакомпаний не более 50.

Пример: обозначим города за $a_1, a_2, \ldots a_{50}, b_1, b_2, \ldots, b_{50}$ каким-нибудь образом. Тогда авиакомпания с номером k будет соединять

1) города a_k и b_k;
2) a_k и каждый город a_i, где $i < k$
3) a_k и каждый город b_i, где $i > k$
4) b_k и каждый город a_i, где $i > k$
5) b_k и каждый город b_i, где $i < k$.

Таким образом, города a_i и a_j оказываются соединены рейсом авиакомпании с номером $\max(a_i, a_j)$, города b_i и b_j — авиакомпании с номером $\max(b_i, b_j)$, города a_i и b_j — авиакомпании с номером $\min(b_i, b_j)$.

4. (3 балла) Докажите, что при $n = 6002$ сумма биномиальных коэффициентов с шагом 6, т.е. $C_n^1 + C_n^7 + \ldots + C_n^{n-1}$, дает остаток 1 при делении на 3.

C_n^k — количество способов выбрать из n предметов k, что составляет $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ если $0 \leqslant k \leqslant n$ и 0 в остальных случаях.

Решение:

Легко проверить, что $C_n^k = C_{n-3}^{k-3} + 3C_{n-3}^{k-2} + 3C_{n-3}^{k-1} + C_{n-3}^k$, следовательно, C_n^k даёт такой же остаток при делении на 3, что и $C_{n-3}^{k-3} + C_{n-3}^k$.

Таким образом, $C_n^1 + C_n^7 + \ldots + C_n^{n-1}$ даёт такой же остаток при делении на 3, что и $C_{n-3}^1 + C_{n-3}^4 + \ldots + C_{n-3}^{n-7} + C_{n-3}^{n-4}$ (здесь отброшены два крайних слагаемых, равные 0).

Обозначим эту сумму за S_{n-3}.

Аналогично переходим к $2C_{n-6}^1 + 2C_{n-3}^4 + \ldots + 2C_{n-3}^{n-7} + 2C_{n-3}^{n-4} = 2S_{n-6}$.

Применив эту процедуру ещё 1998 раз, получаем, что формула из условия даёт такой же остаток при делении на 3, что и $2^{1999}S_2 = 4^{999} \cdot 2C_2^1 = 4^{1000}$, что даёт остаток 1 при делении на 3.

5. (3 балла) Три окружности, радиусов 1, 1 и $2\sqrt{\frac{13-6\sqrt{3}}{13}}$, расположены так, что треугольник, образованный центрами этих окружностей, является равносторонним со стороной $\sqrt{3}$. Найдите, чему равен радиус описанной вокруг треугольника, каждая из вершин которого является точкой пересечения двух из этих окружностей, дальней от центра третьей окружности.

Ответ: $4\sqrt{3}-6$

Решение:

Пусть A, B, C — указанные точки пересечения первой и второй, второй и третьей, первой и третьей окружностей соответственно, O_1, O_2, O_3 — центры этих окружностей.

Радиусы первой и второй окружностей равны, следовательно, точка A попадёт на серединный перпендикуляр к O_1O_2. Треугольник, образованный центрами окружностей, правильный, поэтому точка O_3 также окажется на этом серединном перпендикуляре. Следовательно, вся картинка симметрича относительно этого серединного перпенликуляра, в частности, точки B и C симметричны друг другу.

Треугольник O_1AO_2 равнобедренный с вершиной A; кроме того, его стороны равны 1, 1 и $\sqrt{3}$ откуда легко ищутся его углы: $30°$, $30°$ и $120°$.

$\angle O_1AC$ обозначим за α, $\angle CO_1O_3$ за β. В треугольнике CO_1O_3 мы знаем все стороны, значит, мы можем найти

$$\cos\beta = \frac{1+3-4\cdot\frac{13-6\sqrt{3}}{13}}{2\cdot 1\cdot\sqrt{3}} = \frac{12}{13}.$$

Соответственно, $\sin\beta = \frac{5}{13}$. Далее, $\angle AO_1C = \angle AO_1O_2 + \angle O_2O_1O_3 + \angle O_3O_1C = 30° + 60° + \beta = 90° + \beta$

Треугольник CO_1A равнобедренный с углами α, $90° + \beta$ и α, следовательно, $\alpha = \dfrac{90° - \beta}{2}$, откуда

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos(90°-\beta)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sin\beta}{2}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Соответственно, $\sin\alpha = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Кроме того, $AC = 2O_1A\cos\alpha = 2\cdot 1\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$.
$\angle BAC = 120 - 2\alpha = 30 + \beta$, следовательно,

$$\sin\angle BAC = \frac{1}{2}\cdot\frac{12}{13} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{5}{13} = \frac{12+5\sqrt{3}}{26}.$$

$$\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{12}{13} - \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{13} = \frac{12\sqrt{3}-5}{26}.$$

$$\sin\angle ABC = \cos\frac{\angle BAC}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\angle BAC}{2}} = \sqrt{\frac{21+12\sqrt{3}}{52}} = \frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{13}}.$$

По теореме синусов,

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{\dfrac{6}{\sqrt{13}}}{2\cdot\dfrac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{13}}} = \frac{6}{2\sqrt{3}+3} = \frac{6(2\sqrt{3}-3)}{3} = 4\sqrt{3}-6$$

6. (3 балла) Найдите суммарную длину промежутков на числовой оси, на которых выполняются неравенства $x < 1$ и $\sin\log_2 x < 0$.

Ответ:

$$\frac{2^\pi}{1+2^\pi}$$

Решение:

Заметим, что нас интересуют только положительные x.

Если $\sin\log_2 x < 0$, значит, $2(k-1)\pi < \log_2 x < 2k\pi$ для какого-то целого k, то есть $2^{2(k-1)\pi} < x < 2^{2k\pi}$. Так как $x < 1$, нас интересуют только неположительные k. Обозначим $n = -k$. Число n принимает неотрицательные значения, тогда длина промежутка отрицательности нашей функции, имеющего номер n при нумерации с левой стороны (нумерация начинается с 0), равна $2^{-2n\pi} - 2^{-(2n+1)\pi} = 2^{-2n\pi}(1-2^{-\pi})$.

Следовательно, длины всех промежутков составляют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $2^{-2\pi}$, а их сумма равна $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-(2n+1)\pi} = \dfrac{1-2^{-\pi}}{1-2^{-2\pi}} = \dfrac{1}{1+2^{-\pi}} = \dfrac{2^\pi}{1+2^\pi}$.

7. (4 балла) Четыре из шести серединых рёбер некоего тетраэдра образуют правильный тетраэдр с ребром 1. Найдите рёбра исходного тетраэдра.

Ответ: Пять рёбер длины 2, одно ребро длины $2\sqrt{2}$.

Решение:

Обозначим вершины тетраэдра A, B, C, D. Середину ребра AB обозначим за M_{AB}, аналогичные обозначения введём для остальных рёбер.

Пусть в правильный тетраэдр не попали середины скрещивающихся рёбер исходного тетраэдра, не умаляя общности, можно считать, что это M_{AB} и M_{CD}. Заметим, что отрезок $M_{BC}M_{BD}$ средняя линия в треугольнике BCD, значит, он равен половине ребра CD по длине и параллелен этому ребру. Но то же самое можно сказать и про ребро $M_{AC}M_{AD}$, значит, эти отрезки параллельны и равны, т.е. образуют параллелограмм. Таким образом, четыре вершины, которые должны образовывать правильный тетраэдр, оказались лежащими в одной плоскости.

Значит, в правильный тетраэдр не попали середины соседних рёбер тетраэдра, не умаляя общности, можно считать, что это M_{BD} и M_{CD}. Треугольник $M_{AB}M_{AC}M_{BC}$ — серединный треугольник треугольника ABC, а значит, подобен ему с коэффициентом $\frac{1}{2}$, откуда $AB = AC = BC = 2$. Кроме того, $BD = 2M_{AB}M_{AD} = 2$ и $CD = 2M_{AC}M_{AD} = 2$ так как $M_{AB}M_{AD}$ и $M_{AC}M_{AD}$ средние линии в треугольниках ABD и ACD соответственно.

Осталось найти длину ребра AD. Пусть X — точка пересечения медиан треугольника ABC (и, очевидно, треугольника $M_{AB}M_{AC}M_{BC}$ тоже). Тогда $M_{AD}X$ — высота правильного тетраэдра с ребром 1, то есть равна $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; в то же время AX составляет $\dfrac{2}{3}$ от медианы треугольника ABC, то есть $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Кроме того, они перпендикулярны, так как $M_{AD}X$ высота тетраэдра и перпендикулярна всей плоскости ABC, следовательно, по теореме Пифагора $M_{AD}A^2 = M_{AD}X^2 + AX^2 = \dfrac{6}{3} = 2$. Ну а $AD = 2M_{AD}A = 2\sqrt{2}$.

8. (5 баллов) Докажите, что для положительных x, y, z выполняется неравенство

$$(x+y+z)(4x+y+2z)(2x+y+8z) \geqslant \frac{375}{2}xyz.$$

Решение:

Рассмотрим первые две скобки и заметим, что

$$(x+y+z)(4x+y+2z) = (2x+y)^2 + 3z(2x+y) + 2z^2 + xy.$$

Тогда мы можем переписать требуемое неравенство в виде

$$\left(\frac{(2x+y)^2 + 3z(2x+y) + 2z^2}{xy} + 1\right) \cdot \frac{2x+y+8z}{z} \geqslant \frac{375}{2}.$$

Теперь зафиксируем z и $2x+y$ и будем сдвигать $2x$ и y друг к другу. При этом xy увеличивается, и достигает максимума при $2x = y$, остальные части выражения остаются постоянными. Значит, требуемое равенство будет следовать из неравенства, полученного подстановкой в него $y = 2x$ т.е.

$$(3x+z)(6x+2z)(4x+8z) \geqslant 375x^2z.$$

Обозначим $t = x/z$, тогда неравенство превращается в

$$8(3t+1)^2(t+2) - 375t^2 \geqslant 0.$$

Взяв производную, можно убедиться, что минимум левой части достигается при $t = 4/3$ и равен 0, что доказывает требуемое неравенство. (таким образом, минимум исходного выражения достигается при $x : y : z = 4 : 8 : 3$.)

11 класс
2 вариант

1. (2 балла) Мальчик Вася выписал в тетрадку ненулевые коэффициенты многочлена $P(x)$ девятой степени. Затем у получившегося многочлена вычислил производную и выписал её ненулевые коэффициенты, и так далее, пока не получилась константа, которую он также выписал.

Какое наименьшее количество различных чисел у него могло получиться?

Коэффициенты выписываются с учётом знака, свободные члены также выписываются, если имеется одночлен вида $\pm x^n$, выписывается ± 1.

Ответ: 9

Решение: Оценка: так как многочлен имеет степень 9, у него совершенно точно есть ненулевой коэффициент при x^9, назовём его a. Тогда старший коэффициент производной этого многочлена равен $9a$, старший коэффициент второй производной равен $9 \cdot 8a$ и т.д., старшие коэффиценты восьмой и девятой производных равны $9!a$, причем все эти числа, кроме двух последних, различны, таким образом 9 различных чисел точно есть.

Пример: $\dfrac{x^9}{9!} + \dfrac{x^8}{8!} + \ldots + x + 1$ даёт нам ровно 9 различных чисел, так как каждый следующий одночлен — производная предыдущего.

Также подходит любой многочлен пропорциональный данному, а также отличающийся от пропорционального данному вычёркиванием некоторых одночленов, например x^9. Легко доказать, что других примеров нет, впрочем, в задаче это не требуется.

2. (2 балла) Решите уравнение или докажите, что оно не имеет решений: $5\sin x - 12\cos x = -13 - \frac{1}{|x|}$

Ответ: Решений нет.

Решение:
$5\sin x + 12\cos x = 13\sin(x - \operatorname{arctg}\frac{12}{5}) \geqslant -13 > -13 - \frac{1}{|x|}$, следовательно, равенство невозможно.

3. (3 балла) В некоторой стране 50 городов. Министерство авиации требует, чтобы каждые два города были соединены двусторонним авиарейсом ровно одной авиакомпании и чтобы рейсами каждой авиакомании можно было бы добраться от любого города до любого (возможно, с пересадками). При каком наибольшем числе авиакомпаний это возможно?

Ответ: 25

Решение: Оценка: для того, чтобы соединить все города, авиакомпании надо иметь хотя бы 49 рейсов. Всего пар городов $50 \cdot 49/2$, значит, авиакомпаний не более 25.

Пример: обозначим города за $a_1, a_2, \ldots a_{25}, b_1, b_2, \ldots, b_{25}$ каким-нибудь образом. Тогда авиакомпания с номером k будет соединять

1) города a_k и b_k;
2) a_k и каждый город a_i, где $i < k$
3) a_k и каждый город b_i, где $i > k$
4) b_k и каждый город a_i, где $i > k$
5) b_k и каждый город b_i, где $i < k$.

Таким образом, города a_i и a_j оказываются соединены рейсом авиакомпании с номером $\max(a_i, a_j)$, города b_i и b_j — авиакомпании с номером $\max(b_i, b_j)$, города a_i и b_j — авиакомпании с номером $\min(b_i, b_j)$.

4. (3 балла) Докажите, что при $n = 3002$ сумма биномиальных коэффициентов с шагом 6, т.е. $C_n^1 + C_n^7 + \ldots + C_n^{n-1}$, дает остаток 1 при делении на 3.

C_n^k — количество способов выбрать из n предметов k, что составляет $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ если $0 \leqslant k \leqslant n$ и 0 в остальных случаях.

Решение:
Легко проверить, что $C_n^k = C_{n-3}^{k-3} + 3C_{n-3}^{k-2} + 3C_{n-3}^{k-1} + C_{n-3}^k$, следовательно, C_n^k даёт такой же остаток при делении на 3, что и $C_{n-3}^{k-3} + C_{n-3}^k$.

Таким образом, $C_n^1 + C_n^7 + \ldots + C_n^{n-1}$ даёт такой же остаток при делении на 3, что и $C_{n-3}^1 + C_{n-3}^4 + \ldots + C_{n-3}^{n-7} + C_{n-3}^{n-4}$ (здесь отброшены два крайних слагаемых, равные 0).

Обозначим эту сумму за S_{n-3}.

Аналогично переходим к $2C_{n-6}^1 + 2C_{n-3}^4 + \ldots + 2C_{n-3}^{n-7} + 2C_{n-3}^{n-4} = 2S_{n-6}$.

Применив эту процедуру ещё 998 раз, получаем, что формула из условия даёт такой же остаток при делении на 3, что и $2^{999}S_2 = 4^{499} \cdot 2C_2^1 = 4^{500}$, что даёт остаток 1 при делении на 3.

5. (3 балла) Три окружности, радиусов $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ и $2\sqrt{\frac{39-18\sqrt{3}}{13}}$, расположены так, что треугольник, образованный центрами этих окружностей, является равносторонним со стороной 3. Найдите, чему равен радиус описанной вокруг треугольника, каждая из вершин которого является точкой пересечения двух из этих окружностей, дальней от центра третьей окружности.

Ответ: $12 - 6\sqrt{3}$

Решение:

Пусть A, B, C — указанные точки пересечения первой и второй, второй и третьей, первой и третьей окружностей соответственно, O_1, O_2, O_3 — центры этих окружностей.

Радиусы первой и второй окружностей равны, следовательно, точка A попадёт на серединный перпендикуляр к O_1O_2. Треугольник, образованный центрами окружностей, правильный, поэтому точка O_3 также окажется на этом серединном перпендикуляре. Следовательно, вся картинка симметрича относительно этого серединного перпенликуляра, в частности, точки B и C симметричны друг другу.

Треугольник O_1AO_2 равнобедренный с вершиной A; кроме того, его стороны равны $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ и 3 откуда легко ищутся его углы: $30°$, $30°$ и $120°$.

$\angle O_1AC$ обозначим за α, $\angle CO_1O_3$ за β. В треугольнике CO_1O_3 мы знаем все стороны, значит, мы можем найти

$$\cos\beta = \frac{3+9-4\cdot\frac{39-18\sqrt{3}}{13}}{2\cdot 3\cdot\sqrt{3}} = \frac{12}{13}.$$

Соответственно, $\sin\beta = \frac{5}{13}$. Далее, $\angle AO_1C = \angle AO_1O_2 + \angle O_2O_1O_3 + \angle O_3O_1C = 30° + 60° + \beta = 90° + \beta$

Треугольник CO_1A равнобедренный с углами α, $90° + \beta$ и α, следовательно, $\alpha = \dfrac{90° - \beta}{2}$, откуда

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos(90°-\beta)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sin\beta}{2}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Соответственно, $\sin\alpha = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Кроме того, $AC = 2O_1A\cos\alpha = 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.
$\angle BAC = 120 - 2\alpha = 30 + \beta$, следовательно,

$$\sin\angle BAC = \frac{1}{2}\cdot\frac{12}{13} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{5}{13} = \frac{12+5\sqrt{3}}{26}.$$

$$\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{12}{13} - \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{13} = \frac{12\sqrt{3}-5}{26}.$$

$$\sin\angle ABC = \cos\frac{\angle BAC}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\angle BAC}{2}} = \sqrt{\frac{21+12\sqrt{3}}{52}} = \frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{13}}.$$

По теореме синусов,

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{13}}}{2\cdot\frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{13}}} = \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3} = \frac{6\sqrt{3}(2\sqrt{3}-3)}{3} = 12 - 6\sqrt{3}$$

6. (3 балла) Найдите суммарную длину промежутков на числовой оси, на которых выполняются неравенства $|x| < 1$ и $\sin\log_3|x| > 0$.

Ответ:

$$\frac{2}{1+3^{\pi}}$$

Решение:

Достаточно решить задачу для положительных x, а потому умножить результат на 2.

Если $\sin\log_3 x > 0$, значит, $2k\pi < \log_3 x < (2k+1)\pi$ для какого-то целого k, то есть $3^{2k\pi} < x < 3^{(2k+1)\pi}$. Так как $x < 1$, нас интересуют только отрицательные k. Обозначим $n = -k$. Число n принимает положительные значения, тогда длина промежутка положительности нашей функции, имеющего номер n при нумерации с левой стороны , равна $3^{-(2n-1)\pi} - 3^{-2n\pi} = 2^{-2(n-1)\pi}(3^{-\pi} - 3^{-2\pi})$.

Следовательно, длины всех промежутков составляют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $3^{-2\pi}$, а их сумма равна $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{-(2n-1)\pi} = \dfrac{3^{-\pi}-3^{-2\pi}}{1-3^{-2\pi}} = \dfrac{3^{-\pi}}{1+3^{-\pi}} = \dfrac{1}{1+3^{\pi}}$.

Умножая это число на 2, получаем ответ.

7. (4 балла) Четыре из шести середин рёбер некоего тетраэдра образуют правильный тетраэдр с ребром $\frac{1}{2}$. Найдите рёбра исходного тетраэдра.

Ответ: Пять рёбер длины 1, одно ребро длины $\sqrt{2}$.

Решение:

Обозначим вершины тетраэдра A, B, C, D. Середину ребра AB обозначим за M_{AB}, аналогичные обозначения введём для остальных рёбер.

Пусть в правильный тетраэдр не попали середины скрещивающихся рёбер исходного тетраэдра, не умаляя общности, можно считать, что это M_{AB} и M_{CD}. Заметим, что отрезок $M_{BC}M_{BD}$ средняя линия в треугольнике

BCD, значит, он равен половине ребра CD по длине и параллелен этому ребру. Но то же самое можно сказать и про ребро $M_{AC}M_{AD}$, значит, эти отрезки параллельны и равны, т.е. образуют параллелограмм. Таким образом, четыре вершины, которые должны образовывать правильный тетраэдр, оказались лежащими в одной плоскости.

Значит, в правильный тетраэдр не попали середины соседних рёбер тетраэдра, не умаляя общности, можно считать, что это M_{BD} и M_{CD}. Треугольник $M_{AB}M_{AC}M_{BC}$ — серединный треугольник треугольника ABC, а значит, подобен ему с коэффициентом $\frac{1}{2}$, откуда $AB = AC = BC = 1$. Кроме того, $BD = 2M_{AB}M_{AD} = 1$ и $CD = 2M_{AC}M_{AD} = 1$ так как $M_{AB}M_{AD}$ и $M_{AC}M_{AD}$ средние линии в треугольниках ABD и ACD соответственно.

Осталось найти длину ребра AD. Пусть X — точка пересечения медиан треугольника ABC (и, очевидно, треугольника $M_{AB}M_{AC}M_{BC}$ тоже). Тогда $M_{AD}X$ — высота правильного тетраэдра с ребром $\frac{1}{2}$, то есть равна $\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; в то же время AX составляет $\dfrac{2}{3}$ от медианы треугольника ABC, то есть $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Кроме того, они перпендикулярны, так как $M_{AD}X$ высота тетраэдра и перпендикулярна всей плоскости ABC, следовательно, по теореме Пифагора $M_{AD}A^2 = M_{AD}X^2 + AX^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. Ну а $AD = 2M_{AD}A = \sqrt{2}$.

8. (5 баллов) Докажите, что для положительных x, y, z выполняется неравенство

$$(x + 9y + 3z)(x + y + z)(2x + 6y + 3z) \geqslant 324xyz$$

Рассмотрим первые две скобки и заметим, что

$$(x + 9y + 3z)(x + y + z) = (x + 3y)^2 + 4z(x + 3y) + 3z^2 + 4xy.$$

Тогда мы можем переписать требуемое неравенство в виде

$$\left(\frac{(x + 3y)^2 + 4z(x + 3y) + 3z^2}{xy} + 4\right)\cdot\frac{2x + 6y + 3z}{z} \geqslant 324$$

Теперь зафиксируем z и $x+3y$ и будем сдвигать x и $3y$ друг к другу. При этом xy увеличивается, и достигает максимума при $x = 3y$, остальные части выражения остаются постоянными. Значит, требуемое равенство будет следовать из неравенства, полученного подстановкой в него $x = 3y$ т.е.

$$(12y + 3z)(4y + z)(12y + 3z) \geqslant 972y^2z.$$

Обозначим $t = y/z$, тогда неравенство превращается в

$$9(4t + 1)^3 - 972t^2 \geqslant 0.$$

Взяв производную, можно убедиться, что минимум левой части достигается при $t = 1/2$ и равен 0, что доказывает требуемое неравенство. (таким образом, минимум исходного выражения достигается при $x : y : z = 3 : 1 : 2$.)

11 класс
3 вариант

1. (2 балла) Мальчик Вася выписал в тетрадку ненулевые коэффициенты многочлена $P(x)$ восьмой степени. Затем у получившегося многочлена вычислил производную и выписал её ненулевые коэффициенты, и так далее, пока не получилась константа, которую он также выписал.

Какое наименьшее количество различных чисел у него могло получиться?

Коэффициенты выписываются с учётом знака, свободные члены также выписываются, если имеется одночлен вида $\pm x^n$, выписывается ± 1.

Ответ: 8

Решение: Оценка: так как многочлен имеет степень 8, у него совершенно точно есть ненулевой коэффициент при x^8, назовём его a. Тогда старший коэффициент производной этого многочлена равен $8a$, старший коэффициент второй производной равен $8 \cdot 7a$ и т.д., старшие коэффиценты седьмой и восьмой производных равны $8!a$, причем все эти числа, кроме двух последних, различны, таким образом 8 различных чисел точно есть.

Пример: $\dfrac{x^8}{8!} + \dfrac{x^7}{7!} + \ldots + x + 1$ даёт нам ровно 8 различных чисел, так как каждый следующий одночлен — производная предыдущего.

Также подходит любой многочлен пропорциональный данному, а также отличающийся от пропорционального данному вычёркиванием некоторых одночленов, например x^8. Легко доказать, что других примеров нет, впрочем, в задаче это не требуется.

2. (2 балла) Решите уравнение или докажите, что оно не имеет решений: $4\sin x - 3\cos x = 5 + \frac{1}{|x|}$

Ответ: Решений нет.

Решение:
$4\sin x - 3\cos x = 5\sin(x - \operatorname{arctg}\frac{3}{4}) \leqslant 5 < 5 + \frac{1}{|x|}$, следовательно, равенство невозможно.

3. (3 балла) В некоторой стране 200 городов. Министерство авиации требует, чтобы каждые два города были соединены двусторонним авиарейсом ровно одной авиакомпании и чтобы рейсами каждой авиакомании можно было бы добраться от любого города до любого (возможно, с пересадками). При каком наибольшем числе авиакомпаний это возможно?

Ответ: 100

Решение: Оценка: для того, чтобы соединить все города, авиакомпании надо иметь хотя бы 199 рейсов. Всего пар городов $200 \cdot 199/2$, значит, авиакомпаний не более 100.

Пример: обозначим города за $a_1, a_2, \ldots a_{100}, b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ каким-нибудь образом. Тогда авиакомпания с номером k будет соединять

1) города a_k и b_k;
2) a_k и каждый город a_i, где $i < k$
3) a_k и каждый город b_i, где $i > k$
4) b_k и каждый город a_i, где $i > k$
5) b_k и каждый город b_i, где $i < k$.

Таким образом, города a_i и a_j оказываются соединены рейсом авиакомпании с номером $\max(a_i, a_j)$, города b_i и b_j — авиакомпании с номером $\max(b_i, b_j)$, города a_i и b_j — авиакомпании с номером $\min(b_i, b_j)$.

4. (3 балла) Докажите, что при $n = 9002$ сумма биномиальных коэффициентов с шагом 6, т.е. $C_n^1 + C_n^7 + \ldots + C_n^{n-1}$, дает остаток 1 при делении на 3.

C_n^k — количество способов выбрать из n предметов k, что составляет $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ если $0 \leqslant k \leqslant n$ и 0 в остальных случаях.

Решение:
Легко проверить, что $C_n^k = C_{n-3}^{k-3} + 3C_{n-3}^{k-2} + 3C_{n-3}^{k-1} + C_{n-3}^k$, следовательно, C_n^k даёт такой же остаток при делении на 3, что и $C_{n-3}^{k-3} + C_{n-3}^k$.

Таким образом, $C_n^1 + C_n^7 + \ldots + C_n^{n-1}$ даёт такой же остаток при делении на 3, что и $C_{n-3}^1 + C_{n-3}^4 + \ldots + C_{n-3}^{n-7} + C_{n-3}^{n-4}$ (здесь отброшены два крайних слагаемых, равные 0).
Обозначим эту сумму за S_{n-3}.
Аналогично переходим к $2C_{n-6}^1 + 2C_{n-3}^4 + \ldots + 2C_{n-3}^{n-7} + 2C_{n-3}^{n-4} = 2S_{n-6}$.
Применив эту процедуру ещё 2998 раз, получаем, что формула из условия даёт такой же остаток при делении на 3, что и $2^{2999}S_2 = 4^{1499} \cdot 2C_2^1 = 4^{1500}$, что даёт остаток 1 при делении на 3.

5. (3 балла) Три окружности, радиусов $\sqrt{13}$, $\sqrt{13}$ и $2\sqrt{13 - 6\sqrt{3}}$, расположены так, что треугольник, образованный центрами этих окружностей, является равносторонним со стороной $\sqrt{39}$. Найдите, чему равен радиус описанной вокруг треугольника, каждая из вершин которого является точкой пересечения двух из этих окружностей, дальней от центра третьей окружности.

Ответ: $4\sqrt{39} - 6\sqrt{13}$

Решение:
Пусть A, B, C — указанные точки пересечения первой и второй, второй и третьей, первой и третьей окружностей соответственно, O_1, O_2, O_3 — центры этих окружностей.

Радиусы первой и второй окружностей равны, следовательно, точка A попадёт на серединный перпендикуляр к O_1O_2. Треугольник, образованный центрами окружностей, правильный, поэтому точка O_3 также окажется на этом серединном перпендикуляре. Следовательно, вся картинка симметрича относительно этого серединного перпенликуляра, в частности, точки B и C симметричны друг другу.

Треугольник O_1AO_2 равнобедренный с вершиной A; кроме того, его стороны равны $\sqrt{13}$, $\sqrt{13}$ и $\sqrt{39}$ откуда легко ищутся его углы: 30°, 30° и 120°.

$\angle O_1AC$ обозначим за α, $\angle CO_1O_3$ за β. В треугольнике CO_1O_3 мы знаем все стороны, значит, мы можем найти

$$\cos\beta = \frac{13+39-4\cdot 13-6\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{39}} = \frac{12}{13}.$$

Соответственно, $\sin\beta = \frac{5}{13}$. Далее, $\angle AO_1C = \angle AO_1O_2 + \angle O_2O_1O_3 + \angle O_3O_1C = 30^\circ + 60^\circ + \beta = 90^\circ + \beta$

Треугольник CO_1A равнобедренный с углами α, $90^\circ+\beta$ и α, следовательно, $\alpha = \dfrac{90^\circ-\beta}{2}$, откуда

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos(90^\circ-\beta)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sin\beta}{2}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Соответственно, $\sin\alpha = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Кроме того, $AC = 2O_1A\cos\alpha = 2\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = 6$.
$\angle BAC = 120 - 2\alpha = 30 + \beta$, следовательно,

$$\sin\angle BAC = \frac{1}{2}\cdot\frac{12}{13} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{5}{13} = \frac{12+5\sqrt{3}}{26}.$$

$$\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{12}{13} - \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{13} = \frac{12\sqrt{3}-5}{26}.$$

$$\sin\angle ABC = \cos\frac{\angle BAC}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\angle BAC}{2}} = \sqrt{\frac{21+12\sqrt{3}}{52}} = \frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{13}}.$$

По теореме синусов,

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{6}{2\cdot\dfrac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{13}}} = \frac{6\sqrt{13}}{2\sqrt{3}+3} = \frac{6\sqrt{13}(2\sqrt{3}-3)}{3} = 4\sqrt{39}-6\sqrt{13}$$

6. (3 балла) Найдите суммарную длину промежутков на числовой оси, на которых выполняются неравенства $x<1$ и $\operatorname{tg}\log_4 x > 0$.

Ответ:

$$\frac{1}{1+2^\pi} = \frac{1}{1+4^{\frac{\pi}{2}}}$$

Решение:

Заметим, что нас интересуют только положительные x.

Если $\operatorname{tg}\log_4 x > 0$, значит, $k\pi < \log_4 x < (k+\frac{1}{2})\pi$ для какого-то целого k, то есть $4^{k\pi} < x < 4^{(k+\frac{1}{2})\pi}$. Так как $x<1$, нас интересуют только отрицательные k. Обозначим $n=-k$. Число n принимает положительные значения, тогда длина промежутка положительности нашей функции, имеющего номер n при нумерации с левой стороны , равна $4^{-(n-\frac{1}{2})\pi} - 4^{-n\pi} = 4^{-(n-1)\pi}(4^{-\frac{\pi}{2}} - 4^{-\pi})$.

Следовательно, длины всех промежутков составляют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $4^{-\pi}$, а их сумма равна $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^{-(2n-1)\pi} = \dfrac{4^{-\frac{\pi}{2}}-4^{-\pi}}{1-4^{-\pi}} = \dfrac{4^{-\frac{\pi}{2}}}{1+4^{-\frac{\pi}{2}}} = \dfrac{1}{1+4^{\frac{\pi}{2}}} = \dfrac{1}{1+2^\pi}$.

7. (4 балла) Четыре из шести середин рёбер некоего тетраэдра образуют правильный тетраэдр с ребром 2. Найдите рёбра исходного тетраэдра.

Ответ: Пять рёбер длины 4, одно ребро длины $4\sqrt{2}$.

Решение:

Обозначим вершины тетраэдра A, B, C, D. Середину ребра AB обозначим за M_{AB}, аналогичные обозначения введём для остальных рёбер.

Пусть в правильный тетраэдр не попали середины скрещивающихся рёбер исходного тетраэдра, не умаляя общности, можно считать, что это M_{AB} и M_{CD}. Заметим, что отрезок $M_{BC}M_{BD}$ средняя линия в треугольнике BCD, значит, он равен половине ребра CD по длине и параллелен этому ребру. Но то же самое можно сказать и про ребро $M_{AC}M_{AD}$, значит, эти отрезки параллельны и равны, т.е. образуют параллелограмм. Таким образом, четыре вершины, которые должны образовывать правильный тетраэдр, оказались лежащими в одной плоскости.

Значит, в правильный тетраэдр не попали середины соседних рёбер тетраэдра, не умаляя общности, можно считать, что это M_{BD} и M_{CD}. Треугольник $M_{AB}M_{AC}M_{BC}$ — серединный треугольник треугольника ABC, а значит, подобен ему с коэффициентом $\frac{1}{2}$, откуда $AB = AC = BC = 4$. Кроме того, $BD = 2M_{AB}M_{AD} = 4$ и $CD = 2M_{AC}M_{AD} = 4$ так как $M_{AB}M_{AD}$ и $M_{AC}M_{AD}$ средние линии в треугольниках ABD и ACD соответственно.

Осталось найти длину ребра AD. Пусть X — точка пересечения медиан треугольника ABC (и, очевидно, треугольника $M_{AB}M_{AC}M_{BC}$ тоже). Тогда $M_{AD}X$ — высота правильного тетраэдра с ребром 2, то есть равна $2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; в то же время AX составляет $\dfrac{2}{3}$ от медианы треугольника ABC, то есть $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Кроме того, они перпендикулярны, так как $M_{AD}X$ высота тетраэдра и перпендикулярна всей плоскости ABC, следовательно, по теореме Пифагора $M_{AD}A^2 = M_{AD}X^2 + AX^2 = \dfrac{8+16}{3} = 8$. Ну а $AD = 2M_{AD}A = 4\sqrt{2}$.

8. (5 баллов) Докажите, что для положительных x, y, z выполняется неравенство

$$(x+8y+2z)(x+2y+z)(x+4y+4z) \geqslant 256xyz$$

Решение:

Рассмотрим первые две скобки и заметим, что

$$(x+8y+2z)(x+2y+z) = (x+4y)^2 + 3z(x+4y) + 2z^2 + 2xy.$$

Тогда мы можем переписать требуемое неравенство в виде

$$\left(\frac{(x+4y)^2 + 3z(x+4y) + 2z^2}{xy} + 2\right) \cdot \frac{x+4y+4z}{z} \geqslant 256.$$

Теперь зафиксируем z и $x+4y$ и будем сдвигать x и $4y$ друг к другу. При этом xy увеличивается, и достигает максимума при $x = 4y$, остальные части выражения остаются постоянными. Значит, требуемое равенство будет следовать из неравенства, полученного подстановкой в него $x = 4y$ т.е.

$$(12y+2z)(6y+z)(8y+4z) \geqslant 1024y^2z.$$

Обозначим $t = y/z$, тогда неравенство превращается в

$$8(6t+1)^2(2t+1) - 1024t^2 \geqslant 0.$$

Взяв производную, можно убедиться, что минимум левой части достигается при $t = 1/2$ и равен 0, что доказывает требуемое неравенство. (таким образом, минимум исходного выражения достигается при $x : y : z = 4 : 1 : 2$.)

11 класс
4 вариант

1. (2 балла) Мальчик Вася выписал в тетрадку ненулевые коэффициенты многочлена $P(x)$ седьмой степени. Затем у получившегося многочлена вычислил производную и выписал её ненулевые коэффициенты, и так далее, пока не получилась константа, которую он также выписал.

Какое наименьшее количество различных чисел у него могло получиться?

Коэффициенты выписываются с учётом знака, свободные члены также выписываются, если имеется одночлен вида $\pm x^n$, выписывается ± 1.

Ответ: 7

Решение: Оценка: так как многочлен имеет степень 7, у него совершенно точно есть ненулевой коэффициент при x^7, назовём его a. Тогда старший коэффициент производной этого многочлена равен $7a$, старший коэффициент второй производной равен $7 \cdot 6a$ и т.д., старшие коэффиценты шестой и седьмой производных равны $7!a$, причем все эти числа, кроме двух последних, различны, таким образом 7 различных чисел точно есть.

Пример: $\dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^6}{6!} + \ldots + x + 1$ даёт нам ровно 7 различных чисел, так как каждый следующий одночлен — производная предыдущего.

Также подходит любой многочлен пропорциональный данному, а также отличающийся от пропорционального данному вычёркиванием некоторых одночленов, например x^7. Легко доказать, что других примеров нет, впрочем, в задаче это не требуется.

2. (2 балла) Решите уравнение или докажите, что оно не имеет решений: $12\sin x + 5\cos x = 13 + \frac{1}{|x|}$

Ответ: Решений нет.

Решение:
$12\sin x + 5\cos x = 13\sin(x + \operatorname{arctg}\frac{5}{12}) \leqslant 13 < 13 + \frac{1}{|x|}$, следовательно, равенство невозможно.

3. (3 балла) В некоторой стране 120 городов. Министерство авиации требует, чтобы каждые два города были соединены двусторонним авиарейсом ровно одной авиакомпании и чтобы рейсами каждой авиакомании можно было бы добраться от любого города до любого (возможно, с пересадками). При каком наибольшем числе авиакомпаний это возможно?

Ответ: 60

Решение: Оценка: для того, чтобы соединить все города, авиакомпании надо иметь хотя бы 119 рейсов. Всего пар городов $120 \cdot 119/2$, значит, авиакомпаний не более 60.

Пример: обозначим города за $a_1, a_2, \ldots a_{60}, b_1, b_2, \ldots, b_{60}$ каким-нибудь образом. Тогда авиакомпания с номером k будет соединять

1) города a_k и b_k;
2) a_k и каждый город a_i, где $i < k$
3) a_k и каждый город b_i, где $i > k$
4) b_k и каждый город a_i, где $i > k$
5) b_k и каждый город b_i, где $i < k$.

Таким образом, города a_i и a_j оказываются соединены рейсом авиакомпании с номером $\max(a_i, a_j)$, города b_i и b_j — авиакомпании с номером $\max(b_i, b_j)$, города a_i и b_j — авиакомпании с номером $\min(b_i, b_j)$.

4. (3 балла) Докажите, что при $n = 12002$ сумма биномиальных коэффициентов с шагом 6, т.е. $C_n^1 + C_n^7 + \ldots + C_n^{n-1}$, дает остаток 1 при делении на 3.

C_n^k — количество способов выбрать из n предметов k, что составляет $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ если $0 \leqslant k \leqslant n$ и 0 в остальных случаях.

Решение:

Легко проверить, что $C_n^k = C_{n-3}^{k-3} + 3C_{n-3}^{k-2} + 3C_{n-3}^{k-1} + C_{n-3}^k$, следовательно, C_n^k даёт такой же остаток при делении на 3, что и $C_{n-3}^{k-3} + C_{n-3}^k$.

Таким образом, $C_n^1 + C_n^7 + \ldots + C_n^{n-1}$ даёт такой же остаток при делении на 3, что и $C_{n-3}^1 + C_{n-3}^4 + \ldots + C_{n-3}^{n-7} + C_{n-3}^{n-4}$ (здесь отброшены два крайних слагаемых, равные 0).

Обозначим эту сумму за S_{n-3}.

Аналогично переходим к $2C_{n-6}^1 + 2C_{n-3}^4 + \ldots + 2C_{n-3}^{n-7} + 2C_{n-3}^{n-4} = 2S_{n-6}$.

Применив эту процедуру ещё 3998 раз, получаем, что формула из условия даёт такой же остаток при делении на 3, что и $2^{3999}S_2 = 4^{1999} \cdot 2C_2^1 = 4^{2000}$, что даёт остаток 1 при делении на 3.

5. (3 балла) Три окружности, радиусов $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ и $\sqrt{\frac{13-6\sqrt{3}}{13}}$, расположены так, что треугольник, образованный центрами этих окружностей, является равносторонним со стороной $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите, чему равен радиус описанной вокруг треугольника, каждая из вершин которого является точкой пересечения двух из этих окружностей, дальней от центра третьей окружности.

Ответ: $2\sqrt{3} - 3$

Решение:

Пусть A, B, C — указанные точки пересечения первой и второй, второй и третьей, первой и третьей окружностей соответственно, O_1, O_2, O_3 — центры этих окружностей.

Радиусы первой и второй окружностей равны, следовательно, точка A попадёт на серединный перпендикуляр к O_1O_2. Треугольник, образованный центрами окружностей, правильный, поэтому точка O_3 также окажется на этом серединном перпендикуляре. Следовательно, вся картинка симметрича относительно этого серединного перпенликуляра, в частности, точки B и C симметричны друг другу.

Треугольник O_1AO_2 равнобедренный с вершиной A; кроме того, его стороны равны $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда легко ищутся его углы: $30°$, $30°$ и $120°$.

$\angle O_1AC$ обозначим за α, $\angle CO_1O_3$ за β. В треугольнике CO_1O_3 мы знаем все стороны, значит, мы можем найти

$$\cos\beta = \frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-2\cdot\frac{13-6\sqrt{3}}{13}}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{13}.$$

Соответственно, $\sin\beta = \frac{5}{13}$. Далее, $\angle AO_1C = \angle AO_1O_2 + \angle O_2O_1O_3 + \angle O_3O_1C = 30° + 60° + \beta = 90° + \beta$

Треугольник CO_1A равнобедренный с углами α, $90° + \beta$ и α, следовательно, $\alpha = \dfrac{90° - \beta}{2}$, откуда

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos(90°-\beta)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sin\beta}{2}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Соответственно, $\sin\alpha = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Кроме того, $AC = 2O_1A\cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$.
$\angle BAC = 120 - 2\alpha = 30 + \beta$, следовательно,

$$\sin\angle BAC = \frac{1}{2}\cdot\frac{12}{13} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{5}{13} = \frac{12+5\sqrt{3}}{26}.$$

$$\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{12}{13} - \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{13} = \frac{12\sqrt{3}-5}{26}.$$

$$\sin\angle ABC = \cos\frac{\angle BAC}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\angle BAC}{2}} = \sqrt{\frac{21+12\sqrt{3}}{52}} = \frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{13}}.$$

По теореме синусов,

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{\dfrac{3}{\sqrt{13}}}{2\cdot\dfrac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{13}}} = \frac{3}{2\sqrt{3}+3} = \frac{3(2\sqrt{3}-3)}{3} = 2\sqrt{3}-3$$

6. (3 балла) Найдите суммарную длину промежутков на числовой оси, на которых выполняются неравенства $|x| < 1$ и $\operatorname{tg}\log_5|x| < 0$.

Ответ:

$$\frac{2\cdot 5^{\frac{\pi}{2}}}{1+5^{\frac{\pi}{2}}}$$

Решение:

Достаточно решить задачу для положительных x, а потому умножить результат на 2.

Если $\operatorname{tg}\log_5 x < 0$, значит, $\pi(k-\frac{1}{2}) < \log_5 x < \pi k$ для какого-то целого k, то есть $5^{\pi(k-\frac{1}{2})} < x < 5^{\pi k}$. Так как $x < 1$, нас интересуют только неположительные k. Обозначим $n = -k$. Число n принимает неотрицательные значения, тогда длина промежутка отрицательности нашей функции, имеющего номер n при нумерации с левой стороны (нумерация начинается с 0), равна $5^{-\pi n} - 5^{-\pi(n+\frac{1}{2})} = 5^{-\pi n}(1-5^{-\frac{\pi}{2}})$.

Следовательно, длины всех промежутков составляют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $5^{-\pi}$, а их сумма равна $\sum\limits_{n=0}^{\infty}5^{-\pi n}(1-5^{-\frac{\pi}{2}}) = \dfrac{1-5^{-\frac{\pi}{2}}}{1-5^{-\pi}} = \dfrac{1}{1+5^{-\frac{\pi}{2}}} = \dfrac{5^{\frac{\pi}{2}}}{1+5^{\frac{\pi}{2}}}$.

Умножая это число на 2, получаем ответ.

7. (4 балла) Четыре из шести середин рёбер некоего тетраэдра образуют правильный тетраэдр с ребром 3. Найдите рёбра исходного тетраэдра.

Ответ: Пять рёбер длины 6, одно ребро длины $6\sqrt{2}$.

Решение:

Обозначим вершины тетраэдра A, B, C, D. Середину ребра AB обозначим за M_{AB}, аналогичные обозначения введём для остальных рёбер.

Пусть в правильный тетраэдр не попали середины скрещивающихся рёбер исходного тетраэдра, не умаляя общности, можно считать, что это M_{AB} и M_{CD}. Заметим, что отрезок $M_{BC}M_{BD}$ средняя линия в треугольнике BCD, значит, он равен половине ребра CD по длине и параллелен этому ребру. Но то же самое можно сказать и про ребро $M_{AC}M_{AD}$, значит, эти отрезки параллельны и равны, т.е. образуют параллелограмм. Таким образом, четыре вершины, которые должны образовывать правильный тетраэдр, оказались лежащими в одной плоскости.

Значит, в правильный тетраэдр не попали середины соседних рёбер тетраэдра, не умаляя общности, можно считать, что это M_{BD} и M_{CD}. Треугольник $M_{AB}M_{AC}M_{BC}$ — серединный треугольник треугольника ABC, а значит, подобен ему с коэффициентом $\frac{1}{2}$, откуда $AB = AC = BC = 6$. Кроме того, $BD = 2M_{AB}M_{AD} = 6$ и $CD = 2M_{AC}M_{AD} = 6$ так как $M_{AB}M_{AD}$ и $M_{AC}M_{AD}$ средние линии в треугольниках ABD и ACD соответственно.

Осталось найти длину ребра AD. Пусть X — точка пересечения медиан треугольника ABC (и, очевидно, треугольника $M_{AB}M_{AC}M_{BC}$ тоже). Тогда $M_{AD}X$ — высота правильного тетраэдра с ребром 3, то есть равна $3 \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \sqrt{6}$; в то же время AX составляет $\dfrac{2}{3}$ от медианы треугольника ABC, то есть $2sqrt3$. Кроме того, они перпендикулярны, так как $M_{AD}X$ высота тетраэдра и перпендикулярна всей плоскости ABC, следовательно, по теореме Пифагора $M_{AD}A^2 = M_{AD}X^2 + AX^2 = 6 + 12 = 18$. Ну а $AD = 2M_{AD}A = 6\sqrt{2}$.

8. (5 баллов) Докажите, что для положительных x, y, z выполняется неравенство

$$(x + 9y + 3z)(x + 4y + 2z)(2x + 12y + 9z) \geqslant 1029xyz$$

Решение:

Рассмотрим первые две скобки и заметим, что

$$(x + 9y + 3z)(x + 4y + 2z) = (x + 6y)^2 + 5z(x + 6y) + 6z^2 + xy.$$

Тогда мы можем переписать требуемое неравенство в виде

$$\left(\frac{(x + 6y)^2 + 5z(x + 6y) + 6z^2}{xy} + 1\right) \cdot \frac{2x + 12y + 9z}{z} \geqslant 1029.$$

Теперь зафиксируем z и $x+6y$ и будем сдвигать x и $6y$ друг к другу. При этом xy увеличивается, и достигает максимума при $x = 6y$, остальные части выражения остаются постоянными. Значит, требуемое равенство будет следовать из неравенства, полученного подстановкой в него $x = 6y$ т.е.

$$(15y + 3z)(10y + 2z)(24y + 9z) \geqslant 1029 \cdot 6y^2z.$$

Обозначим $t = y/z$, тогда неравенство превращается в

$$18(5t + 1)^2(8t + 3) - 1029 \cdot 6t^2 \geqslant 0.$$

Взяв производную, можно убедиться, что минимум левой части достигается при $t = 1/2$ и равен 0, что доказывает требуемое неравенство. (таким образом, минимум исходного выражения достигается при $x : y : z = 6 : 1 : 2$.)