10 класс
1 вариант

1. (2 балла) Докажите неравенство для всех $x \geqslant 1$:

$$x^5 - \frac{1}{x^4} \geqslant 9(x-1)$$

Решение:

Преобразуем левую часть:

$$(x-1)\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) \geqslant 9(x-1).$$

Это неравенство выполняется, так как $(x-1) \geqslant 0$ и $x^k + \frac{1}{x^k} \geqslant 2$.

2. (2 балла) Последовательность x_n задана следующими условиями: $x_1 = 3$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \frac{4}{3}x_n = 4$. Найдите x_{2015}.

Ответ: $x_{2015} = \frac{3}{4^{2014}}$.

Решение:

Заметим, что равенство $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \frac{4}{3}x_n = 4$ для $n = 1$ также выполняется: $\frac{4}{3}x_1 = 4$.

Для $n \geqslant 2$ вычитая из равенства $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \frac{4}{3}x_n = 4$ равенство $x_1 + x_2 + \ldots + \frac{4}{3}x_{n-1} = 4$, получаем, что $\frac{4}{3}x_n - \frac{1}{3}x_{n-1} = 0$, откуда $x_n = \frac{1}{4}x_{n-1}$ для $n \geqslant 2$.

Таким образом, x_n – геометрическая прогрессия с первым членом 3 и частным $\frac{1}{4}$, а значит $x_{2015} = \frac{3}{4^{2014}}$.

3. (3 балла) Докажите, что не существует такой дробно-линейной функции, которая в сумме со своей обратной функцией даёт -2 в каждой точке, где обе эти функции определены.

На всякий случай: постоянную функцию мы не считаем дробно-линейной.

Решение:

Пусть $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, тогда $f^{-1}(x) = -\frac{dx-b}{cx-a}$.

$$f(x)+f^{-1}(x) = \frac{ax+b}{cx+d} - \frac{dx-b}{cx-a} = \frac{(ax+b)(cx-a)-(dx-b)(cx+d)}{(cx+d)(cx-a)} = \frac{(a-d)cx^2 + (-a^2-d^2+2bc)x + b}{c^2x^2 + cx(d-a) - ad}$$

Так как $f(x) + f^{-1}(x) = -2$, получаем, что

$$(a-d)cx^2 + (-a^2-d^2+2bc)x + b(d-a) = -2(c^2x^2 + cx(d-a) - ad)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях, получаем систему:

$$\begin{cases} (a-d)c = -2c^2 \\ -a^2 - d^2 + 2bc = -2c(d-a) \\ b(d-a) = -2ad \end{cases}$$

Если $c = 0$, из второго уравнения можно получить, что $a^2 + d^2 = 0$, т.е. знаменатель $f(x)$ равен 0, что невозможно. Значит, первое уравнение можно сократить на $-c$ и подставить $2c$ вместо $d - a$ в оставшиеся два уравнения:

$$\begin{cases} d - a = 2c \\ -a^2 - d^2 + 2bc = -4c^2 \\ 2bc = -2ad \end{cases}$$

Подставляя $-2ad$ вместо $2bc$ во второе уравнение, получаем $-a^2 - d^2 - 2ad = -4c^2$. С другой стороны, $a^2 - 2ad + d^2 = (a-d)^2 = 4c^2$. Складывая эти равенства, получаем $-4ad = 0$, то есть какое-то из чисел a и d равно 0. Тогда из третьего уравнения системы получаем, что одно из чисел b и c также равно 0.

Если $a = b = 0$, то числитель f равен 0, что невозможно. Аналогично равенство нулю любой из трёх оставшихся возможных пар чисел даёт равенство нулю числителя или знаменателя функции или её обратной.

4. (3 балла) Известно, что $\operatorname{tg} a$ и $\operatorname{tg} 3a$ целые. Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} a$.

Ответ: -1, 0 или 1

Решение:

Ответ 0, очевидно, подходит. В дальнейшем будем считать, что $\operatorname{tg} a \neq 0$.

Запишем формулу тангенса тройного угла:

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a} = \frac{\operatorname{tg} a(3 - \operatorname{tg}^2 a)}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}$$

Чтобы $\operatorname{tg} 3a$ был целым, числитель должен делиться на знаменатель. Так как $\operatorname{tg} a$ и $1 - 3\operatorname{tg}^2 a$ взаимно просты, получаем, что $3 - \operatorname{tg}^2 a$ делится на $1 - 3\operatorname{tg}^2 a$ и, соответственно, на $3\operatorname{tg}^2 a - 1 > 0$ при $\operatorname{tg} a \neq 0$.

Легко проверить, что $\operatorname{tg} a = \pm 1$ подходят. Во всех остальных случаях $3 - \operatorname{tg}^2 a < 0$, то есть из делимости этого числа на $3\operatorname{tg}^2 a - 1$ следует, что $\operatorname{tg}^2 a - 3 \geqslant 3\operatorname{tg}^2 a - 1$, то есть $2\operatorname{tg}^2 a \leqslant -2$, что неверно. Значит, других ответов, кроме полученных ранее, нет.

5. (3 балла) Числа a, b и c – различные корни кубического многочлена $x^3 + ax^2 + bx - c$. Найдите их.

Ответ: $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$.

Решение:

Примерив теорему Виета, получим систему

$$\begin{cases} a + b + c = -a \\ ab + ac + bc = b \\ abc = c \end{cases}.$$

Пусть $c = 0$. Тогда третье уравнение становится тождеством, а первые два превращаются в

$$\begin{cases} a + b = -a \\ ab = b \end{cases}.$$

Так как b и c различны, значит $b \neq 0$ и из второго уравнения получам, что $a = 1$. Следовательно, $b = -2a = -2$.

Если же $c \neq 0$, из третьего уравнения исходной системы мы получаем, что $ab = 1$, то есть $b = \frac{1}{a}$. Тогда из первого уравнения $c = -2a - b = -2 - \frac{1}{a}$.

Второе уравнение исходной системы приобретает вид:

$$1 + \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(-2a - \frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a}$$

$$2a^2 + 2 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = 0$$

При отрицательных a все слагаемые левой части положительны.

При $a > 1$ выполняются неравенства $2 + \frac{1}{a^2} > 0$ и $2a^2 - \frac{1}{a} > 0$.

При $0 < a \leqslant 1$ выполняются неравенства $2 + 2a^2 > 0$ и $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} > 0$.

Таким образом, левая часть всегда больше нуля и уравнение не имеет решений.

Значит, нас устраивает только ответ из случая $c = 0$.

6. (3 балла) Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 13$, $BC = 20$, $AC = 21$. На стороне AB отмечена точка K, на стороне AC – точка L, на стороне BC – точка N. Известно, что $AK = 4$, $CN = 1$, $CL = \frac{20}{21}$. Через точку K провели прямую, параллельную NL, она пересекла сторону AC в точке M. Найдите площадь четырёхугольника $NLMK$.

Ответ: $\frac{493737}{11830} = 41\frac{8707}{11830}$

Решение:
Площадь треугольника ABC по формуле Герона составляет 126.

$$S_{CLN} = \frac{CN \cdot CL}{BC \cdot AC} \cdot S_{ABC} = \frac{1 \cdot \frac{20}{21}}{20 \cdot 21} \cdot 126 = \frac{126}{21^2} = \frac{2}{7}.$$

$$S_{BKN} = \frac{BK \cdot BN}{AB \cdot BC} \cdot S_{ABC} = \frac{19 \cdot 9}{13 \cdot 20} \cdot 126 = \frac{10773}{130}.$$

Проведём через точку B прямую, параллельную NL. Она пересечёт сторону AC в точке X. Треугольники CNL и CBX подобны, следовательно $CX = \frac{CB \cdot CL}{CN} = \frac{20 \cdot \frac{20}{21}}{1} = \frac{400}{21}$, откуда $AX = AC - CX = 21 - \frac{400}{21} = \frac{41}{21}$.

Треугольник MKA подобен треугольнику XBA с коэффициентом $\frac{AL}{AB} = \frac{4}{13}$.

$$S_{MKA} = \frac{16}{169} S_{XBA} = \frac{16}{169} \cdot \frac{AX}{AC} \cdot S_{ABC} = \frac{16}{169} \cdot \frac{\frac{41}{21}}{21} \cdot 126 = \frac{1312}{1183}.$$

$$S_{NLMK} = S_{ABC} - S_{CLN} - S_{BKN} - S_{MKA} = 126 - \frac{2}{7} - \frac{10773}{130} - \frac{1312}{1183} = \frac{493737}{11830} = 41\frac{8707}{11830}$$

7. (3 балла) Петя и Вася играют в игру. У каждого есть по одному ходу: Петя рисует на плоскости два квадрата 3×3, а Вася меняет положение одного из квадратов при помощи параллельного переноса. Вася выигрывает, если после его хода площадь пересечения квадратов составляет хотя бы 7. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ: Вася.

Решение: Своим ходом Васе достаточно совместить центры двух квадратов. Тогда их вписанные окружности также совпадут. Таким образом, площадь пересечения квадратов составит хотя бы площадь их вписанной окружноси, то есть не более $\frac{9\pi}{4}$.

$$\frac{9\pi}{4} > \frac{9 \cdot 3,14}{4} > \frac{9 \cdot 3,(1)}{4} = 7.$$

Разумеется, это не единственная стратегия.

8. (5 баллов) На площади собралось огромное количество юношей и девушек, некоторые из которых знакомы друг с другом. Всегда ли возможно раздать им галстуки 99 цветов (каждый человек получает один галстук) таким образом, что если какой-то юноша знаком хотя бы с 2015 девушками, то среди этих девушек есть две в галстуках разного цвета и наоборот, если какая-то девушка знакома хотя бы с 2015 юношами, среди них есть юноши в галстуках разных цветов?

Ответ: Нет.

Решение:

Пусть у нас хотя бы $99 \cdot 2015 + 1$ юноша, а множество девушек таково, что для каждого 2014-элементного множества юношей есть девушка (ровно одна) которая знакома со всеми этими мальчиками и больше ни с кем.

Если мы раздадим юношам галстуки 99 цветов, найдётся множество из 2015 юношей в шляпах одного цвета (иначе мальчиков всего не более $99 \cdot 2015$. Тогда для девушки, соответствующей этому множеству, условие задачи не выполняется.

10 класс
2 вариант

1. (2 балла) Докажите неравенство для всех $x \geqslant 1$:

$$x^4 - \frac{1}{x^3} \geqslant 7(x-1)$$

2. (2 балла) Последовательность x_n задана следующими условиями: $x_1 = 2$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \frac{3}{2}x_n = 3$. Найдите x_{1000}.

Ответ: $x_{1000} = \frac{2}{3^{999}}$.

Решение:

Заметим, что равенство $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \frac{3}{2}x_n = 3$ для $n = 1$ также выполняется: $\frac{3}{2}x_1 = 3$.

Для $n \geqslant 2$ вычитая из равенства $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \frac{3}{2}x_n = 2$ равенство $x_1 + x_2 + \ldots + \frac{3}{2}x_{n-1} = 3$, получаем, что $\frac{3}{2}x_n - \frac{1}{2}x_{n-1} = 0$, откуда $x_n = \frac{1}{3}x_{n-1}$ для $n \geqslant 2$.

Таким образом, x_n – геометрическая прогрессия с первым членом 2 и частным $\frac{1}{3}$, а значит $x_{1000} = \frac{2}{3^{999}}$.

3. (3 балла) Докажите, что не существует такой дробно-линейной функции, которая в сумме со своей обратной функцией даёт 2 в каждой точке, где обе эти функции определены.

4. (3 балла) Известно, что $\operatorname{ctg} a$ и $\operatorname{ctg} 3a$ целые. Найдите все возможные значения $\operatorname{ctg} a$.

Ответ: -1, 0 или 1

5. (3 балла) Числа a, b и c – различные корни кубического многочлена $x^3 + ax^2 - bx - c$. Найдите их.

Ответ: $a = -1$, $b = 2$, $c = 0$.

6. (3 балла) Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 21$, $BC = 20$, $AC = 13$. На стороне BC отмечена точка N, на стороне AB – точка L, на стороне AC – точка K. Известно, что $AK = 1$, $CN = 12$, $AL = \frac{13}{21}$. Через точку N провели прямую, параллельную KL, она пересекла сторону AB в точке M. Найдите площадь четырёхугольника $KLMN$.

Ответ: $\frac{14236}{325} = 43\frac{161}{325}$

7. (3 балла) Петя и Вася играют в игру. У каждого есть по одному ходу: Петя рисует на плоскости два квадрата 4×4, а Вася меняет положение одного из квадратов при помощи параллельного переноса. Вася выигрывает, если после его хода площадь пересечения квадратов составляет хотя бы 12. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ: Вася.

8. (5 баллов) На олимпиаде собралось огромное количество мальчиков и девочек, некоторые из которых знакомы друг с другом. Всегда ли возможно раздать им шляпы 100 цветов (каждый человек получает одну шляпу) таким образом, что если какой-то мальчик знаком хотя бы с 2014 девочками, то среди этих девочек есть две в шляпах разного цвета и наоборот, если какая-то девочка знакома хотя бы с 2014 мальчиками, среди них есть мальчики в шляпах разных цветов?

Ответ: Нет.