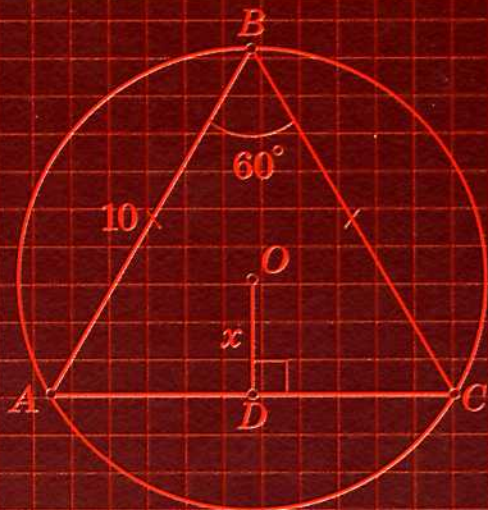




Геометрия

задачи на готовых
чертежах для подготовки
к ГИА и ЕГЭ

7-9 классы



Э.Н. Балаян

ГЕОМЕТРИЯ
Задачи на готовых
чертежах
для подготовки
к ГИА и ЕГЭ
7–9 классы

Издание пятое, исправленное и дополненное

Ростов-на-Дону

 **Феникс**
2013

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
КТК 444
Б20

Балаян Э.Н.

Б20 Геометрия : задачи на готовых чертежах для подготовки к ГИА и ЕГЭ : 7–9 классы / Э.Н. Балаян. — Изд. 5-е, исправл. и дополн. — Ростов н/Д : Феникс, 2013. — 223 с. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-20490-0

Предлагаемое вниманию читателя пособие содержит более 1000 разноуровневых задач и упражнений по основным темам программы геометрии (планиметрии) 7–9 классов, скомпонованных в 3 комплекта по готовым чертежам. 7 класс содержит 12 таблиц, 8 класс — 25, 9 — 12 таблиц.

Эти упражнения дают возможность учителю в течение минимума времени решить и повторить значительно больший объем материала, тем самым наращивать темп работы на уроках.

Кроме того, приводятся краткие теоретические сведения по курсу геометрии 7–9 классов, сопровождаемые определениями, теоремами, основными свойствами и необходимыми справочными материалами. К наиболее трудным задачам приведены решения и указания.

Пособие адресовано учителям математики, репетиторам, студентам — будущим учителям, учащимся общеобразовательных школ, лицеев, колледжей, а также выпускникам для подготовки к ГИА и ЕГЭ.

ISBN 978-5-222-20490-0

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72

© Балаян Э.Н., 2012
© Оформление, ООО «Феникс», 2013

Предисловие

На начальном этапе изучения геометрии основную трудность для учащихся представляет выполнение чертежа. Кроме того, на его выполнение расходуется много времени.

Предлагаемое вниманию читателя пособие ставит целью устранить этот пробел с помощью готовых чертежей.

На уроках геометрии очень часто каждое высказывание и ответ на вопрос должны, как правило, сопровождаться демонстрацией чертежа, причем чертеж и данные из условия задачи должны находиться перед глазами учащихся в процессе решения задачи. Когда учащиеся наглядно видят условие, то легче решают задачи. По этой причине упражнения на готовых чертежах оказывают неоценимую помощь в усвоении и закреплении новых понятий и теорем, дают возможность в течение минимума времени усвоить и повторить значительно больший объем материала, тем самым наращивать темп работы на уроках.

Кроме того, эти упражнения способствуют активизации мыслительной деятельности учащихся, обучают умению грамотно рассуждать, находить в них общее и делать различия, сопоставлять и противопоставлять, делать правильные выводы.

В пособии на всех чертежах равные углы и отрезки отмечены одинаковыми знаками, прямые углы — квадратиками, это дает возможность учащимся значительно быстрее ориентироваться в условиях задачи. Большинство задач предназначены в качестве устных упражнений. Учитель может по своему усмотрению заранее подготовить их на доске или плакатах и отводить на решение по 10–15 минут в начале каждого урока. Поскольку задачи есть и посложнее (они расположены, как правило, в конце каждой таблицы), то учитель может выбрать те или иные упражнения в зависимости от уровня подготовленности класса.

При выполнении упражнений происходит активная мыслительная деятельность учащихся, что в свою очередь приводит к эффективному произвольному запоминанию определений, свойств и признаков изучаемых фигур. Определения, свойства и признаки рассматриваемых фигур периодически повторяются в процессе выполнения разнообразных упражнений, что приводит в итоге к продуктивному запоминанию. Большое значение имеет и то, что учащиеся с большим удовольствием предпочитают выполнять эти упражнения, чем отвечать на теоретические вопросы.

Наконец, предлагаемые упражнения быстро готовят учащихся к запоминанию и самостоятельному решению таких задач, для которых эти упражнения являются элементами.

Предлагаемая методика проведения уроков с использованием упражнений на готовых чертежах, несомненно, способствует повышению творческой активности учащихся, развитию логического мышления, является эффективным средством усвоения и закрепления теоретического материала.

Пособие представляет собой три комплекта упражнений по геометрии для учащихся 7–9 классов, составленных в виде таблиц. Все задания соответствуют ныне действующей программе по геометрии (планиметрии). Пособие может быть использовано учителями, работающими по учебнику Л.С. Атанасяна «Геометрия, 7–11» и другим книгам.

В пособии 12 таблиц для 7 класса, 25 для 8 и 12 для 9 класса. В каждой таблице количество задач различно. Как правило, они составлены в порядке возрастающей трудности, что дает возможность учителю проводить работу дифференцированно.

К наиболее трудным задачам приведены подробные решения с пояснениями, а к остальным — указания и ответы, что дает возможность проверить правильность решения.

Отметим, что предлагаемые упражнения не ставят целью заменить систему задач из вышеуказанных пособий, а являются лишь дополнением к ней. Они дают возможность учителю сэкономить значительную часть времени на изучение соответствующих тем и способствуют усилению практической направленности преподавания геометрии.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

.....

Планиметрия

1. Углы

Углом называется геометрическая фигура (рис. 1), образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.

Точка O — вершина угла, а лучи OA и OB — стороны угла.

Обозначение: $\angle AOB$ или $\angle ab$.

Угол в 90° называется **прямым** (рис. 2).

Угол, меньший прямого, называется **острым** (рис. 3).

Угол, больший прямого, но меньший развернутого, называется **тупым** (рис. 4).

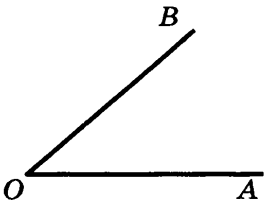


Рис. 1

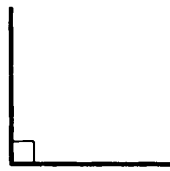


Рис. 2

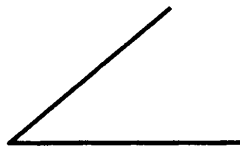


Рис. 3



Рис. 4

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого (рис. 5).

$\angle AOC$ и $\angle DOB$; $\angle BOC$ и $\angle AOD$ — вертикальные.

Вертикальные углы равны: $\angle AOC = \angle DOB$ и $\angle BOC = \angle AOD$.

Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие составляют прямую линию (рис. 6), $\angle AOC$ и $\angle BOC$ — смежные.

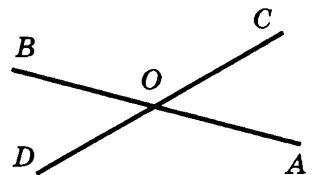


Рис. 5

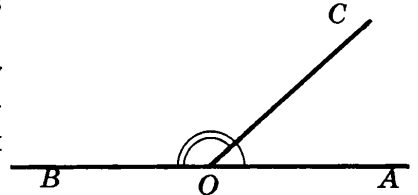


Рис. 6

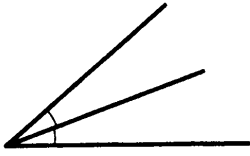


Рис. 7

Сумма смежных углов равна 180° .

Биссектрисой угла называется луч, проходящий между сторонами угла и делящий его пополам (рис. 7).

Биссектрисы вертикальных углов составляют продолжение друг друга (рис. 8).

Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны (рис. 9).

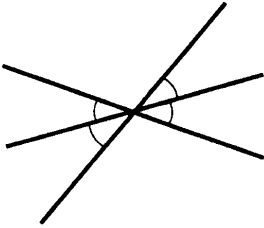


Рис. 8

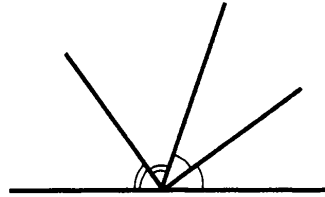


Рис. 9

При пересечении двух прямых a и b третьей c (секущей) образуется 8 углов (рис. 10):

соответственные углы:

$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 7$;

внутренние накрест лежащие:

$\angle 4$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 5$;

внешние накрест лежащие:

$\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$;

внутренние односторонние:

$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$;

внешние односторонние:

$\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$.

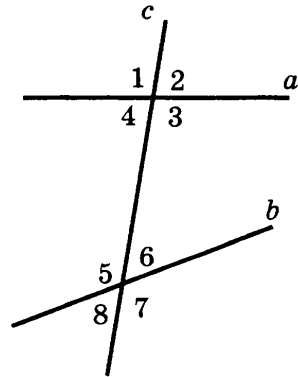


Рис. 10

2. Многоугольник

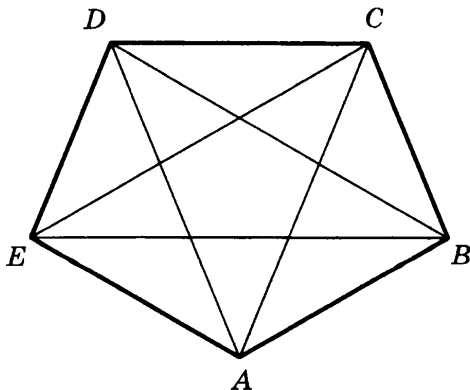


Рис. 11

$ABCDE$ — пятиугольник (рис. 11).

Точки A, B, C, D, E — вершины многоугольника; $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \angle E$ — углы; AB, BC, CD и т. д. — стороны; отрезки AC, AD, BE, BD, CE — диагонали; $P = AB + BC + \dots + EA$ — периметр многоугольника.

Многоугольник называется **выпуклым** (рис. 11), если он целиком расположен по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две

его соседние вершины. В противном случае многоугольник называется **невыпуклым** (рис. 12).

Свойства:

1. Сумма внутренних углов произвольного n -угольника равна $180^\circ \cdot (n - 2)$.

2. Сумма внешних углов выпуклого n -угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360° .

3. В выпуклом n -угольнике из каждой вершины можно провести $(n - 3)$ диагоналей, которые разбивают n -угольник на $(n - 2)$ треугольников.

4. В выпуклом n -угольнике число диагоналей равно $\frac{1}{2}n(n - 3)$.

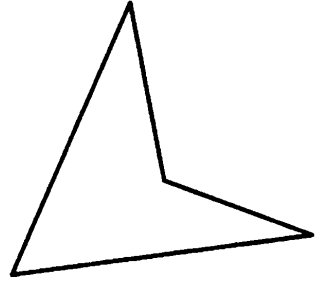


Рис. 12

3. Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник, у которого равны все углы и стороны, называется **правильным**.

Свойства:

1. Каждый угол правильного n -угольника равен $\alpha_n = \frac{180^\circ(n - 2)}{n}$.

2. Около правильного n -угольника можно описать окружность, и притом только одну.

3. В правильный n -угольник можно вписать окружность, и притом только одну.

4. Окружность, вписанная в правильный n -угольник, касается всех сторон n -угольника в их серединах.

5. Центр окружности, описанной около правильного n -угольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же n -угольник.

6. Длина стороны правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса R , равна $a = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$.

7. Длина стороны правильного n -угольника, описанного около окружности радиуса r , равна $a = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$.

4. Треугольник

Треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, последовательно соединяющих эти точки.

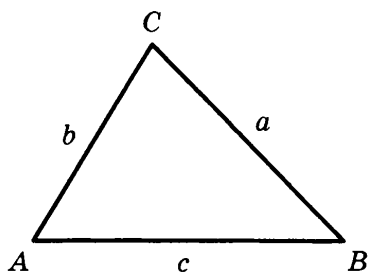


Рис. 13

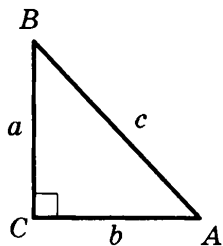


Рис. 14

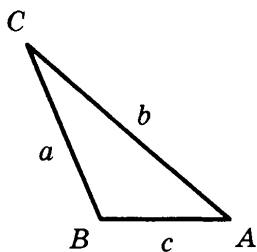


Рис. 15

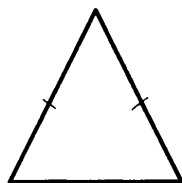


Рис. 16

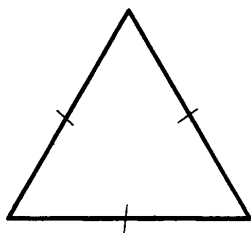


Рис. 17

Точки A, B, C — **вершины** $\triangle ABC$.

Отрезки AB, BC и AC — **стороны**, $\angle A, \angle B$ и $\angle C$ — **углы**.

Стороны треугольника часто обозначают малыми буквами (рис. 13):

$$AB = c, BC = a, AC = b.$$

$P = a + b + c$ — **периметр** треугольника.

Треугольник, у которого все углы острые, называется **остроугольным** (рис. 13).

Треугольник, у которого угол прямой, называется **прямоугольным** (рис. 14).

Стороны, образующие прямой угол, называются **катетами** (a и b), а сторона, лежащая против прямого угла, — **гипотенузой** (c).

Треугольник с тупым углом называется **тупоугольным** (рис. 15).

Треугольник, у которого две стороны равны, называется **равнобедренным** (рис. 16).

Равные стороны называются **боковыми**, а третья сторона — **основанием** равнобедренного треугольника.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним** (рис. 17).

Каждый угол равностороннего треугольника равен 60° .

Свойства равнобедренного треугольника:

1. Углы при основании равны.
2. Биссектриса, проведенная к основанию, является одновременно медианой и высотой.
3. Высота, проведенная к основанию, является одновременно медианой и биссектрисой.

4. Медиана, проведенная к основанию, является одновременно высотой и биссектрисой.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника (рис. 18).

$\angle CBD$ — внешний угол треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним (рис. 18): $\angle CBD = \angle A + \angle C$.

Отрезок, соединяющий середины двух сторон, называется **средней линией** треугольника (рис. 19).

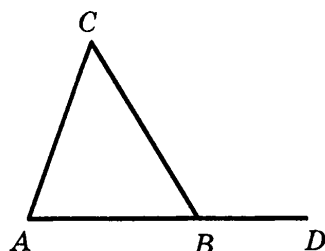


Рис. 18

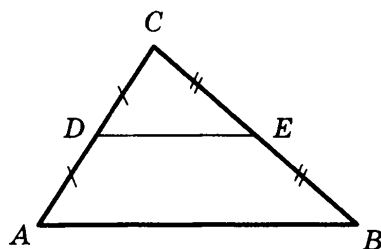


Рис. 19

5. Признаки равенства треугольников

I признак (признак равенства по двум сторонам и углу между ними)

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 20).

$$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, \angle A = \angle A_1.$$

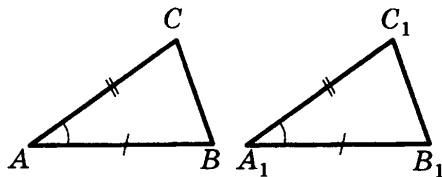


Рис. 20

II признак (признак равенства по стороне и прилежащим к ней углам)

Если сторона и два прилежащих угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 21).

$$AB = A_1B_1, \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1.$$

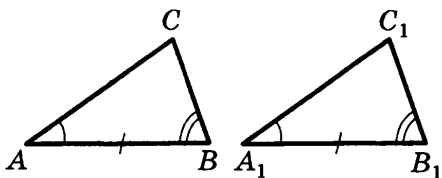


Рис. 21

III признак (признак равенства по трем сторонам)

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 22).

$$AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, AC = A_1C_1.$$

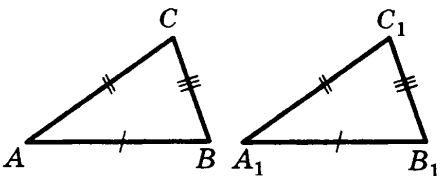


Рис. 22

6. Неравенства треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон:

$$a < b + c, b < a + c, c < a + b.$$

7. Определение вида треугольника по его сторонам

Пусть c — наибольшая сторона, тогда:

- а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный;
- б) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный;
- в) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный.

8. Прямоугольные треугольники (некоторые свойства)

- 1) Сумма острых углов равна 90° (рис. 23).

$$\angle A + \angle B = 90^\circ.$$

- 2) Катет, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы (рис. 24).

$$a = \frac{1}{2}c.$$

- 3) Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30° (рис. 24).

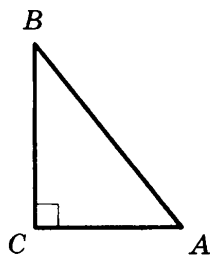


Рис. 23

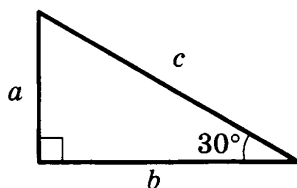


Рис. 24

9. Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны (рис. 25).

$$AC = A_1C_1, BC = B_1C_1.$$

2. Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны (рис. 26).

$$AC = A_1C_1, \angle A = \angle A_1.$$

3. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника

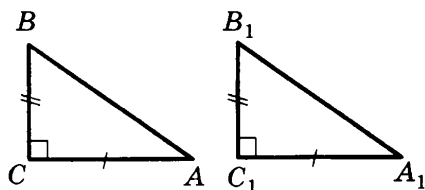


Рис. 25

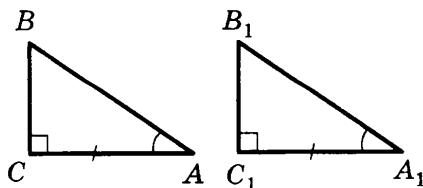


Рис. 26

соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны (рис. 27).

$$AB = A_1B_1, \angle A = \angle A_1.$$

4. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны (рис. 28).

$$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1.$$

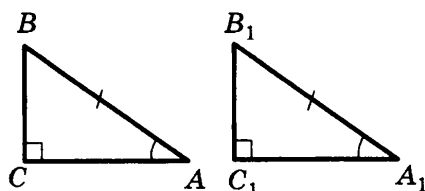


Рис. 27

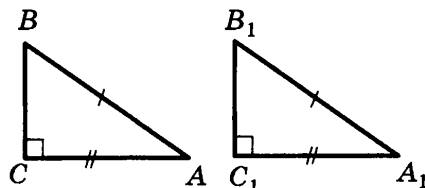


Рис. 28

10. Четыре замечательные точки треугольника

С каждым треугольником связаны 4 точки:

- 1) точка пересечения медиан;
- 2) точка пересечения биссектрис;
- 3) точка пересечения высот (или их продолжений);
- 4) точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

Эти четыре точки называются **замечательными точками треугольника**.

Высотой треугольника называется длина перпендикуляра, опущенного из любой его вершины на противоположащую сторону или ее продолжение.

В *тупоугольном треугольнике* (рис. 29) две высоты падают на продолжение сторон и лежат вне треугольника, а третья внутри.

В *остроугольном треугольнике* (рис. 30) все три высоты лежат внутри треугольника.

В *прямоугольном треугольнике* катеты одновременно служат и высотами (рис. 31).

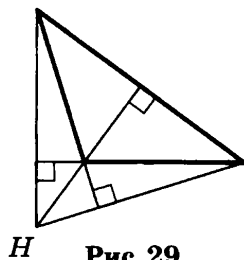


Рис. 29

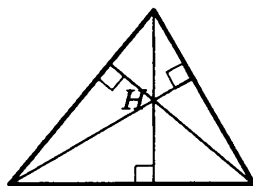


Рис. 30

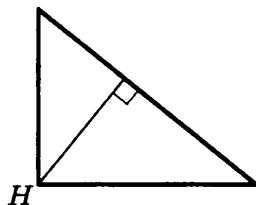


Рис. 31

Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке, называемой **ортоцентром**. В тупоугольном треугольнике ортоцентр лежит вне треугольника. В прямоугольном треугольнике он совпадает с вершиной прямого угла.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

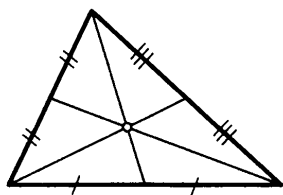


Рис. 32

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром тяжести** треугольника (рис. 32).

Эта точка делит каждую медиану в отношении $2 : 1$ (считая от соответствующей вершины).

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла от вершины до пересечения с противоположащей стороной.

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром вписанного круга** (рис. 33).

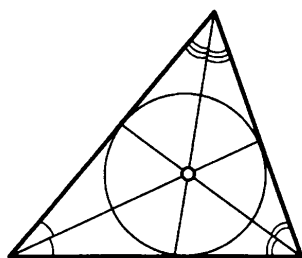


Рис. 33

Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины (рис. 34, 35, 36), пересекаются в одной точке, которая является **центром описанной окружности**.

В тупоугольном треугольнике (рис. 34) эта точка лежит **вне** треугольника, в остроугольном (рис. 35) — **внутри**, в прямоугольном — **на середине гипотенузы**.

Ортоцентр, центр тяжести, центр вписанной и описанной окружностей совпадают друг с другом только в **равностороннем** треугольнике.

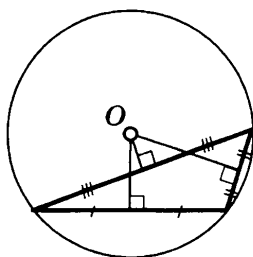


Рис. 34

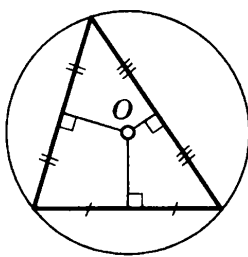


Рис. 35

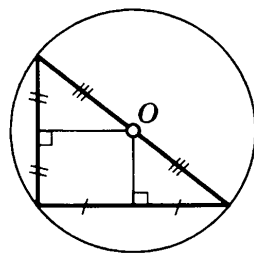


Рис. 36

11. Произвольный треугольник

1) **Свойство биссектрисы** (рис. 37) внутреннего угла треугольника:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

2) **Длина биссектрисы:**

$$l_c = \sqrt{ab - a_1b_1};$$

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

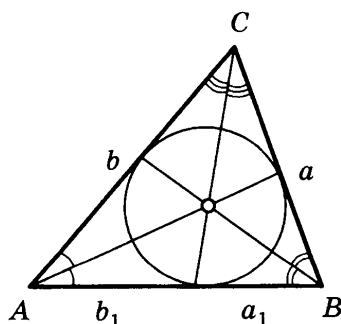


Рис. 37

3) Длина медианы:

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

4) Длина высоты:

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника,

$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр,

h_c — высота, проведенная к стороне c .

5) Зависимость между сторонами и высотами:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

6) Зависимость между высотами и радиусом вписанной окружности:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

12. Теорема Чевы

Для того чтобы прямые BE , AD и CF (рис. 38) пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{BC}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$

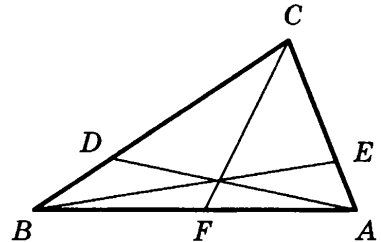


Рис. 38

13. Теорема Менелая

Если на сторонах BC , AB и продолжении стороны AC $\triangle ABC$ за точку C отмечены соответственно точки A_1 , C_1 и B_1 , лежащие на одной прямой, то

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

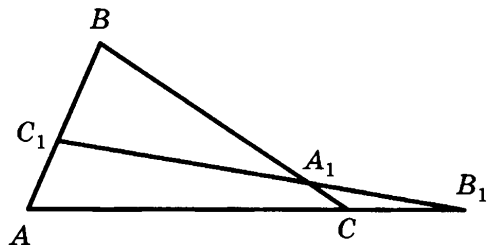


Рис. 39

14. Теорема синусов

Во всяком треугольнике стороны относятся как синусы противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

15. Теорема косинусов

Квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

16. Площадь треугольника

$$1) S = \frac{1}{2} ah_a;$$

$$2) S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma;$$

$$3) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона);}$$

$$4) S = pr, \text{ где } p = \frac{1}{2}(a+b+c);$$

$$5) S = \frac{abc}{4R};$$

$$6) S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

17. Равносторонний (правильный) треугольник (рис. 40)

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3};$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}; r = \frac{a}{2\sqrt{3}}; h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

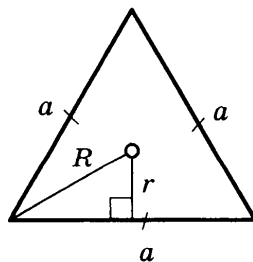


Рис. 40

18. Подобные треугольники

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого (рис. 41).

AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , AC и A_1C_1 — сходственные стороны.

Из подобия треугольников следует:

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1.$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k,$$

где k — коэффициент подобия.

Обозначение: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Если два треугольника подобны, то отношение их площадей равно k^2 , т. е. $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle A_1B_1C_1} = k^2$.

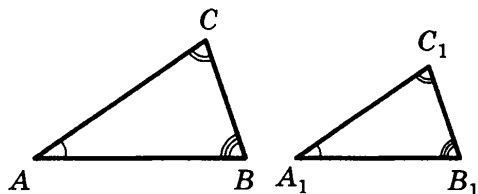


Рис. 41

19. Признаки подобия треугольников

I признак: если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны (рис. 42).

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1.$$

II признак: если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, заключенные между ними, равны, то такие треугольники подобны (рис. 43).

$$\begin{aligned} \angle A &= \angle A_1, \\ \frac{AB}{A_1B_1} &= \frac{AC}{A_1C_1}. \end{aligned}$$

III признак: если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны (рис. 44).

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

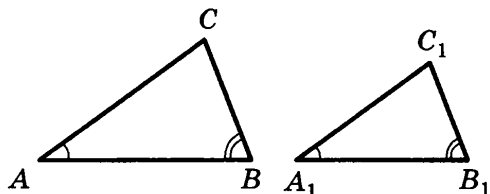


Рис. 42

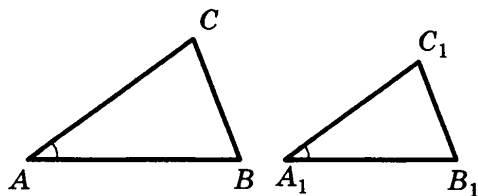


Рис. 43

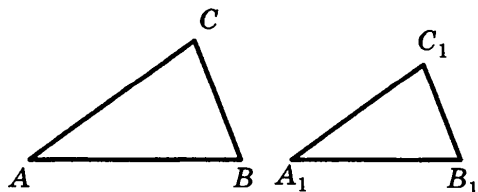


Рис. 44

Площади подобных фигур (в частности, многоугольников) пропорциональны квадратам их сходственных сторон.

В частности, площади кругов относятся как квадраты радиусов (или диаметров).

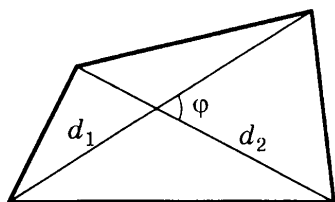


Рис. 45

20. Четырехугольник

1. **Произвольный выпуклый** (d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними) (рис. 45).

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

2. **Вписанный** (рис. 46).

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ.$$

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180° . Верно и обратное.

$$ac + bd = d_1 d_2$$

(теорема Птолемея).

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

$$\text{где } p = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$

3. **Описанный**.

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны (рис. 47).

$$a + c = b + d, \quad S = p \cdot r.$$

21. Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (рис. 48).

$$AB \parallel DC, \quad AD \parallel BC$$

(a и b — смежные стороны; α — угол между ними; h_a — высота, проведенная к стороне a).

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ — зависимость между сторонами и диагоналями;

$$S = a \cdot h_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

— площадь параллелограмма.

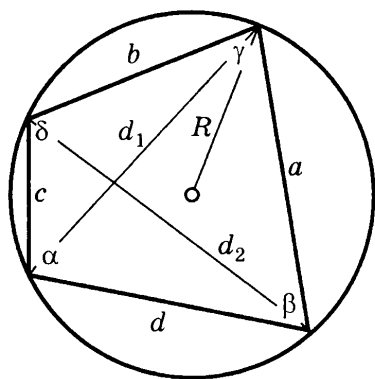


Рис. 46

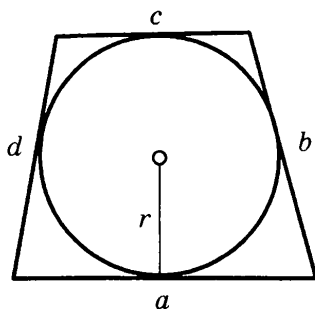


Рис. 47

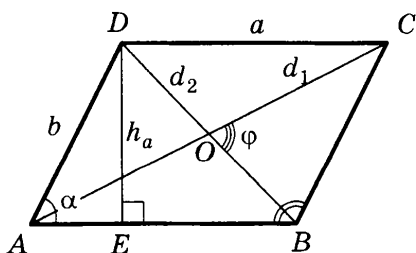


Рис. 48

Некоторые свойства:

1. В параллелограмме противоположные стороны и углы равны ($AB = DC$; $AD = BC$; $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$).

2. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам ($AO = OC$; $BO = OD$).

3. Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180° ($\angle A + \angle B = 180^\circ$ и т. д.).

4. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника ($\triangle ADC = \triangle ABC$, $\triangle ABD = \triangle BCD$).

5. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник (рис. 49).

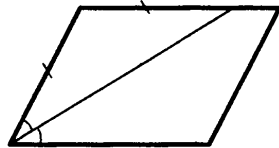


Рис. 49

Признаки параллелограмма (рис. 48)

1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны ($AB = DC$, $AB \parallel CD$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны ($AB = DC$, $AD = DC$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

3. Если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны ($\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

4. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник — параллелограмм.

22. Трапеция

a и b — основания; h — высота; d_1 и d_2 — диагонали; φ — угол между ними (рис. 50).

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две не параллельны.

$AB \parallel DC$, AB и DC — основания трапеции, AD и BC — боковые стороны.

Отрезок l , соединяющий середины боковых сторон, называется **средней линией трапеции**.

$l = \frac{1}{2}(a + b)$ — длина средней линии трапеции.

$$m \parallel a \parallel b, m = \frac{2ab}{a+b}.$$

$$\angle A + \angle D = 180^\circ; \angle B + \angle C = 180^\circ.$$

$$S = l \cdot h = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \sin \varphi \text{ — площадь трапеции.}$$

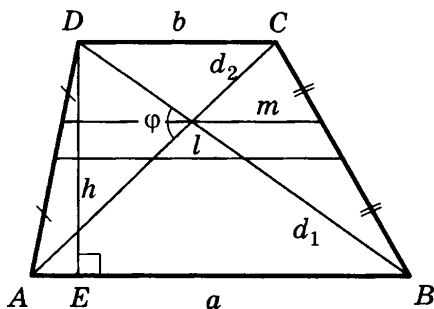


Рис. 50

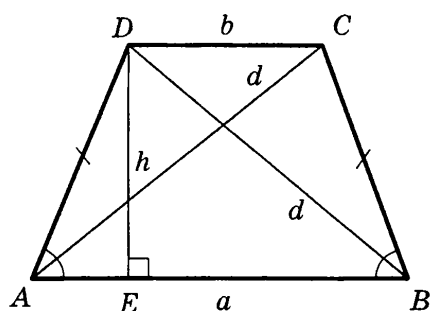


Рис. 51

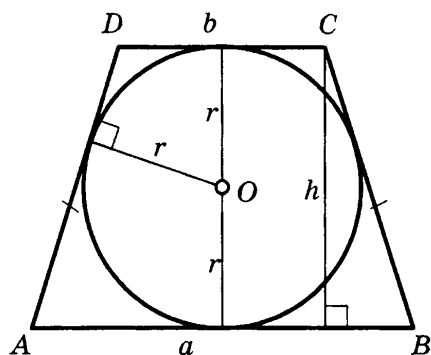


Рис. 52

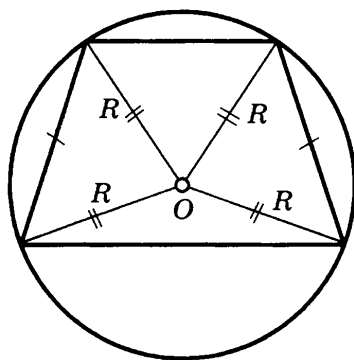


Рис. 53

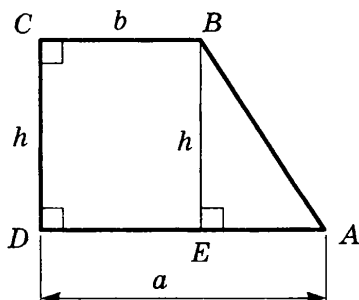


Рис. 54

1. Равнобедренная трапеция

Если у трапеции боковые стороны равны, то такая трапеция называется равнобедренной (рис. 51).

$$AD = BC.$$

В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны ($\angle A = \angle B$; $\angle C = \angle D$) и диагонали равны ($AC = BD$).

$$AE = \frac{1}{2} (a - b).$$

Если $AC \perp BD$, то $S = h^2$.

$$AB + CD = 2AD \text{ (рис. 52).}$$

$h = 2r$, r — радиус вписанной окружности; $h = \sqrt{ab}$.

R — радиус описанной окружности.

Точка O — центр окружности, описанной около любого треугольника, вершины которого совпадают с вершинами трапеции (рис. 53).

2. Прямоугольная трапеция

Если в трапеции один из углов прямой, то такая трапеция называется прямоугольной (рис. 54).

$$\angle D = \angle C = 90^\circ.$$

$$BE = CD = h \text{ (высота трапеции).}$$

$$AE = a - b.$$

23. Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 55).

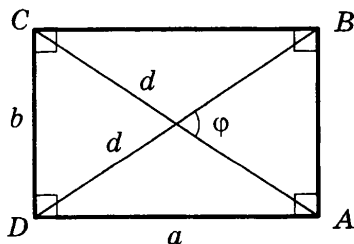


Рис. 55

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, у прямоугольника диагонали равны.

Стороны прямоугольника одновременно являются и высотами.

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

$$S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi.$$

24. Ромб

Ромб называется параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 56).

Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми его свойствами.

Кроме того, *диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.*

$$AC \perp BD.$$

AC — биссектриса углов A и C ; BD — биссектриса углов B и D .

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

$$S = a \cdot h_a = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \text{ — площадь ромба.}$$

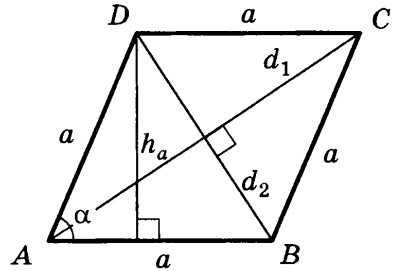


Рис. 56

25. Квадрат

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 57).

Можно сказать, что квадрат — это ромб с прямым углом.

Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

Основные свойства

1. У квадрата все углы прямые.
2. У квадрата диагонали равны, взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

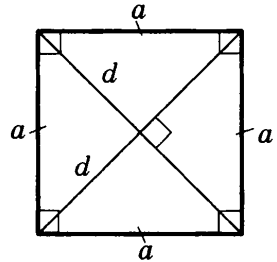


Рис. 57

26. Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной ее точки (центра) (рис. 58).

Отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности, называется **радиусом**.

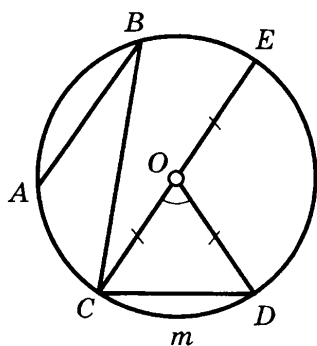


Рис. 58

Обозначение: r или R .

На рисунке $OC = OE = OD = R$.

Часть окружности (например, CmD) называется **дугой**.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**, а хорда, проходящая через центр, — **диаметром**.

AB , BC , CD и CE — хорды окружности. CE — наибольшая из хорд — диаметр.

Обозначение: d или D .

$$D = 2R.$$

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом**.

Часть круга, ограниченная дугой (CmD) и стягивающей ее хордой (CD), называется **сегментом**.

Часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой, называется **сектором**.

Угол, образованный двумя радиусами, называется **центральный** ($\angle COD$ на рис. 58).

Угол, у которого вершина лежит на окружности, а стороны являются хордами, называется **вписанным** (например, $\angle ABC$).

27. Свойства касательных к окружности

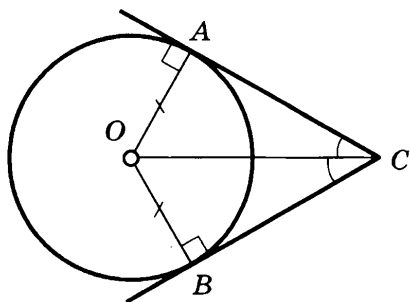


Рис. 59

Угол, образованный двумя касательными (CA и CB), исходящими из одной точки, называется **описанным** ($\angle ACB$ на рис. 59).

1. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

2. Две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними.

28. Окружность и треугольник

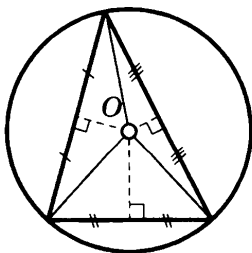


Рис. 60

1. Около всякого треугольника можно описать окружность; центром окружности является точка пересечения перпендикуляров, проведенных к сторонам через их середины (рис. 60).

2. Во всякий треугольник можно вписать окружность; центром окружности является точка пересечения биссектрис (рис. 61).

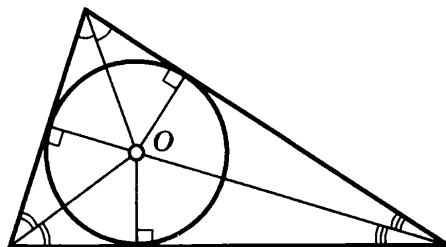


Рис. 61

29. Окружность и четырехугольник

1. Для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных углов была равна 180° (рис. 62).

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

2. Для того чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны (рис. 63).

$$a + c = b + d.$$

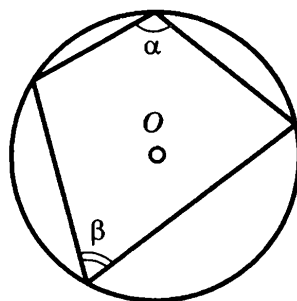


Рис. 62

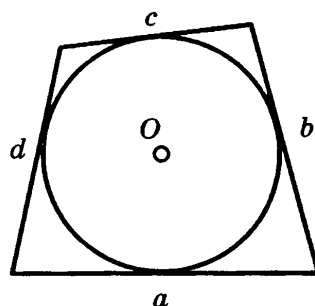


Рис. 63

30. Углы и окружность

Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается (рис. 64).

$$\angle AOB = \cup AmB.$$

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рис. 65).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AmC.$$

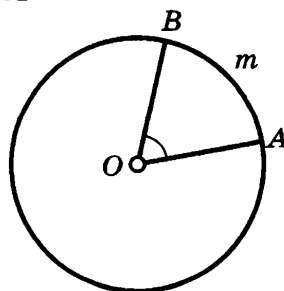


Рис. 64

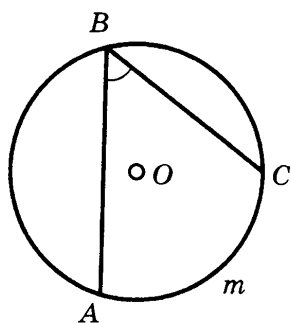


Рис. 65

Угол между хордой и касательной измеряется половиной дуги, заключенной внутри него (рис. 66).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BmC.$$

Угол между двумя касательными измеряется полуразностью дуг (рис. 67).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AmC - \cup AnC).$$

Угол между двумя хордами измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается (рис. 68).

$$\angle AEC = \frac{1}{2} (\cup AmC + \cup BnD).$$

Угол между секущими измеряется полуразностью дуг между ними (рис. 69).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AmC - \cup EnD).$$

Угол между касательной и секущей измеряется полуразностью отсекаемых ими дуг, прилежащих к касательной (рис. 70).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AmC - \cup CnD).$$

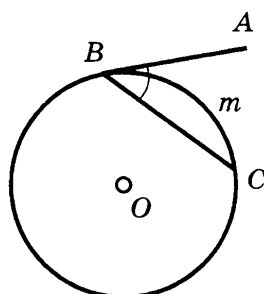


Рис. 66

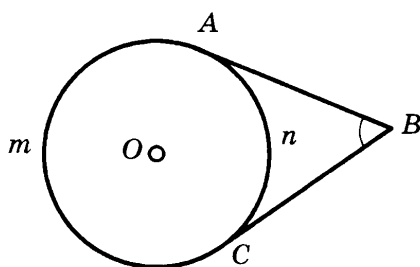


Рис. 67

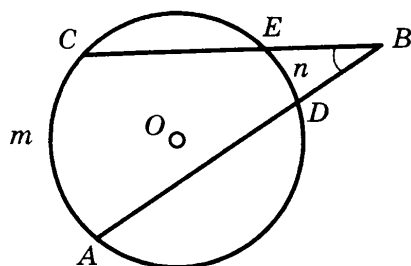


Рис. 69

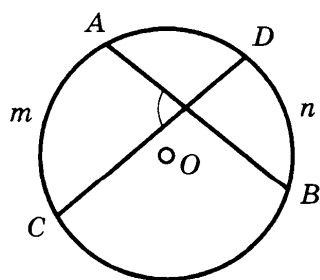


Рис. 68

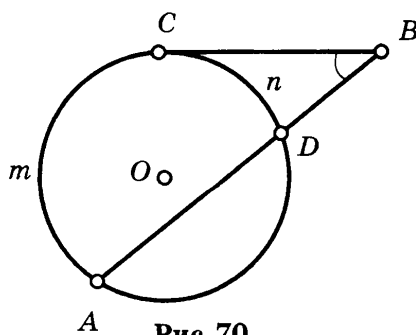


Рис. 70

31. Метрические соотношения в окружности

Если хорды AB и CD пересекаются в точке E , то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой (рис. 71).

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$

Если из точки B к окружности проведены две секущие BDA и BEC , то

$$DB \cdot AB = EB \cdot CB \text{ (рис. 72).}$$

Если из точки B к окружности проведены секущая BDA и касательная BC , то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной (рис. 73).

$$AB \cdot DB = BC^2.$$

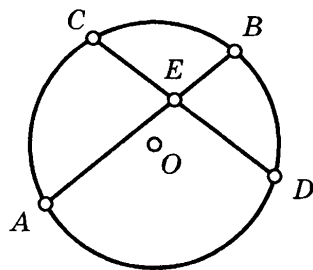


Рис. 71

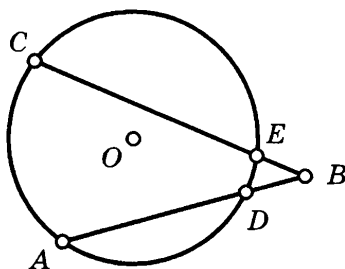


Рис. 72

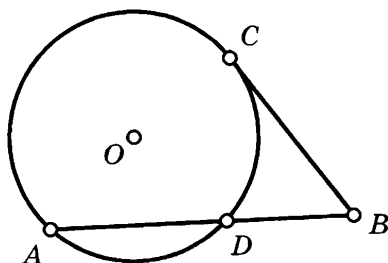


Рис. 73

32. Длина окружности. Площадь круга и его частей

$C = 2\pi R = \pi D$ — длина окружности;

$l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ} = R\alpha$ — длина дуги окружности;

$S_{\text{кр}} = \pi R^2 = \frac{1}{4} \pi D^2 = \frac{1}{2} CR$ — площадь круга;

$\pi = \frac{C}{D} \approx 3,14$ — отношение длины окружности к ее диаметру;

$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 n}{360}$ — площадь сектора.

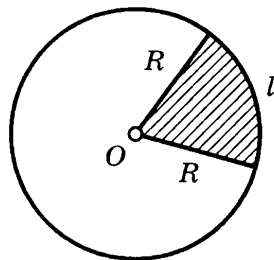


Рис. 74

33. Понятие вектора

Вектором называется направленный отрезок (рис. 75).

Всякий вектор характеризуется:

- 1) начальной точкой;
- 2) направлением;
- 3) длиной (модулем).

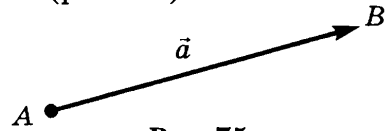


Рис. 75

Длиной (модулем) ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

34. Равенство векторов

Если ненулевые векторы лежат на одной прямой или параллельных прямых, то они называются *коллинеарными* (рис. 76).

Коллинеарные векторы:

$$\vec{a}, \vec{m}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{KP}, \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Неколлинеарные векторы:

$$\overrightarrow{CD} \text{ и } \overrightarrow{ST}, \overrightarrow{KP} \text{ и } \overrightarrow{ST}.$$

Коллинеарные векторы называются *сонаправленными*, если они имеют одинаковые направления.

Например, $\vec{a} \uparrow \vec{m}$, $\vec{a} \uparrow \overrightarrow{KP}$,

$$\vec{m} \uparrow \overrightarrow{KP}.$$

Коллинеарные векторы называются *противоположно направленными*, если они имеют разные направления.

Например, $\vec{a}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\vec{m}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{KP}$.

Векторы называются *равными*, если они сонаправлены и их длины равны.

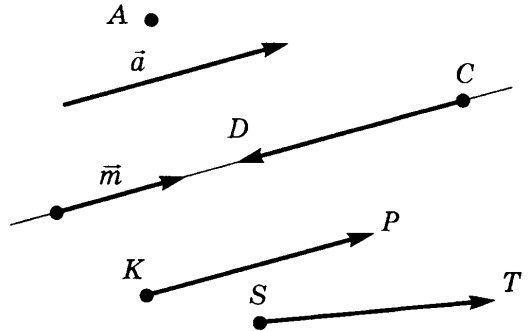


Рис. 76

35. Координаты вектора

Пусть $A(x_1; y_1)$ — начало вектора $\vec{a}$, $B(x_2; y_2)$ — конец вектора $\vec{a}$ (рис. 75).

Координатами вектора $\vec{a}$ называют числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ и обозначают $\vec{a}(a_1; a_2)$.

Тогда абсолютная величина (модуль) вектора с координатами a_1, a_2 равна $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Если векторы равны, то у них равны соответствующие координаты. И наоборот, если у векторов равны соответствующие координаты, то векторы равны.

36. Действия над векторами

1. Сумма двух векторов.

Каковы бы ни были точки A, B, C , имеет место векторное равенство (рис. 77):

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad (\text{правило треугольника}),$$

$$\text{или } \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}.$$

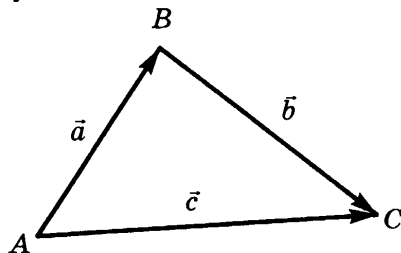


Рис. 77

2. Векторы складываются геометрически по правилу параллелограмма (рис. 78): сумма двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющих общее начало, изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах.

3. Для векторов справедливы *переместительный* и *сочетательный* законы сложения:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{и} \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

4. Разностью векторов $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ называется такой вектор $\vec{c}(c_1; c_2)$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$, т. е.

$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{a} \quad (\text{рис. 79}).$$

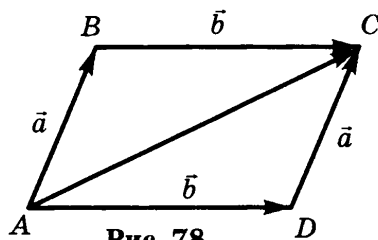


Рис. 78

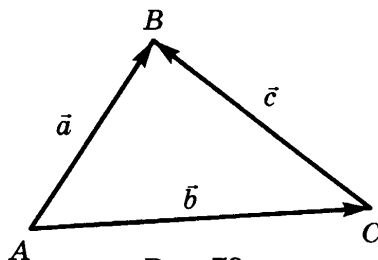


Рис. 79

5. Умножение вектора на число.

Произведением вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ на число k называется вектор $k\vec{a}(ka_1; ka_2)$.

Из определения следует, что:

- 1) произведение любого вектора на число ноль есть нулевой вектор;
- 2) для любого числа k и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.

Основные свойства умножения вектора на число:

- 1) $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ — сочетательный закон;
- 2) $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ — I распределительный закон;
- 3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ — II распределительный закон.

37. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин (модулей) на косинус угла между ними (рис. 80).

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha.$$

1) Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\alpha = 90^\circ$, $\cos \alpha = 0$, тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Верно и обратное: если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

2) Если $\alpha < 90^\circ$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$; если $\alpha > 90^\circ$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

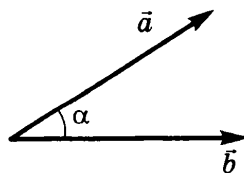


Рис. 80

38. Скалярное произведение в координатах

Если $\vec{a}\{x_1; y_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2\}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Следствие 1. $\vec{a} \perp \vec{b}$ тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Следствие 2. $\cos \alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$, где α — угол между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1; y_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2\}$.

39. Свойства скалярного произведения векторов

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$;
- 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон);
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон);
- 4) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сочетательный закон).

40. Уравнение окружности

Если центром окружности является начало координат (рис. 81), то уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

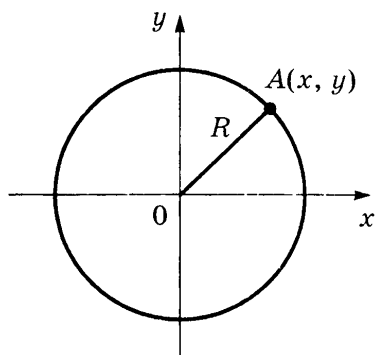


Рис. 81

Если центр окружности $M(x_0; y_0)$, то уравнение окружности имеет вид (рис. 82)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

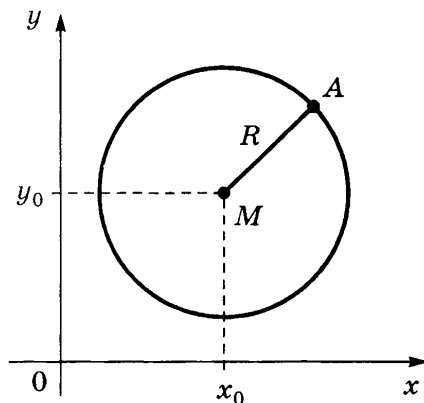


Рис. 82

41. Уравнение прямой

1) Любая прямая в декартовых координатах x и y задается уравнением вида $ax + by + c = 0$, где a и b — коэффициенты при неизвестных, c — свободный член.

2) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то $y = -\frac{c}{b}$ — уравнение прямой, параллельной оси Ox (рис. 83).

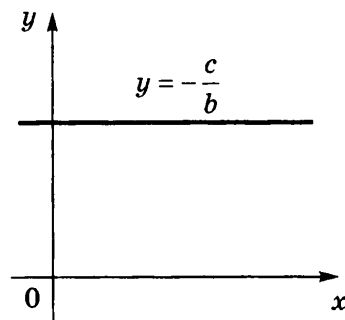


Рис. 83

3) Если $b = 0$, $a \neq 0$, то $x = -\frac{c}{a}$ — уравнение прямой, параллельной оси Oy (рис. 84).

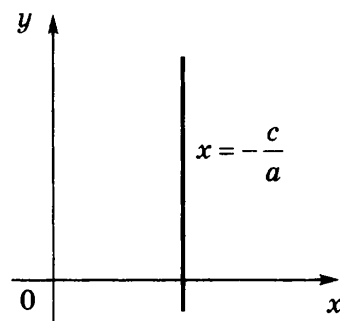


Рис. 84

4) Если $c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $ax + by = 0$ — уравнение прямой, проходящей через начало координат $(0; 0)$ (рис. 85).

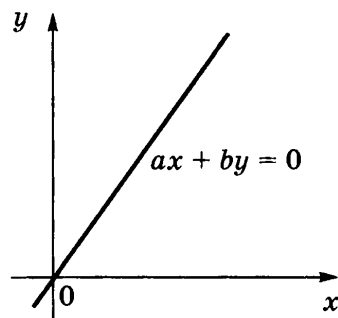


Рис. 85

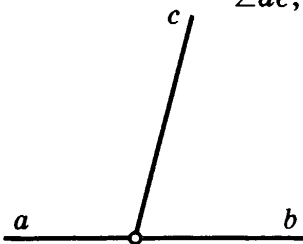
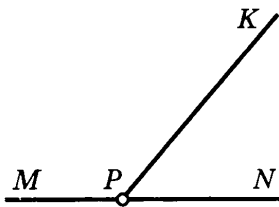
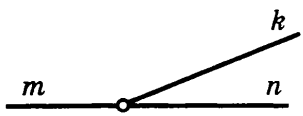
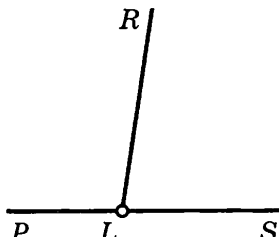
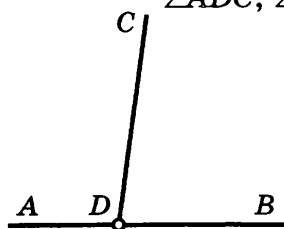
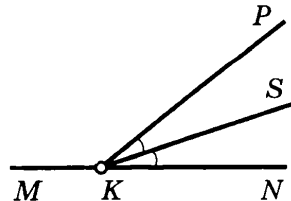
Раздел II

УПРАЖНЕНИЯ В ТАБЛИЦАХ

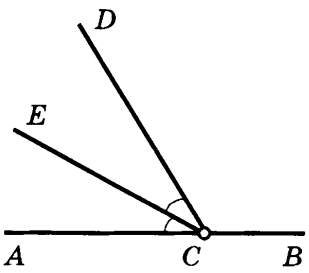
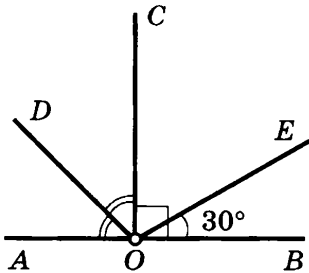
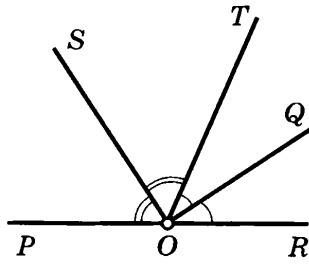
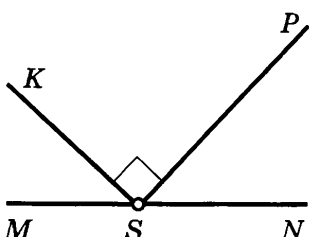
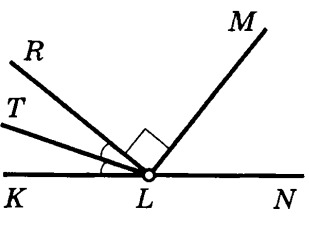
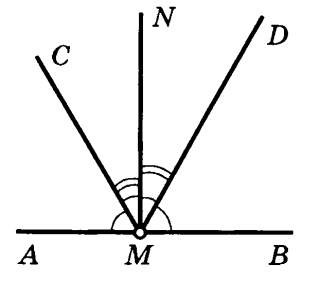
VII класс

СМЕЖНЫЕ УГЛЫ

Таблица 1

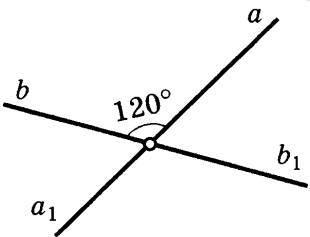
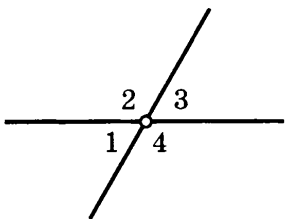
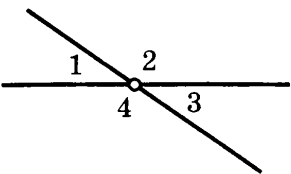
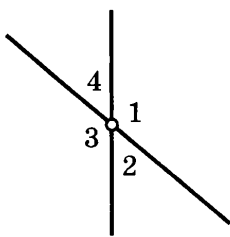
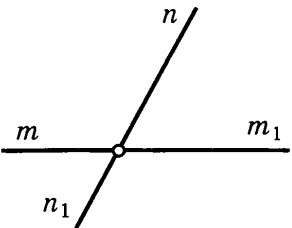
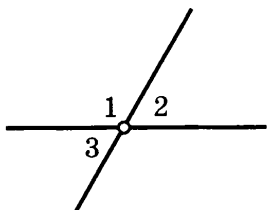
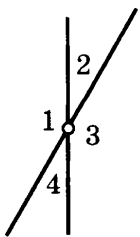
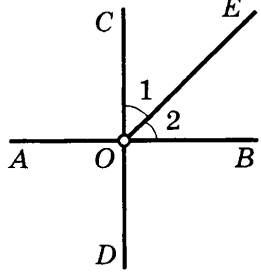
1 $\angle ac - \angle cb = 25^\circ$ $\angle ac, \angle cb - ?$ 	4 $\angle MPK = 2,6 \angle KPN$ $\angle MPK, \angle KPN - ?$ 
2 $\angle mk = 8 \angle kn$ $\angle mk, \angle kn - ?$ 	5 $\angle RLS = 80\% \angle PLR$ $\angle PLR, \angle RLS - ?$ 
3 $\angle CDB : \angle ADC = 4 : 5$ $\angle ADC, \angle CDB - ?$ 	6 $\angle PKN = 40^\circ$ $\angle MKS - ?$ 

Окончание табл. 1

7 $\angle BCD = 120^\circ$ $\angle BCE = ?$ 	10 $\angle DOE = ?$ 
8 $\angle SOQ = ?$ 	11 $\angle MSP = \angle NSK$ $\angle MSP = ?$ 
9 $\angle KLR = 40^\circ$ $\angle TLN = ?$ 	12 $\angle AMN, \angle BMN = ?$ 

ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

Таблица 2

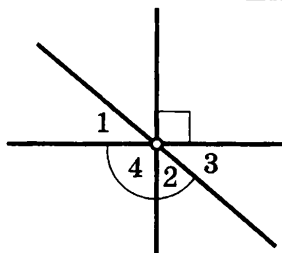
1 $\angle a_1b_1 - ?$ $\angle ab_1 - ?$ 	5 $2(\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$ $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4 - ?$ 
2 $\angle 1 + \angle 3 = 70^\circ$ $\angle 2, \angle 4 - ?$ 	6 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 5\angle 4$ $\angle 4 - ?$ 
3 $\angle mn_1 + \angle m_1n_1 + \angle m_1n = 240^\circ$ $\angle mn - ?$ 	7 $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$ $\angle 1, \angle 2, \angle 3 - ?$ 
4 $\angle 1 - \angle 2 = 120^\circ$ $\angle 3, \angle 4 - ?$ 	8 $AB \perp CD$ $\angle AOE - ?$ 

Окончание табл. 2

9

$$\angle 1 = 40^\circ$$

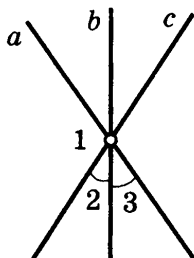
$$\angle 2, \angle 3, \angle 4 - ?$$



11

$$\angle 1 - \angle 2 = 75^\circ$$

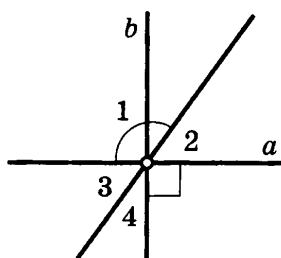
$$\angle 1, \angle 2, \angle 3 - ?$$



10

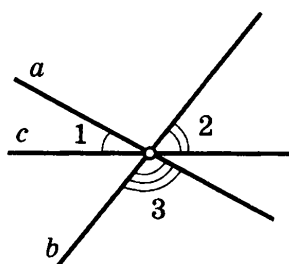
$$\angle 1 = 125^\circ$$

$$\angle 2, \angle 3, \angle 4 - ?$$



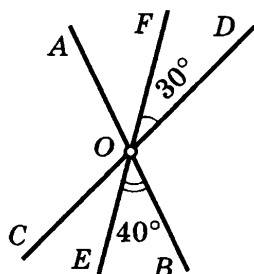
12

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 - ?$$



13

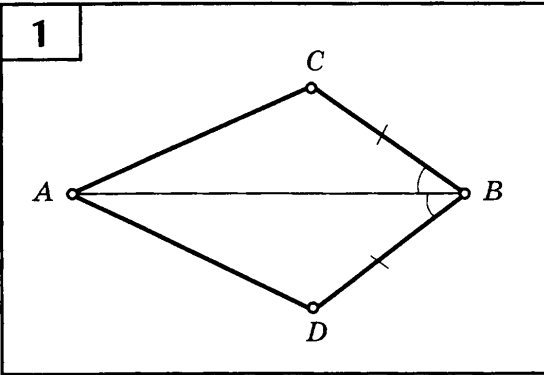
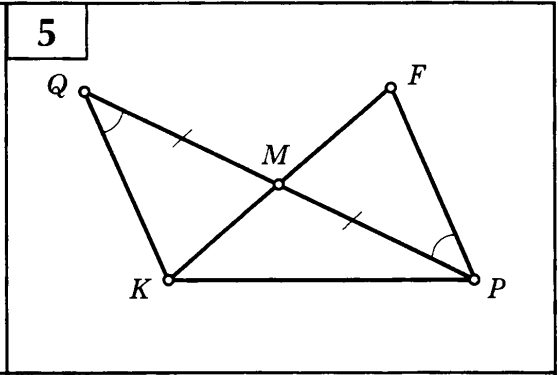
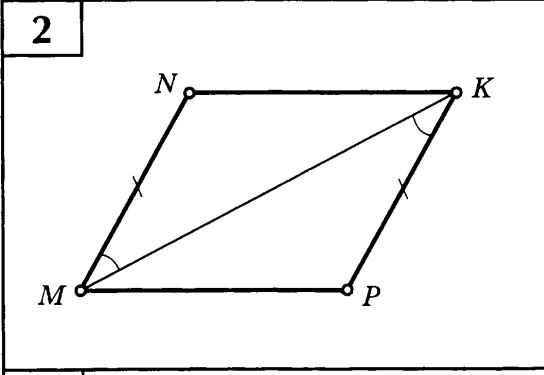
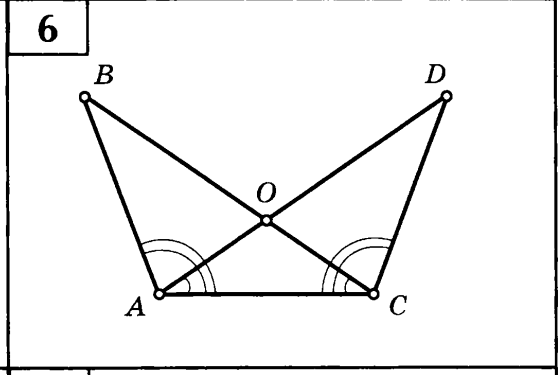
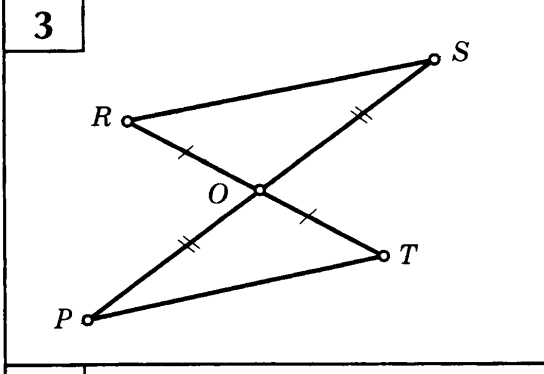
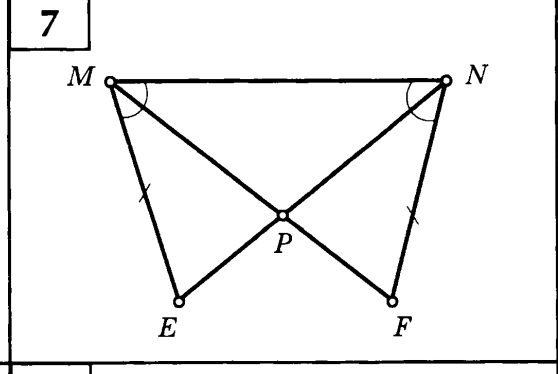
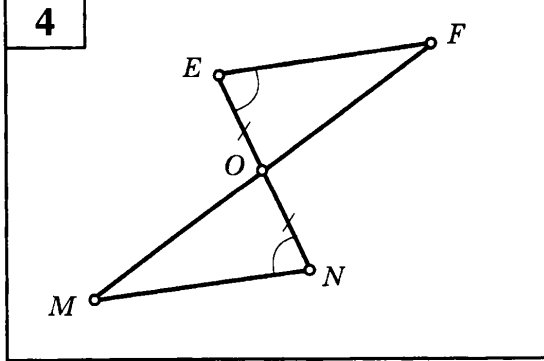
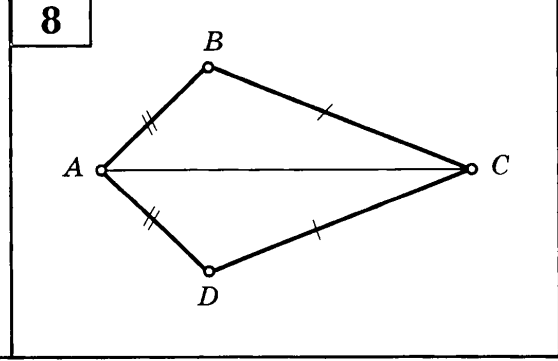
$$\angle AOC - ?$$



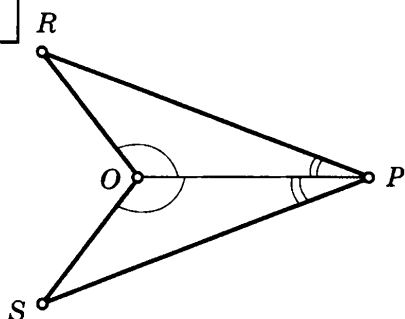
ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Таблица 3

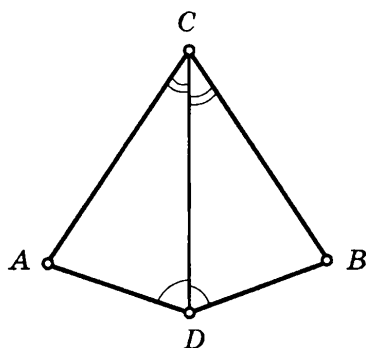
Найдите пары равных треугольников и докажите их равенство.

1 	5 
2 	6 
3 	7 
4 	8 

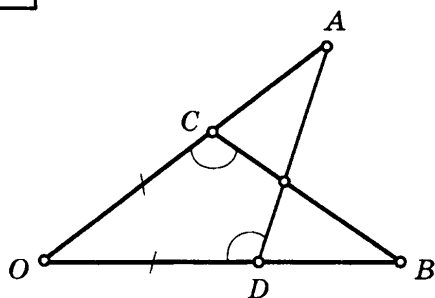
9



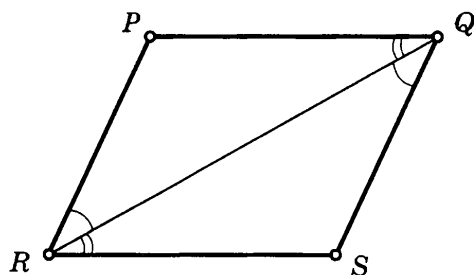
13



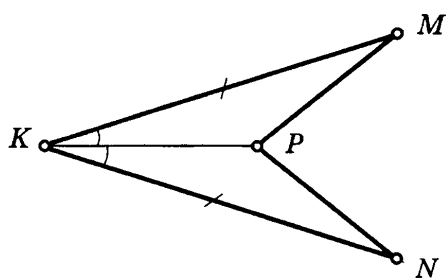
10



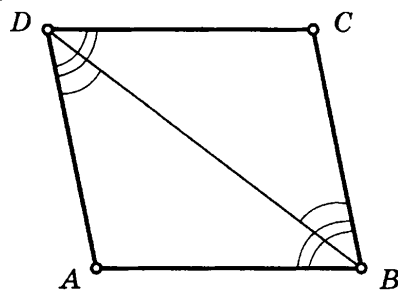
14



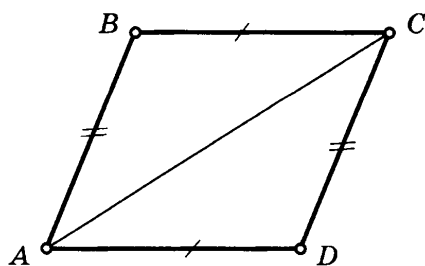
11



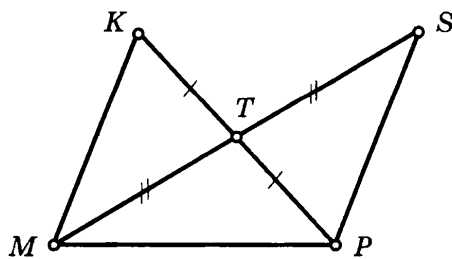
15

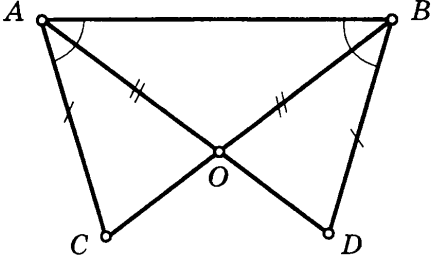
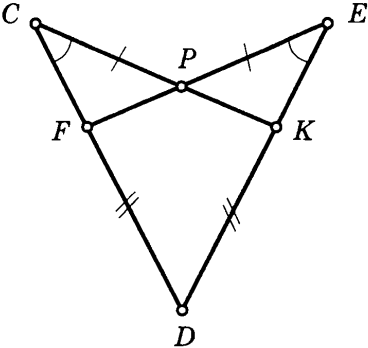
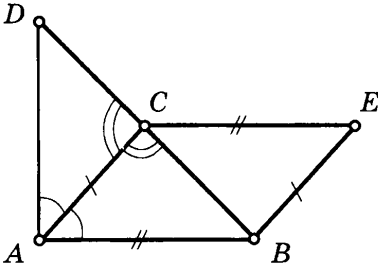
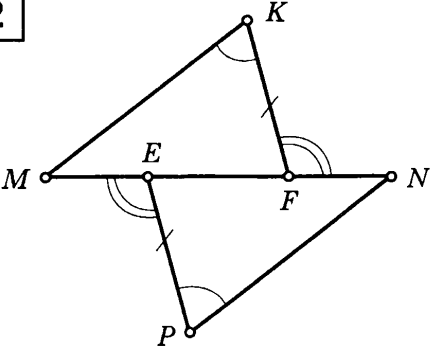
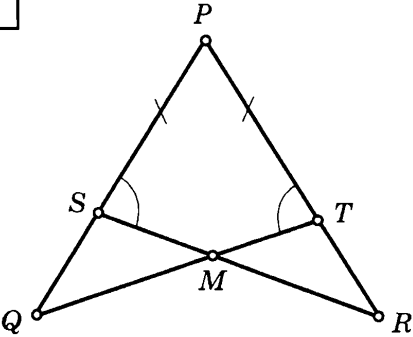
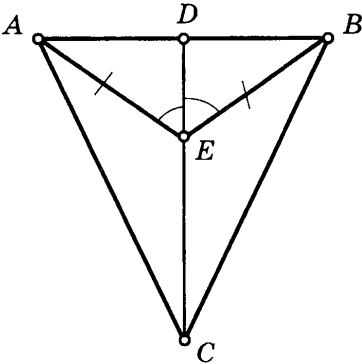
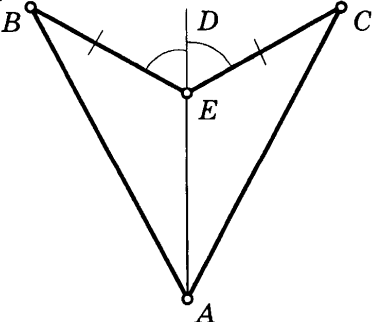
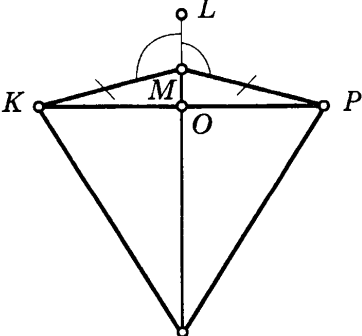


12

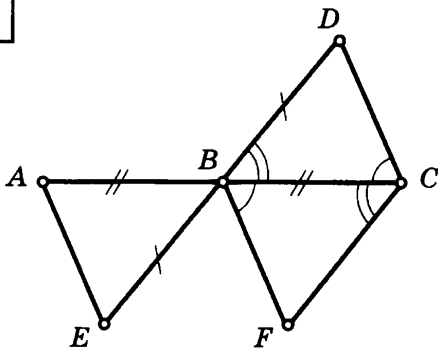


16

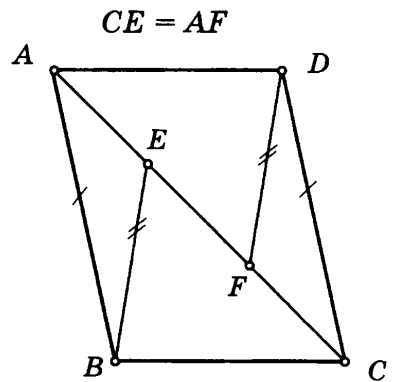


17 $BC = AD$	21 
18 	22 
19 	23 
20 	24 

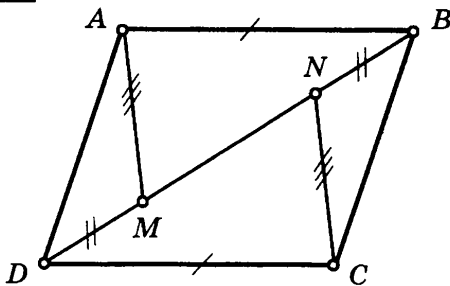
25



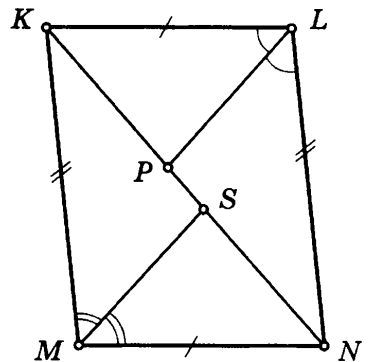
29



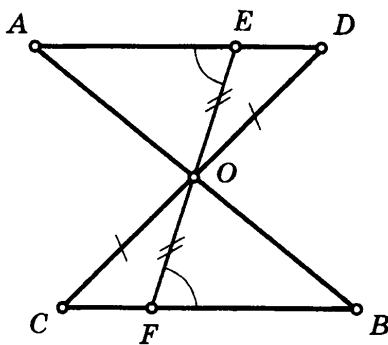
26



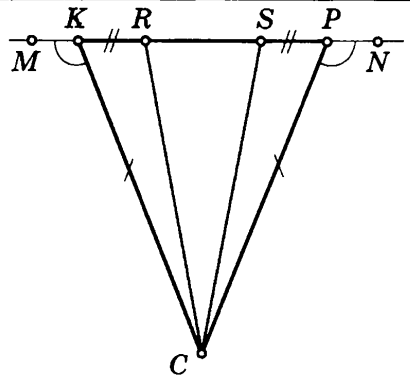
30



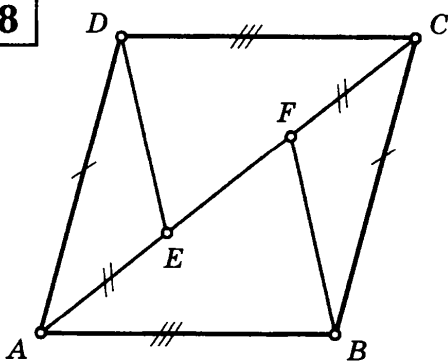
27



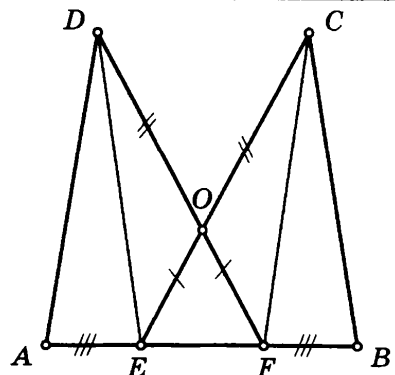
31



28

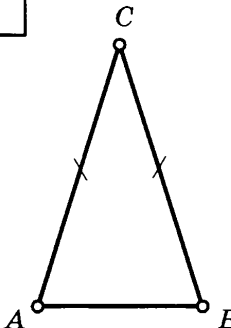
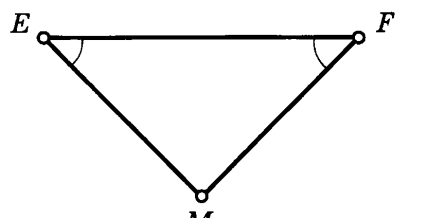
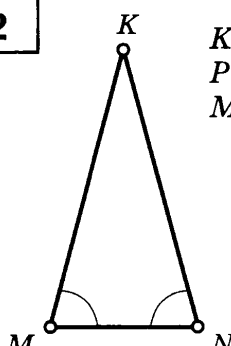
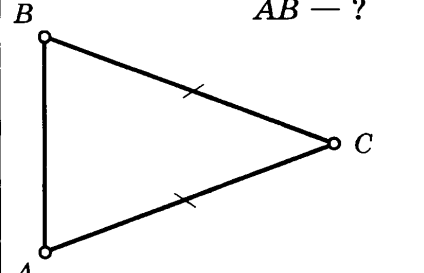
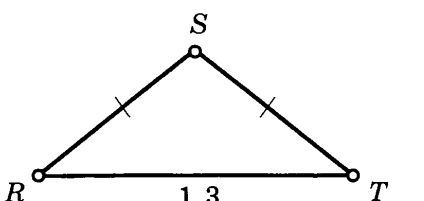
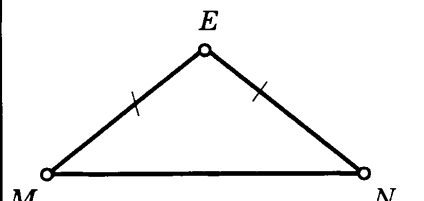
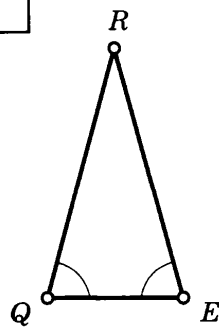
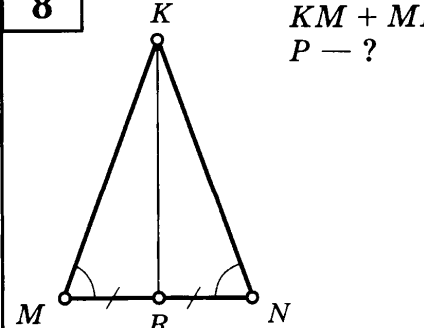


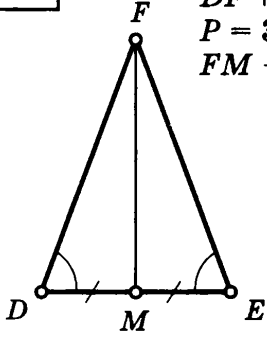
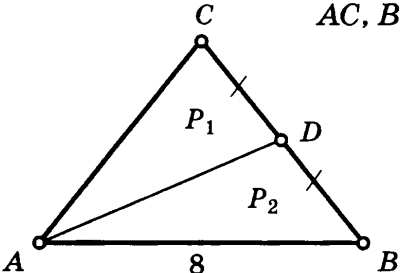
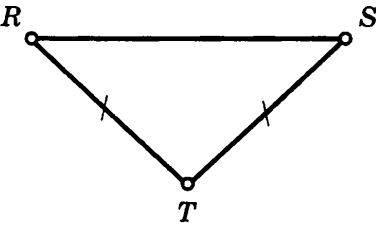
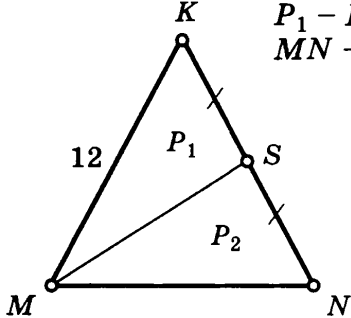
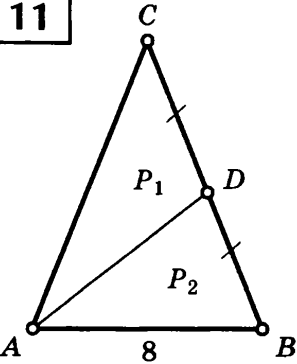
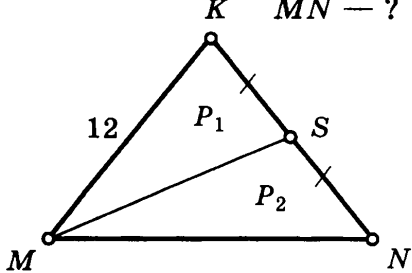
32



ПЕРИМЕТР РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Таблица 4

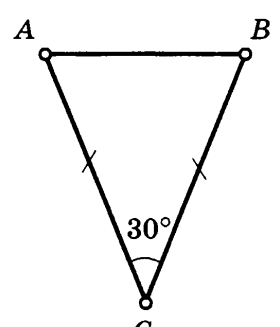
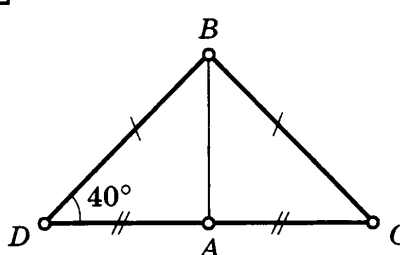
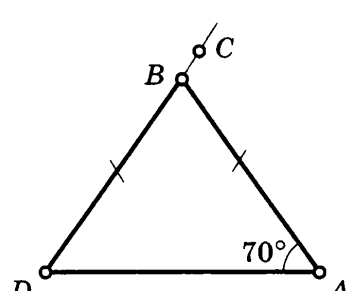
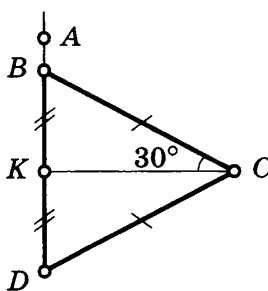
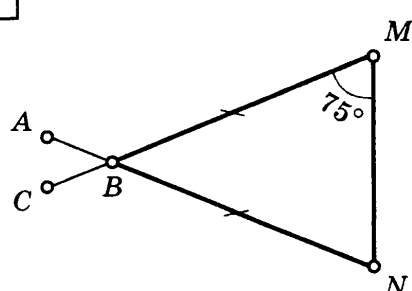
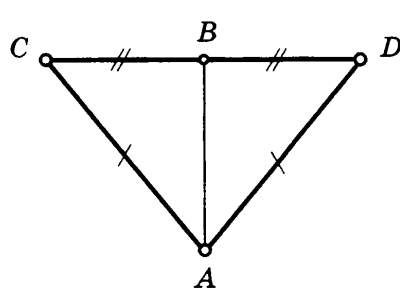
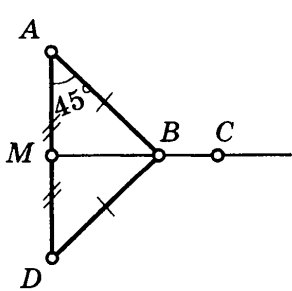
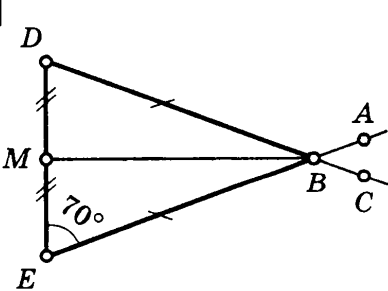
1  $AC = 2 AB$ $P = 20$ AC, BC, AB — ?	5  $P = 35$ $EF : EM = 3 : 2$ EF, EM, MF — ?
2  $KM - MN = 10$ $P = 26$ MK, KN, MN — ?	6  $P = 3,4; BC = 1,3$ AB — ?
3  $P = 2,5; RT = 1,3$ RS, ST — ?	7  $MN - EN = 1$ $MN = 2,3$ P — ?
4  $P = 6,4$ $RQ = 3,5 QE$ QR, RE, QE — ?	8  $KM + MR = 25$ P — ?

9  $DF + FM + DM = 28$ $P = 36$ $FM = ?$	12  $AC = BC$ $P_2 - P_1 = 2$ $AC, BC = ?$
10  $RT : RS = 4 : 7$ $P = 45$ $RT, TS, RS = ?$	13  $MK = KN = 12$ $P_1 - P_2 = 3$ $MN = ?$
11  $AC = BC$ $P_1 - P_2 = 2$ $AC, BC = ?$	14  $MK = KN = 12$ $P_2 - P_1 = 3$ $MN = ?$

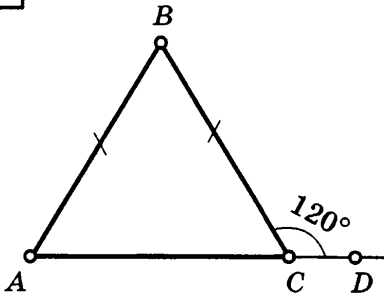
СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Таблица 5

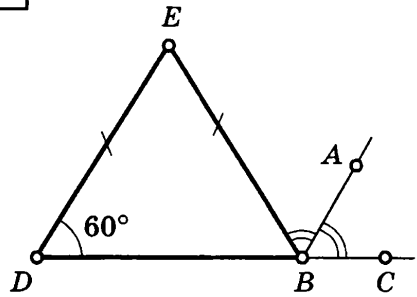
Найдите $\angle CBA$.

1 	5 
2 	6 
3 	7 
4 	8 

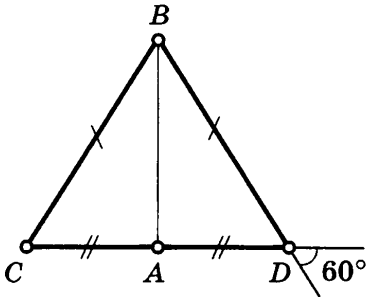
9



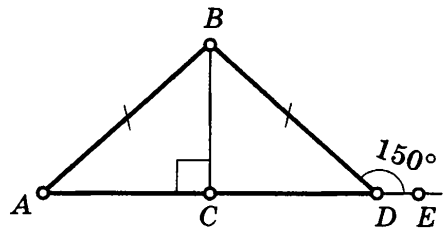
13



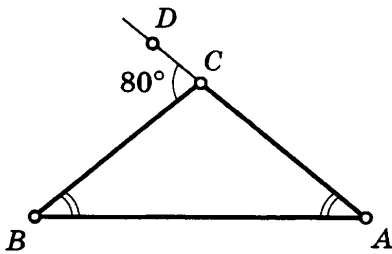
10



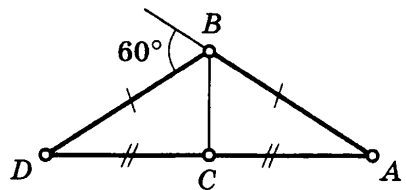
14



11

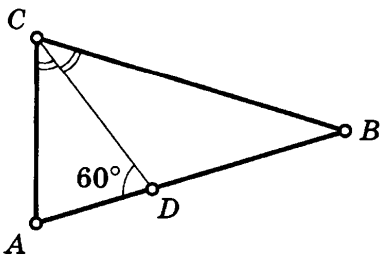


15

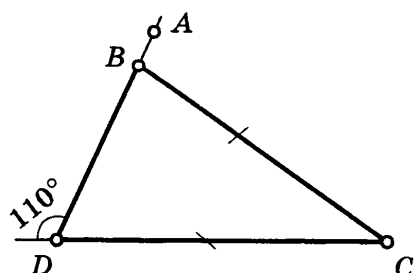


12

$$BC = AB$$



16



17	18
---------------------------	---------------------------

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

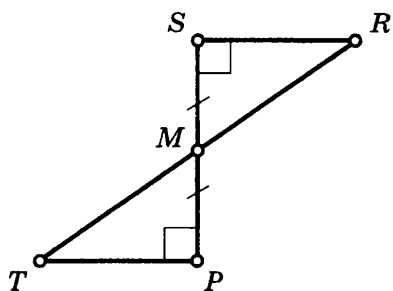
Таблица 6

Укажите пары параллельных прямых (отрезков) и докажите их параллельность.

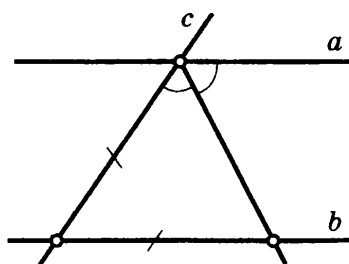
1	3
2	4

Продолжение табл. 6

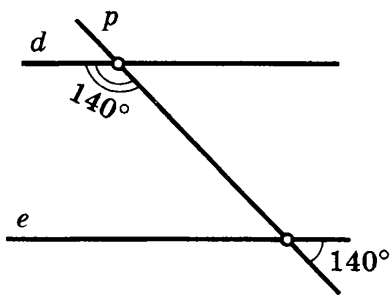
5



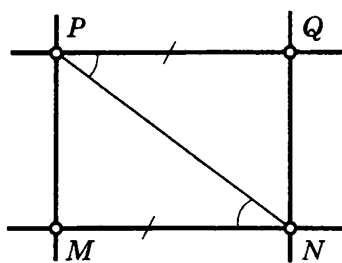
9



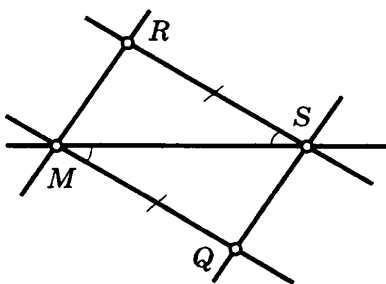
6



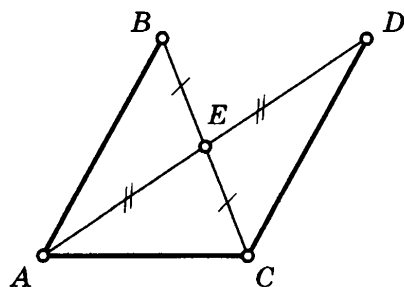
10



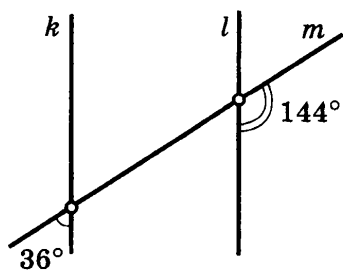
7



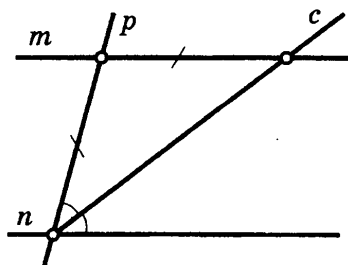
11

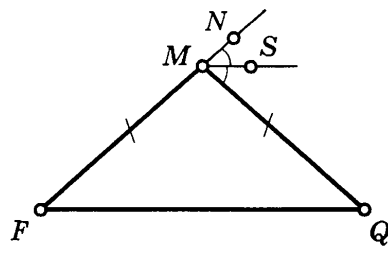
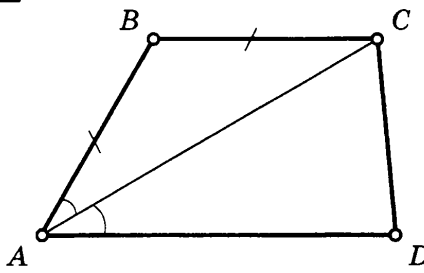
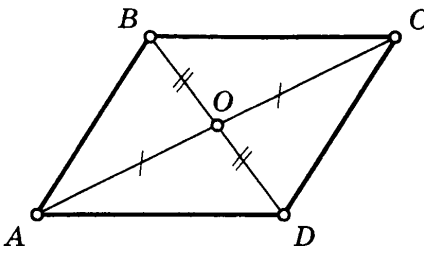
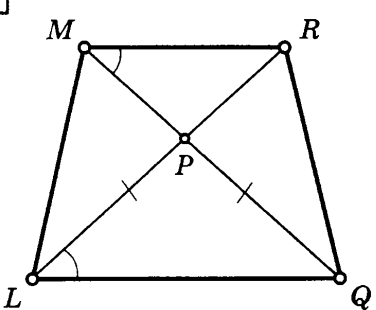
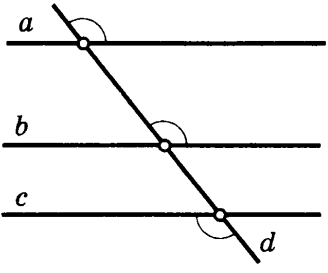
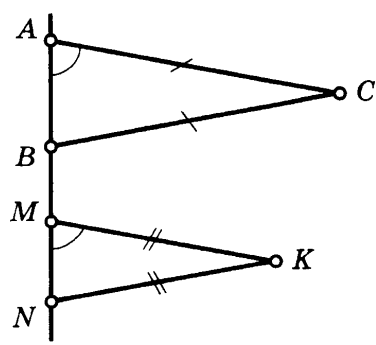
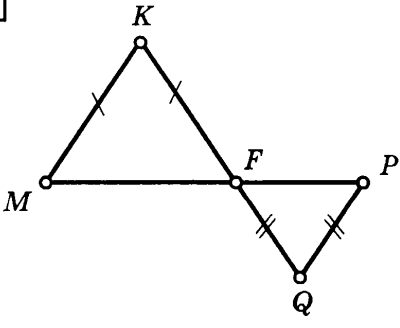
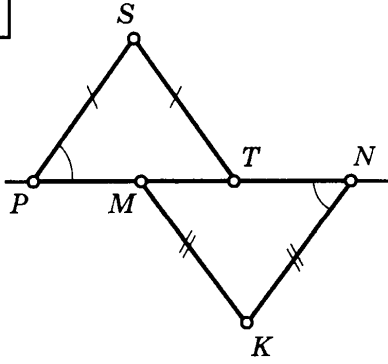


8

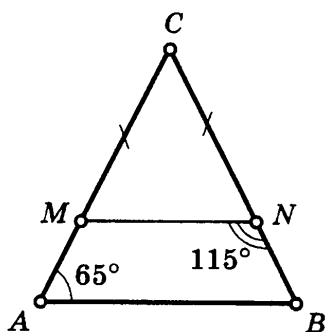


12

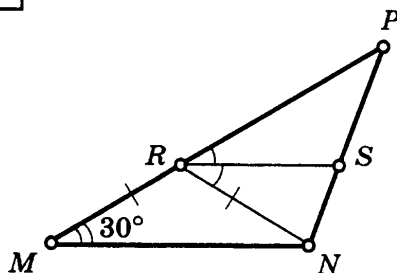


13 	17 
14 	18 
15 	19 
16 	20 

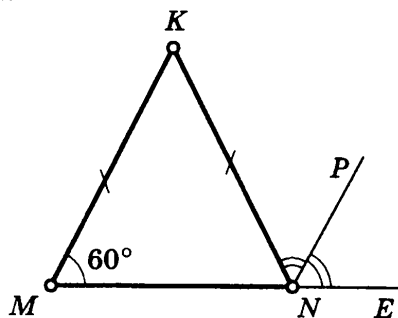
21



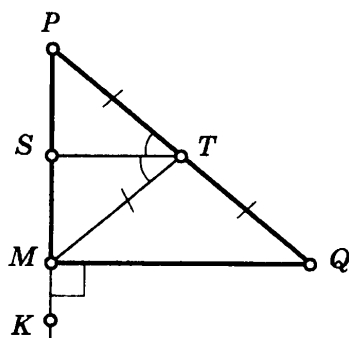
25



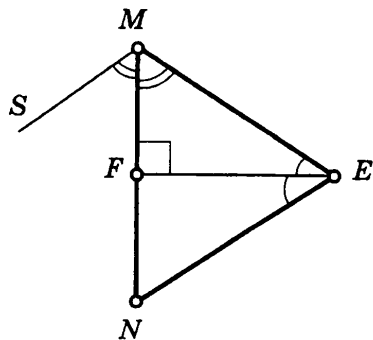
22



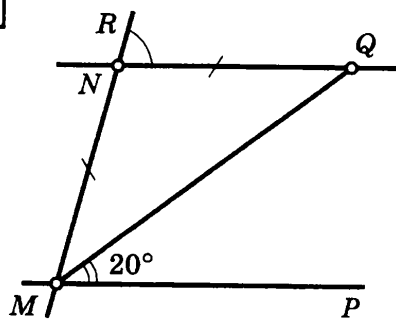
26



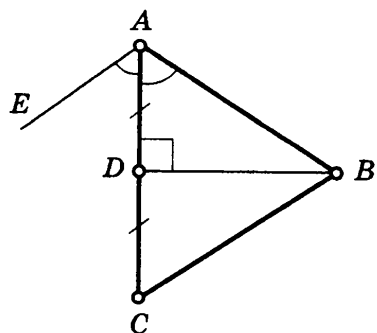
23



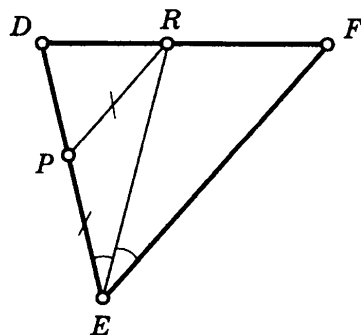
27



24



28



29

31

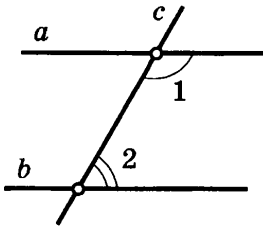
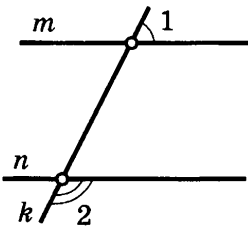
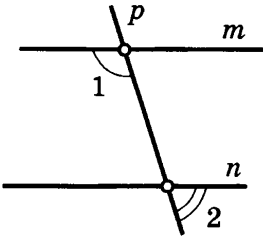
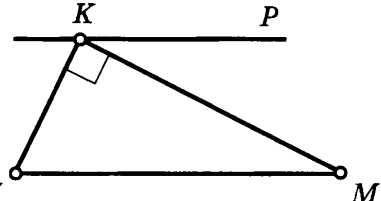
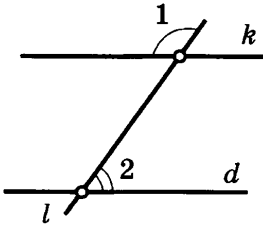
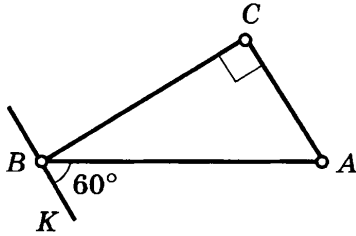
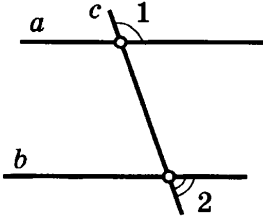
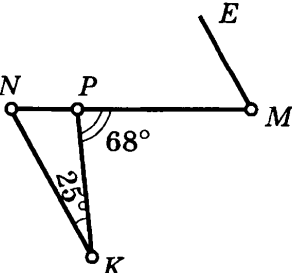
30

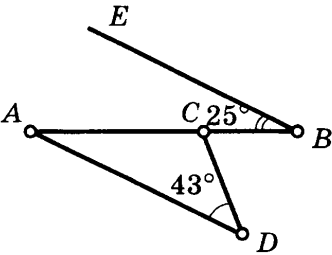
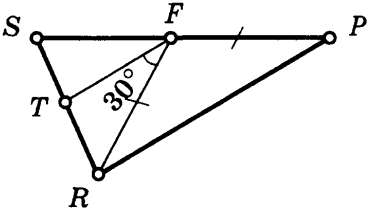
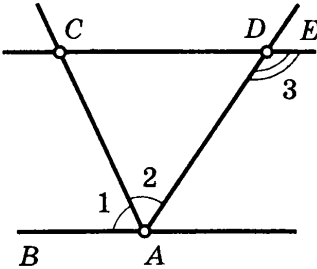
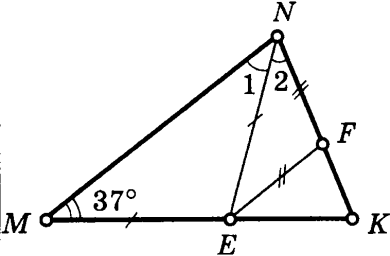
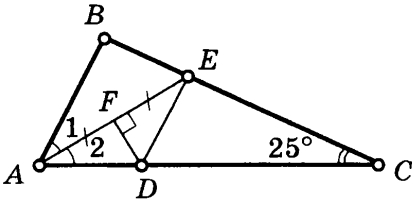
32

33

СВОЙСТВА УГЛОВ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

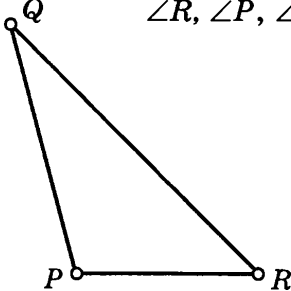
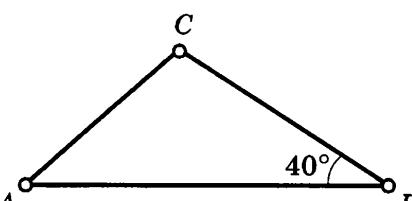
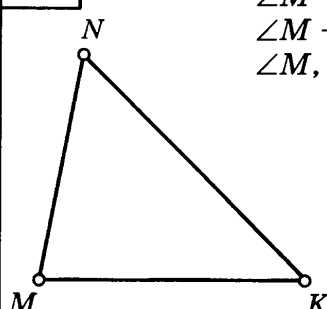
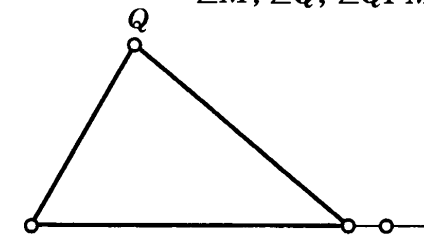
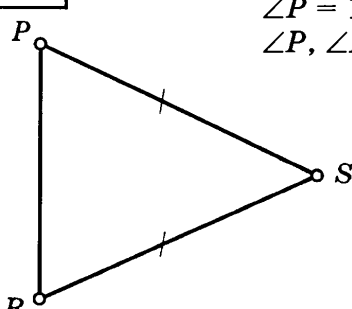
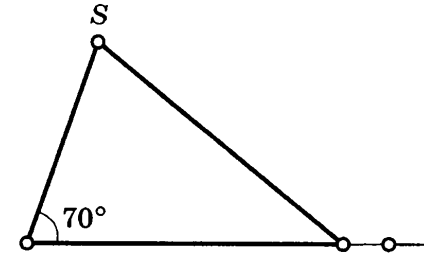
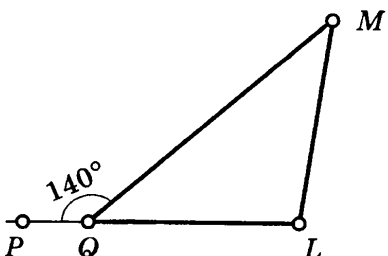
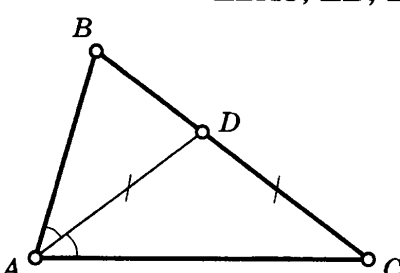
Таблица 7

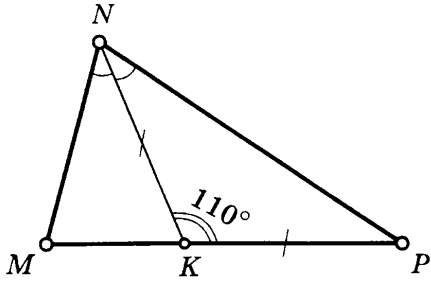
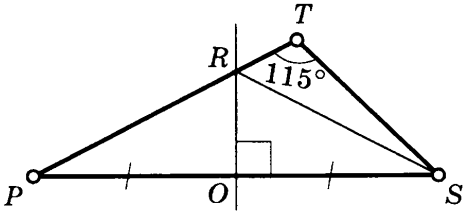
1  $a \parallel b$ c — секущая $\angle 1 - \angle 2 = 32^\circ$ $\angle 1, \angle 2 - ?$	5  $m \parallel n$ k — секущая $\angle 1 = 60\%$ от $\angle 2$ $\angle 1, \angle 2 - ?$
2  $m \parallel n$ p — секущая $\angle 1 : \angle 2 = 3 : 2$ $\angle 1, \angle 2 - ?$	6  $KP \parallel NM$ $\angle NKP = 120^\circ$ $\angle N, \angle M - ?$
3  $k \parallel d$ l — секущая $\angle 1 = 2,6 \angle 2$ $\angle 1, \angle 2 - ?$	7  $AC \parallel BK$ $\angle A, \angle ABC - ?$
4  $a \parallel b$ c — секущая $\angle 2 = \frac{4}{5} \angle 1$ $\angle 1, \angle 2 - ?$	8  $KN \parallel ME$ $\angle EMN - ?$

9 $AD \parallel BE$ $\angle DCB = ?$ 	11 $TF \parallel RP$ $\angle RPF, \angle SFT = ?$ 
10 $CE \parallel BA$ $\angle 3 = 130^\circ$ $\angle ACD = ?$ 	12 $\angle KFE = ?$ 
13 $\angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$ $AB \parallel DE$ $\angle AEB = ?$ 	

УГЛЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

Таблица 8

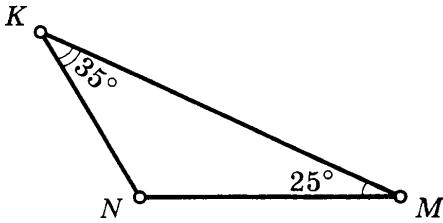
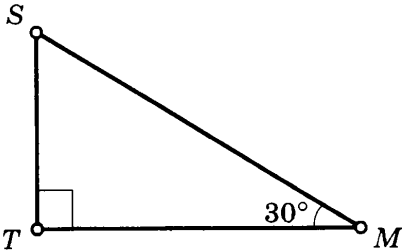
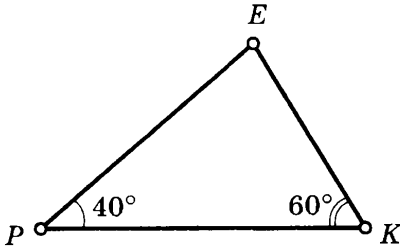
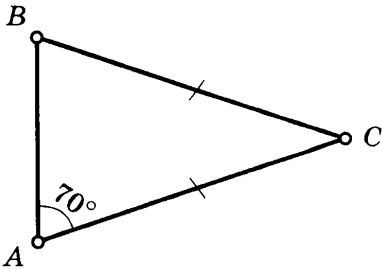
1 $\angle R : \angle P : \angle Q = 3 : 7 : 2$ $\angle R, \angle P, \angle Q - ?$ 	5 $\angle A : \angle C = 2 : 5$ $\angle A, \angle C - ?$ 
2 $\angle M = 2 \angle K$ $\angle M - \angle N = 20^\circ$ $\angle M, \angle N, \angle K - ?$ 	6 $\angle QPK = 3,5 \angle QPM$ $\angle M : \angle Q = 3 : 4$ $\angle M, \angle Q, \angle QPM - ?$ 
3 $\angle P = 1,5 \angle S$ $\angle P, \angle R, \angle S - ?$ 	7 $\angle STM = 2 \angle S$ $\angle S, \angle STR - ?$ 
4 $\angle Q = 0,4 \angle L$ $\angle Q, \angle M, \angle L - ?$ 	8 $\angle B = 2 \angle C$ $\angle BAC, \angle B, \angle C - ?$ 

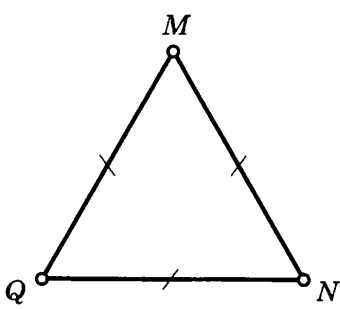
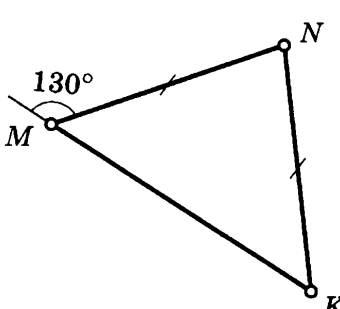
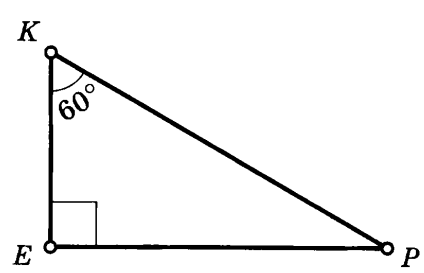
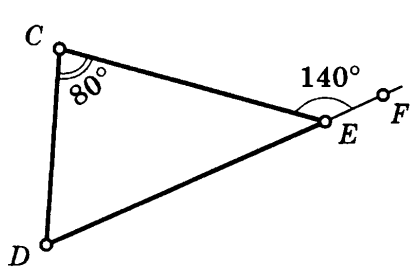
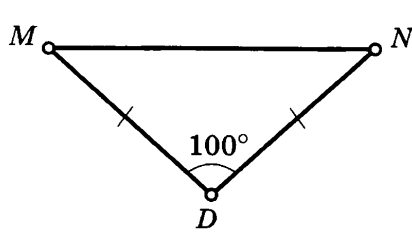
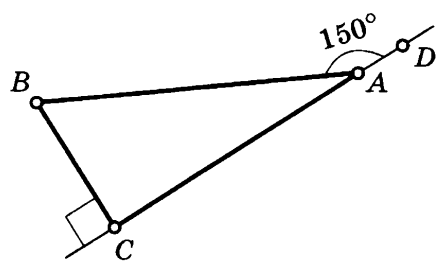
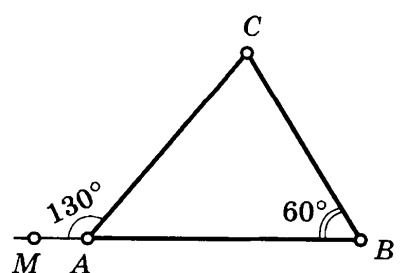
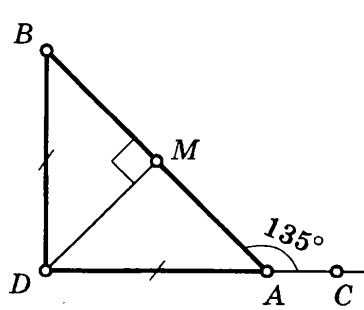
9 $\angle M, \angle MNP, \angle P - ?$ 	10 $\angle TSR : \angle RSP = 3 : 5$ $\angle P, \angle TSP - ?$ 
--	--

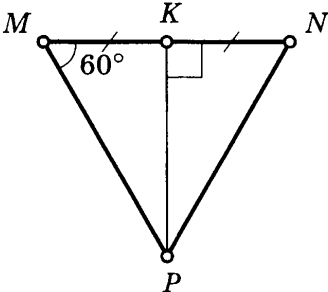
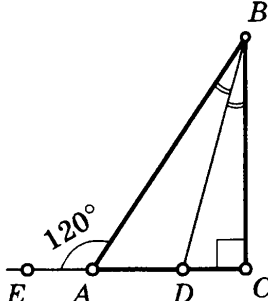
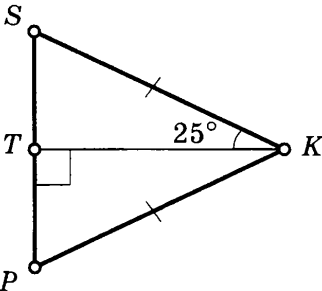
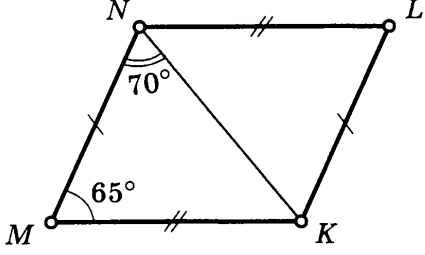
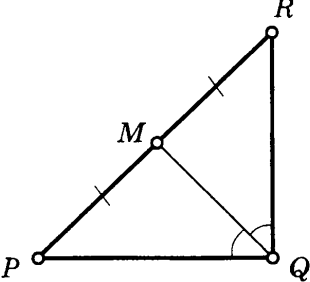
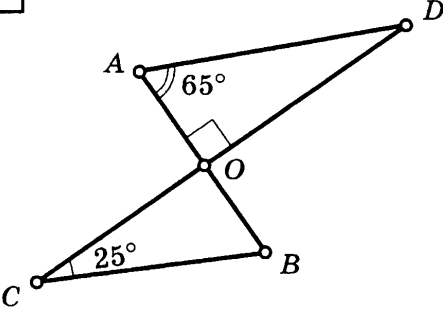
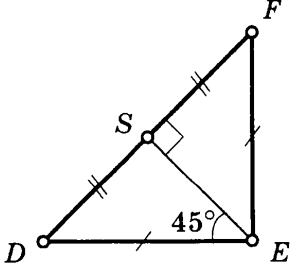
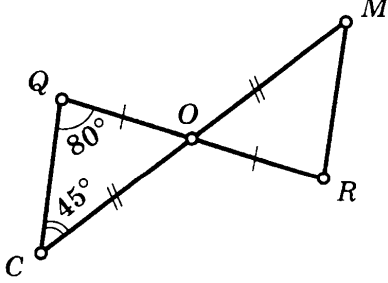
УГЛЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

Таблица 9

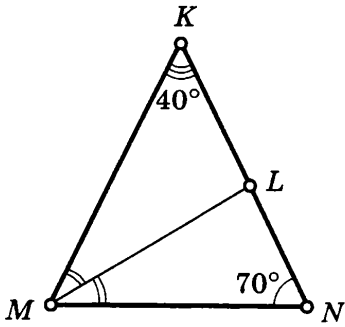
Найдите все неизвестные углы треугольника.

1 	3 
2 	4 

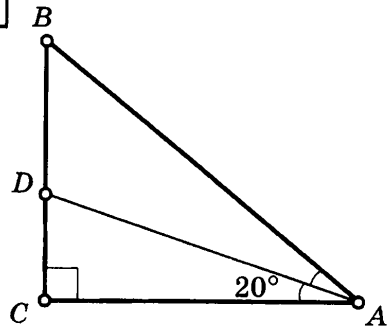
5 	9 
6 	10 
7 	11 
8 	12 

13 	17 
14 	18 
15 	19 
16 	20 

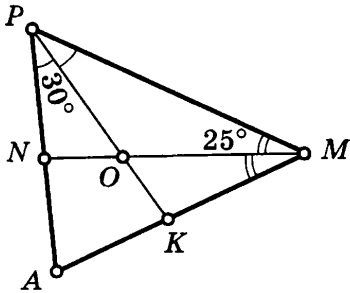
21



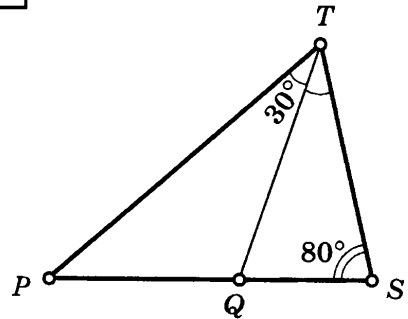
25



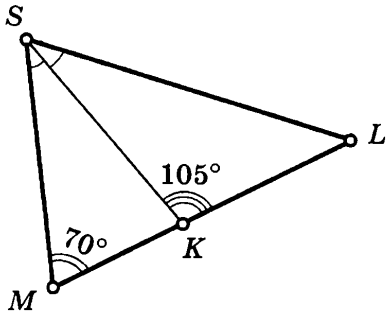
22



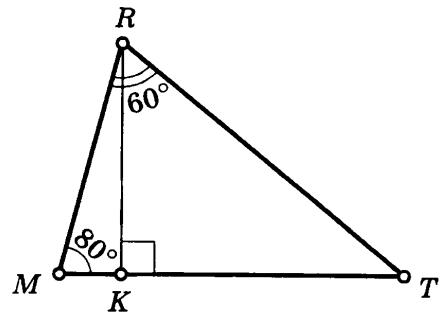
26



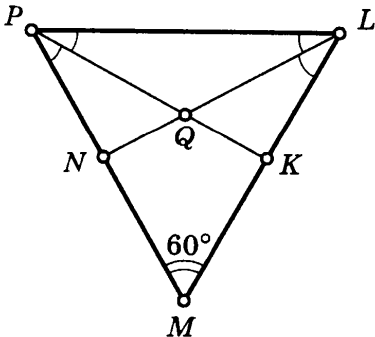
23



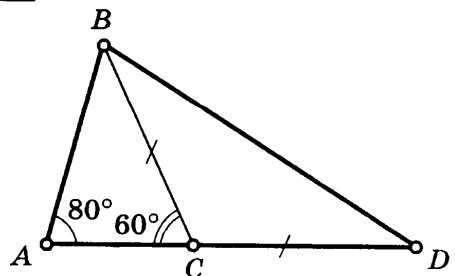
27

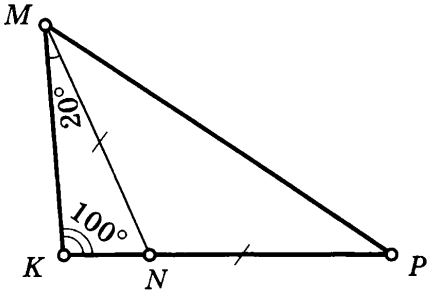
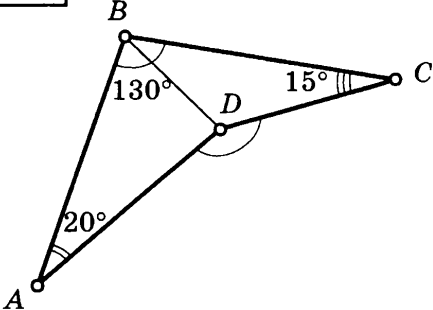
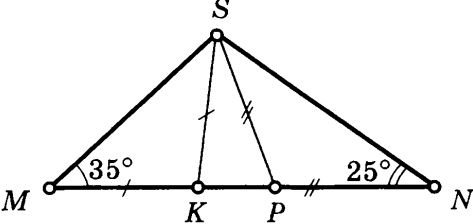
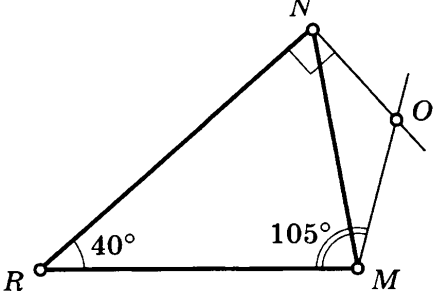


24



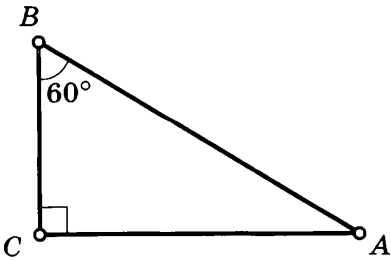
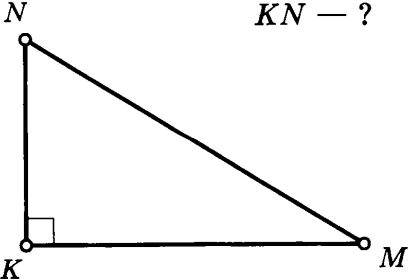
28

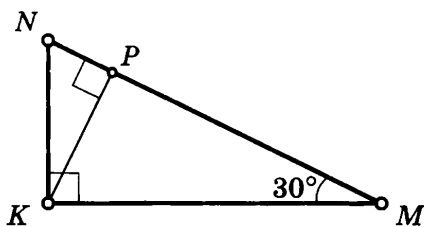
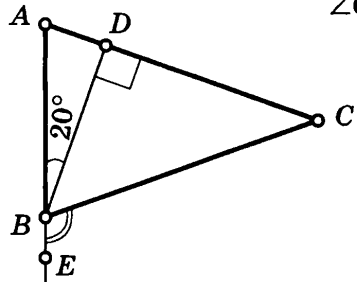
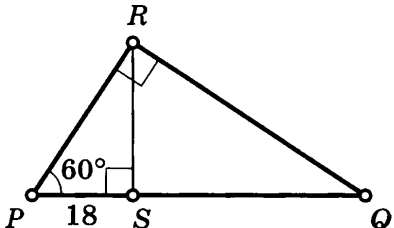
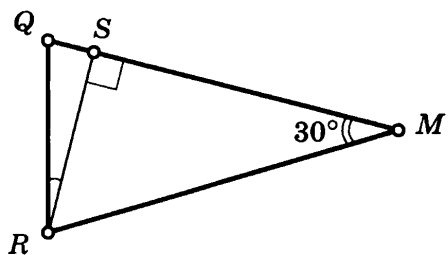
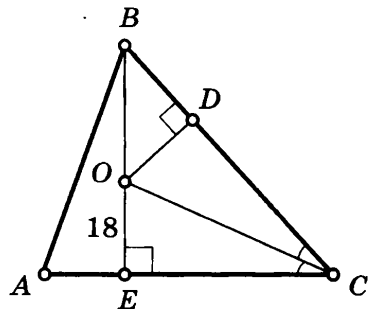
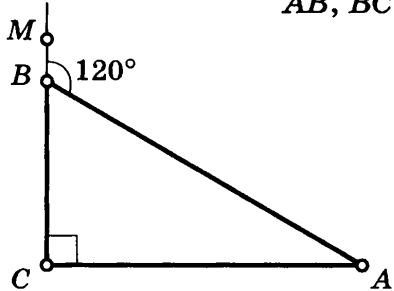
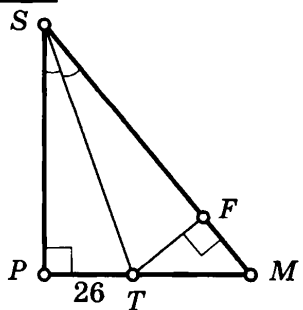
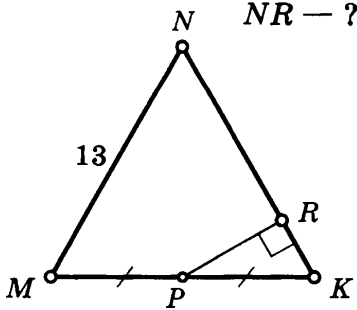


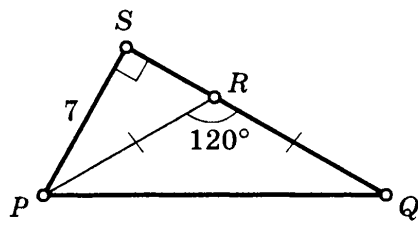
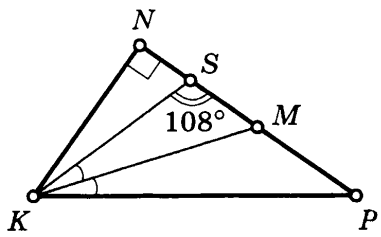
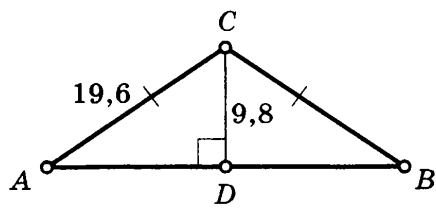
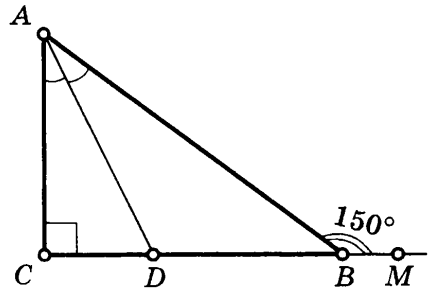
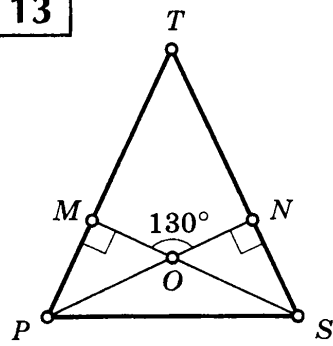
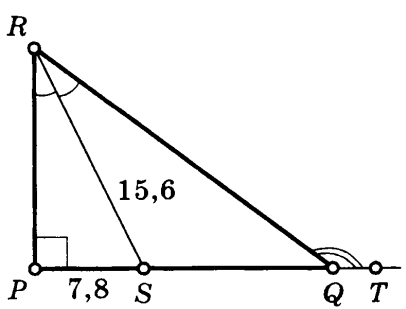
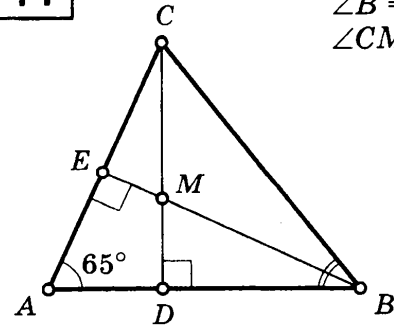
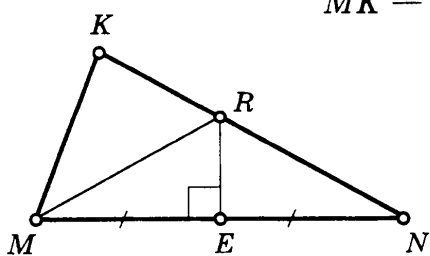
29 	31 $\angle ADC = ?$ 
30 	32 $\angle MON = ?$ 

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Таблица 10

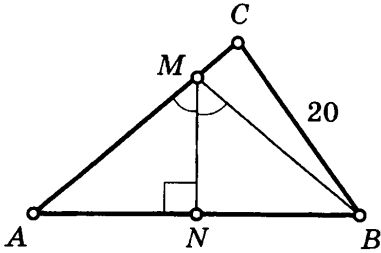
1 $AB + BC = 12$ $AB, BC = ?$ 	2 $\angle N = 2 \angle M$ $MN - KN = 15$ $KN = ?$ 
---	--

3 $MN = 36$ $MP, PN - ?$ 	7 $AC = BC$ $\angle CBE - ?$ 
4 $QS - ?$ 	8 $\angle QRS - ?$ 
5 $OD - ?$ 	9 $BC + AB = 36$ $AB, BC - ?$ 
6 $TF - ?$ 	10 $MN = NK = MK$ $NR - ?$ 

11 $PR = RQ$ $PQ = ?$ 	15 $\angle KNM, \angle NKM,$ $\angle KMN = ?$ 
12 $\angle A, \angle B, \angle ACB = ?$ 	16 $CB, CD = ?$ 
13 $PT = TS$ $\angle T, \angle TPS,$ $\angle TSP = ?$ 	17 $SQ, \angle RQT = ?$ 
14 $\angle B = 53^\circ$ $\angle CMB = ?$ 	18 $KN = 26$ $P_{\triangle MKR} = 32$ $MK = ?$ 

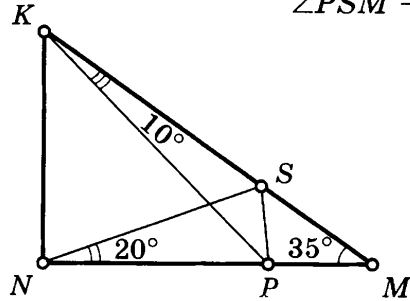
19

$AC = 24$
 $P_{\triangle MCB} = ?$



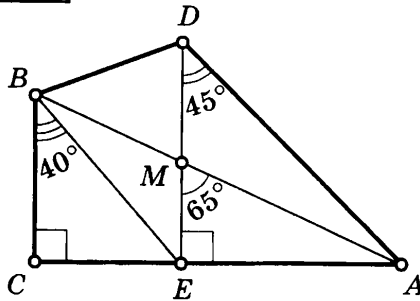
20

$\angle KNM = 90^\circ$
 $\angle PSM = ?$



21

$\angle BDE = ?$



ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Таблица 11

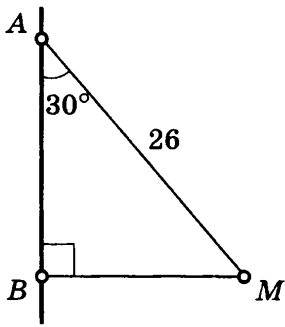
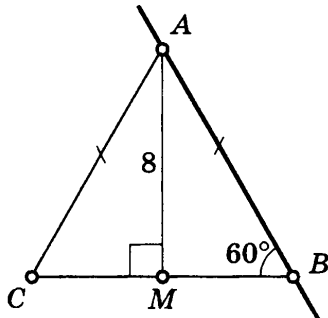
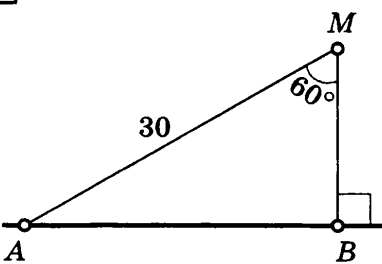
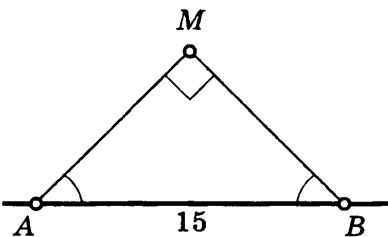
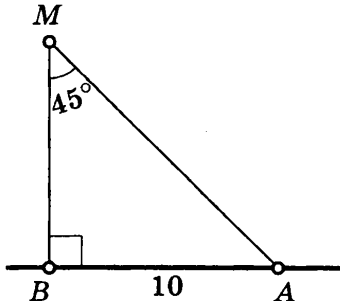
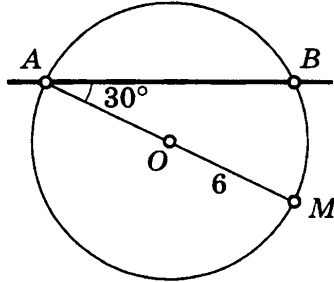
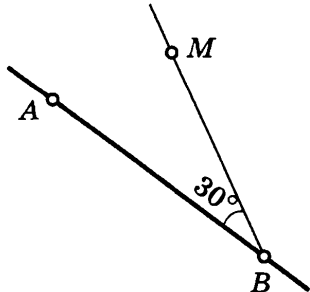
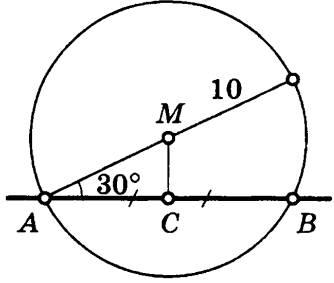
Найдите пары равных треугольников и докажите их равенство.

1	6
2	7
3	8
4	9
5	10

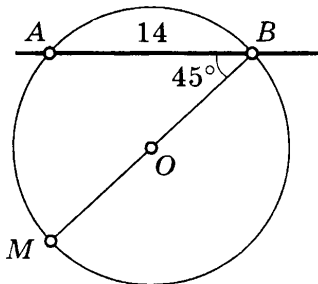
РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Таблица 12

Найдите расстояние от точки M до прямой AB .

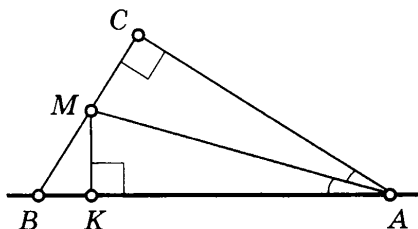
1 	5 
2 	6 
3 	7 
4 	8 

9



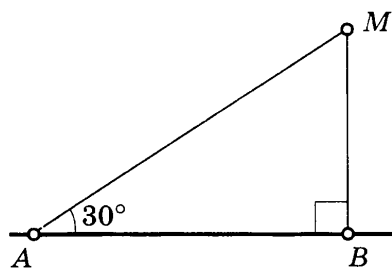
13

$MC = 13$



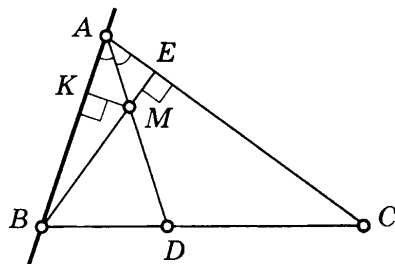
10

$AM - MB = 7$



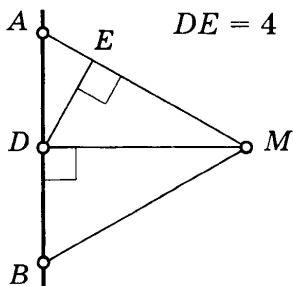
14

$ME = 13$

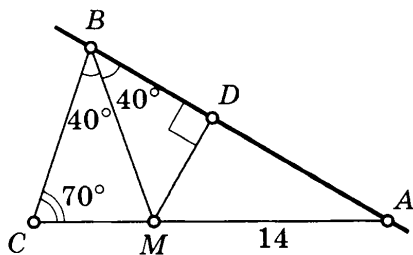


11

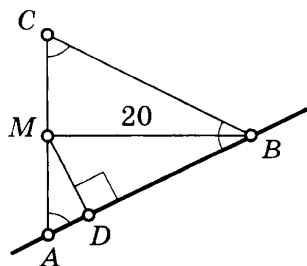
$AM = MB = AB$
 $DE = 4$



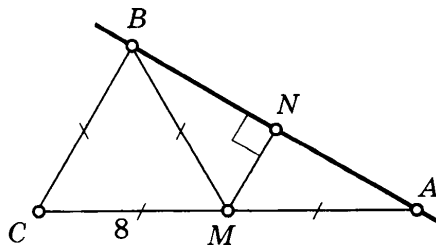
15



12



16

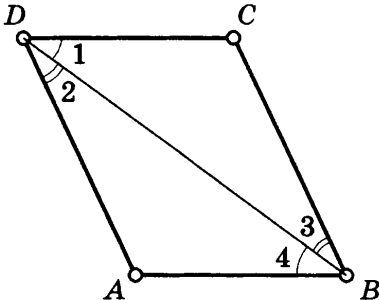
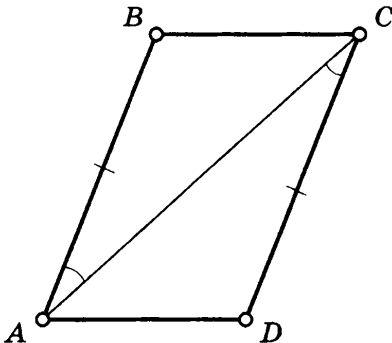
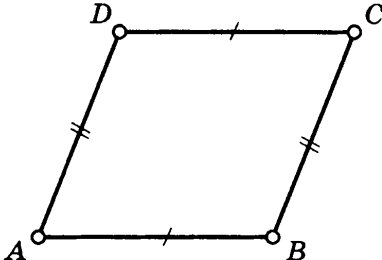
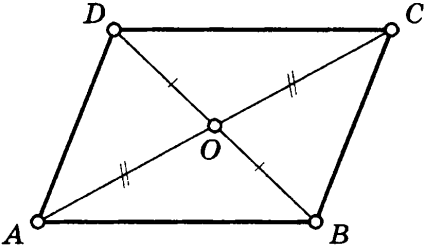
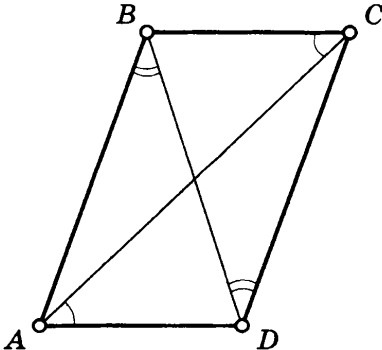
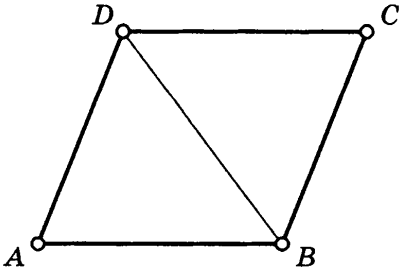


VIII класс

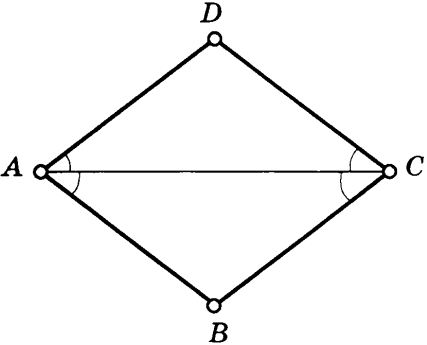
ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Таблица 1

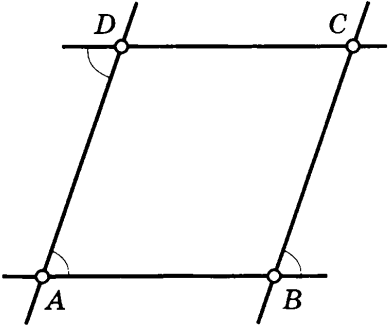
Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

1 	4 
2 	5 
3 	6 $\triangle ABD = \triangle CDB$ 

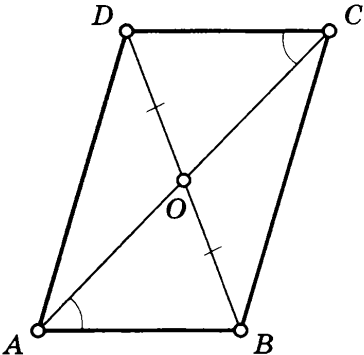
7



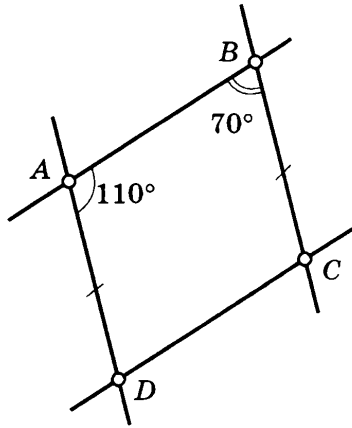
10



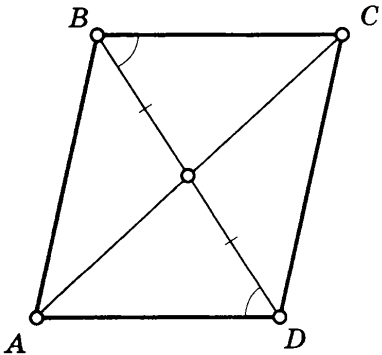
8



11

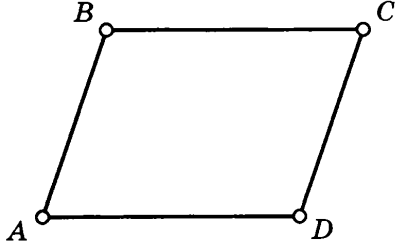


9



12

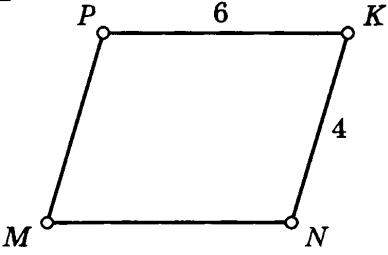
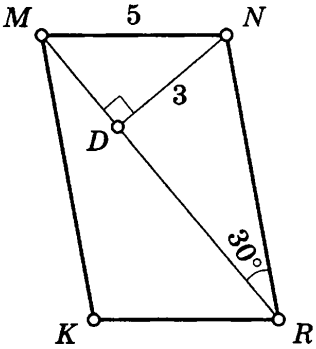
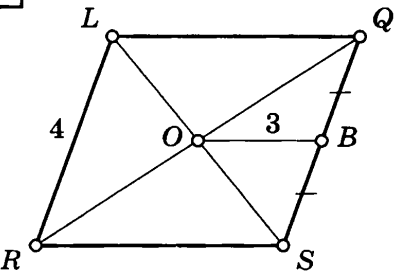
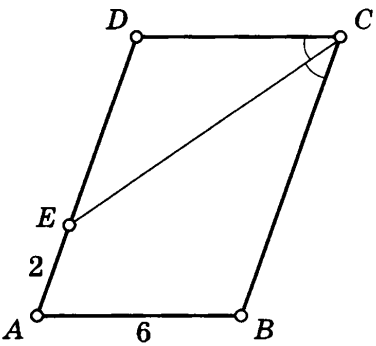
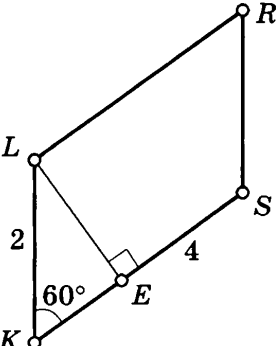
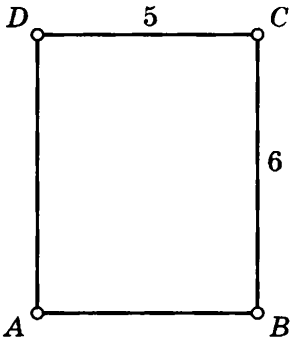
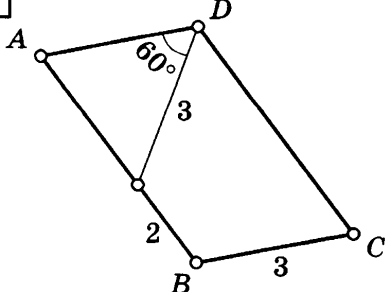
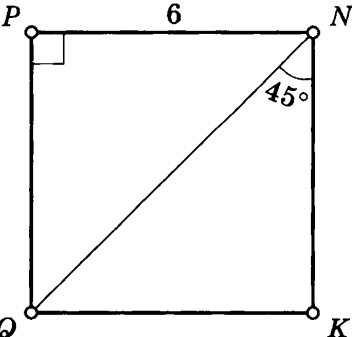
$\angle A + \angle D = 180^\circ$
 $BC \parallel AD$



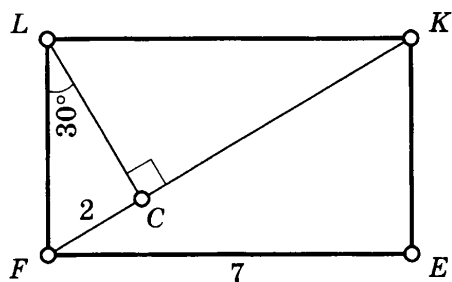
СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Таблица 2

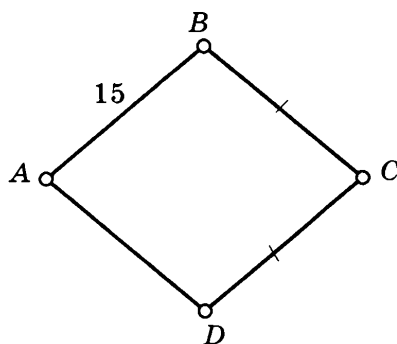
Найдите периметр параллелограмма.

1 	5 
2 	6 
3 	7 
4 	8 

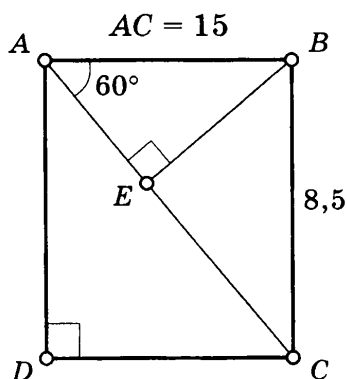
9



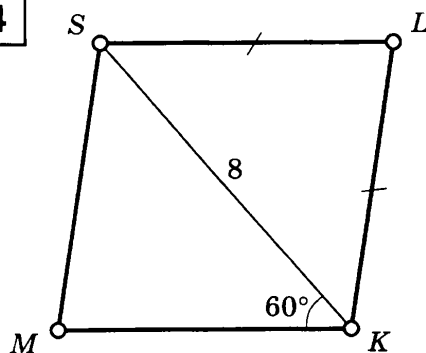
13



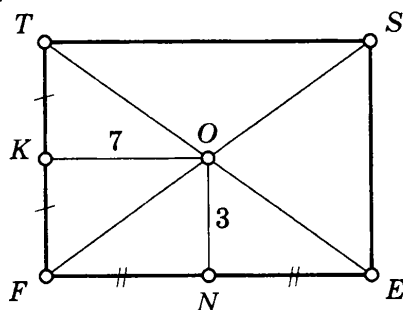
10



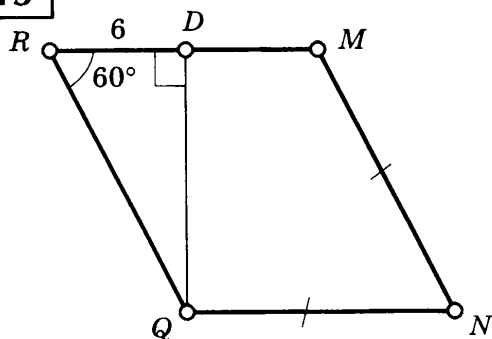
14



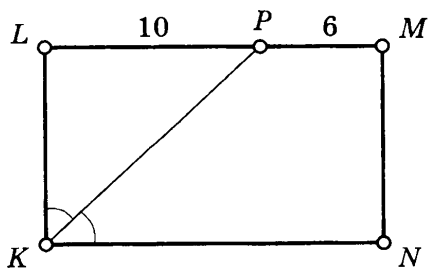
11



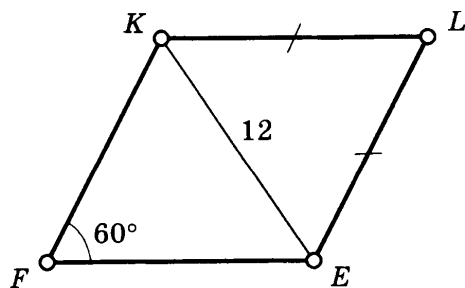
15



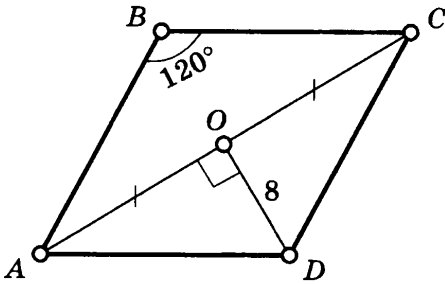
12



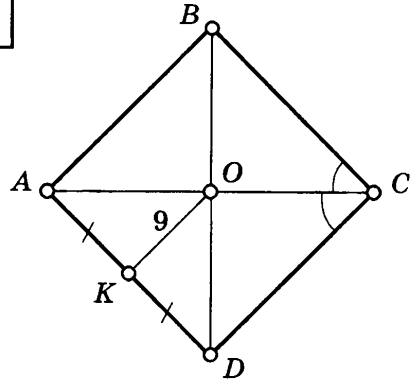
16



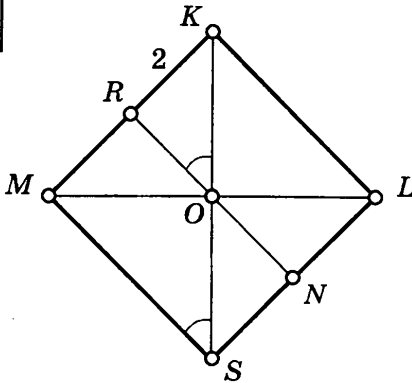
17



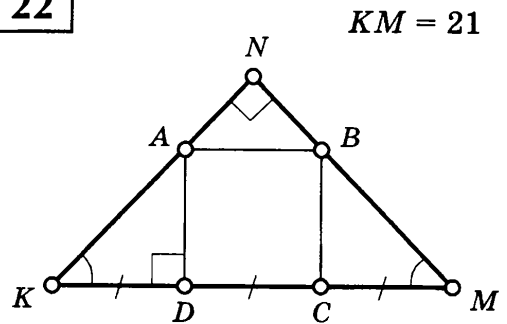
21



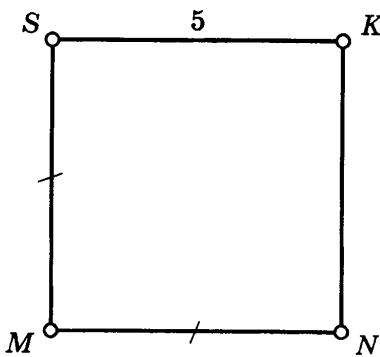
18



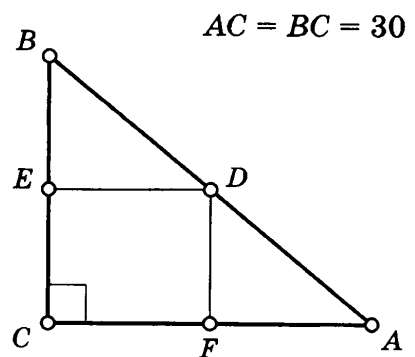
22



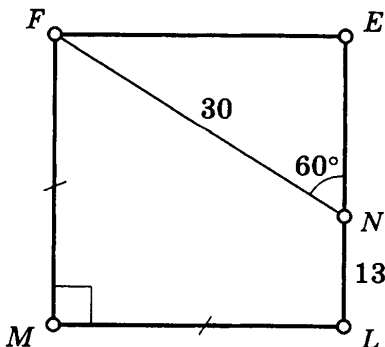
19



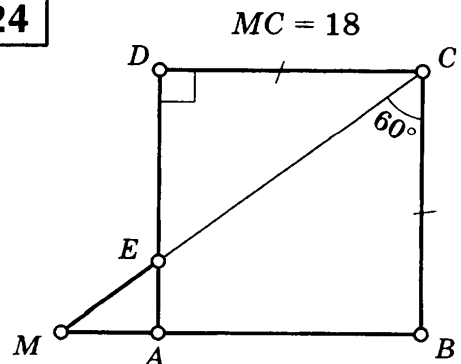
23



20



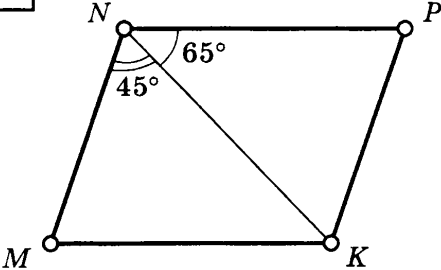
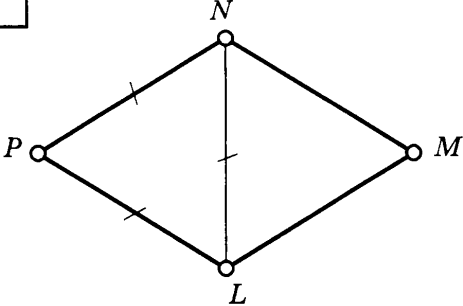
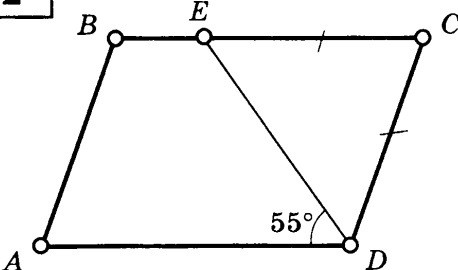
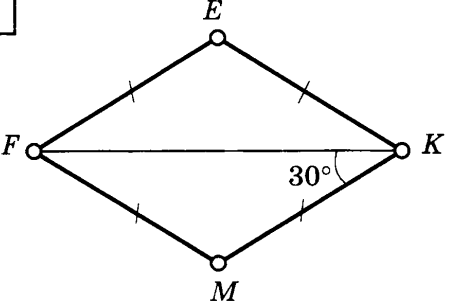
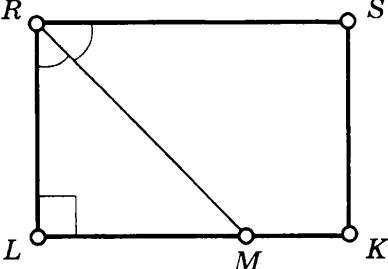
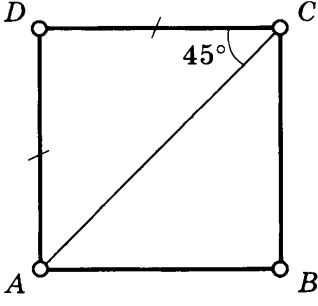
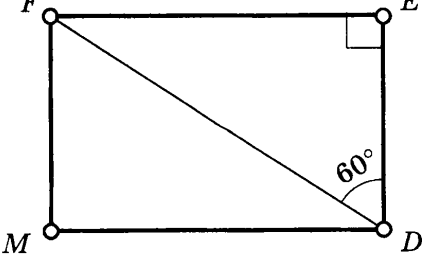
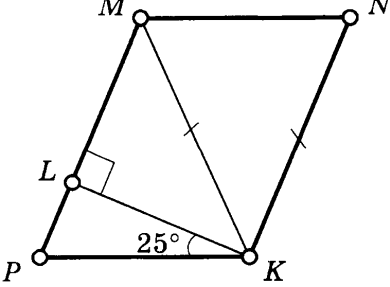
24

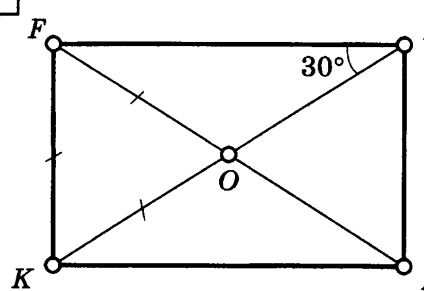
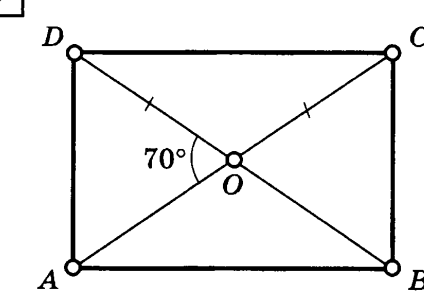
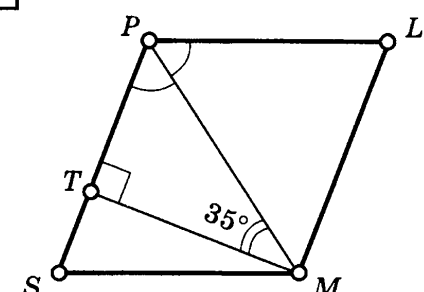
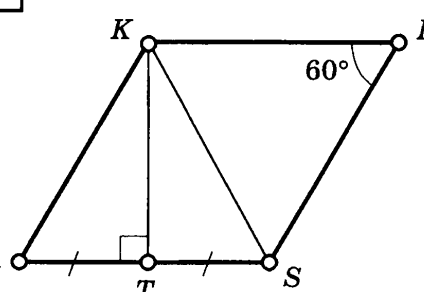
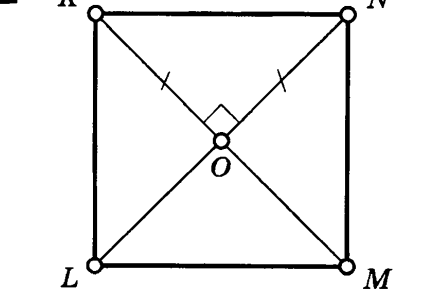
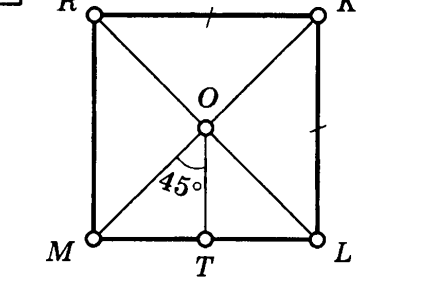
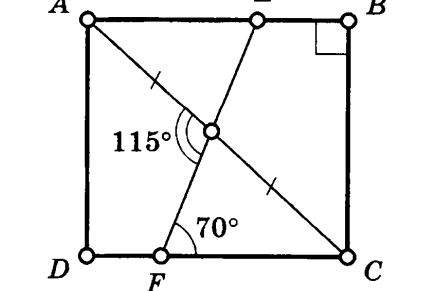
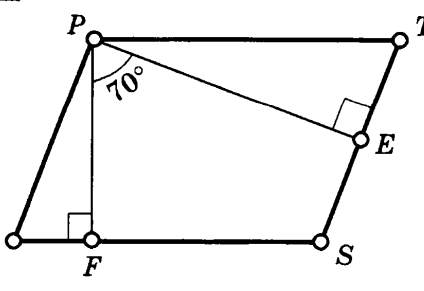


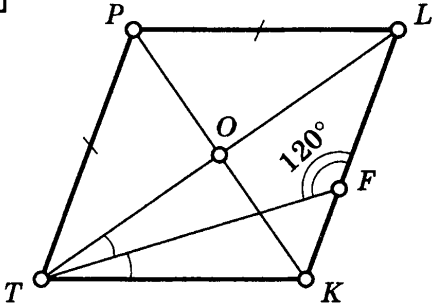
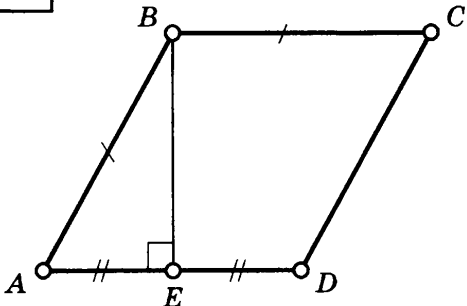
СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Таблица 3

Найдите неизвестные углы.

1 	5 
2 	6 
3 	7 
4 	8 

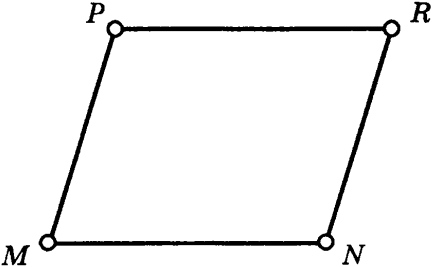
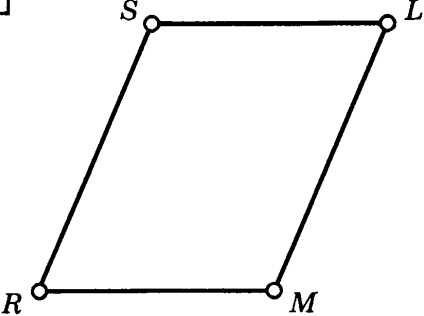
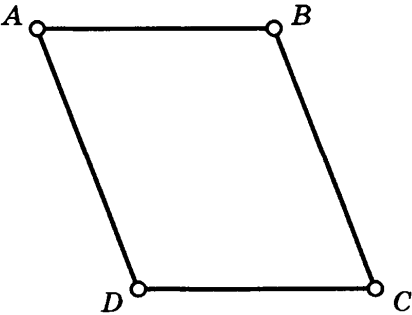
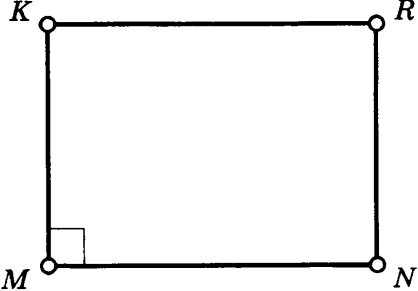
9 	13 
10 	14 
11 	15 
12 	16 

17 	18 
---	--

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Таблица 4

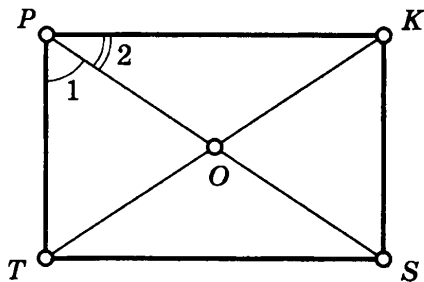
Найдите углы параллелограмма.

1 $\angle M + \angle R = 140^\circ$ 	3 $\angle S : \angle L = 2 : 1$ 
2 $\angle B - \angle A = 60^\circ$ 	4 

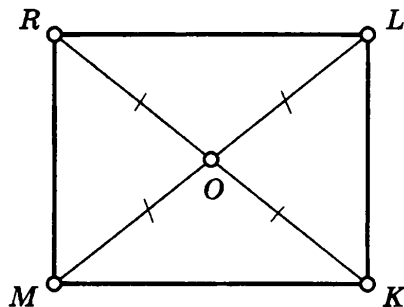
5

$$\angle 1 : \angle 2 = 2 : 1$$

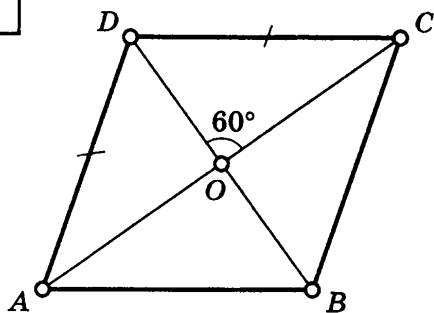
$$\angle 1 - \angle 2 = 30^\circ$$



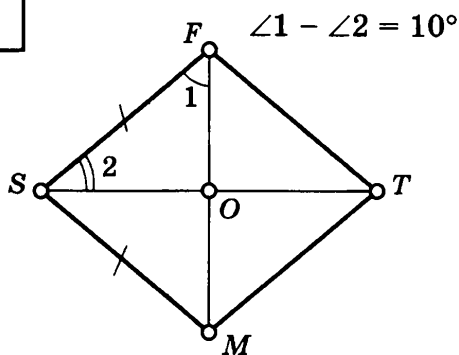
7



6

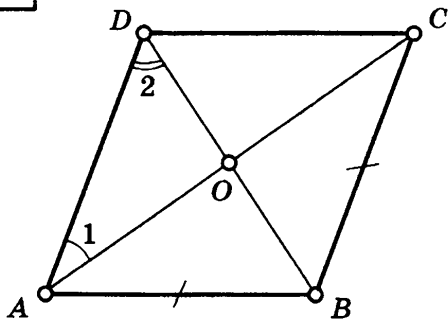


8



9

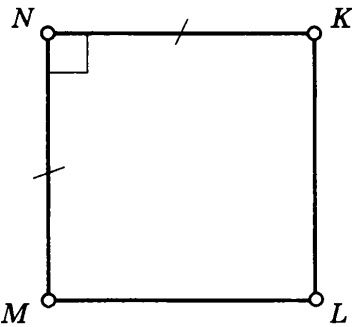
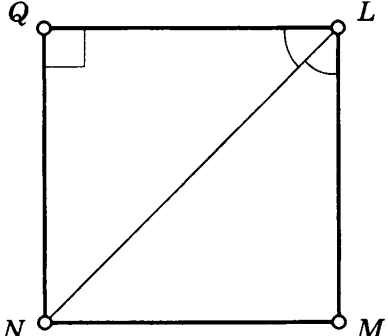
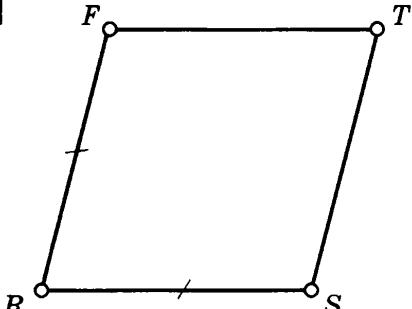
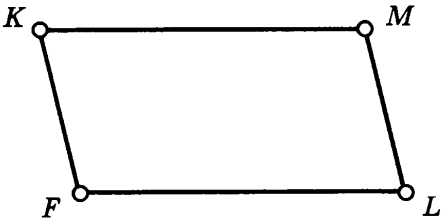
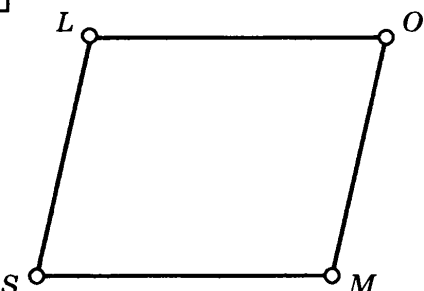
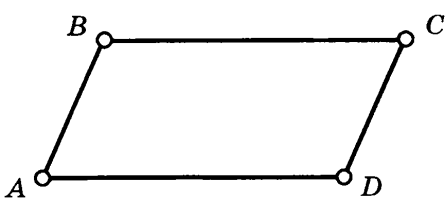
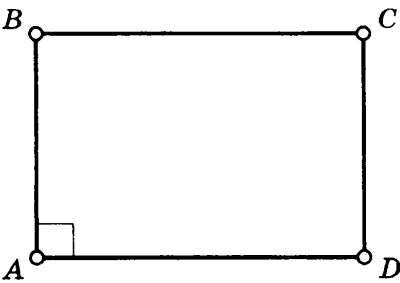
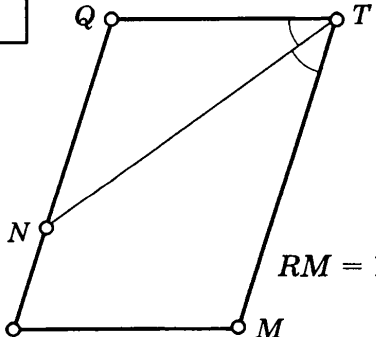
$$\angle 1 : \angle 2 = 1 : 4$$



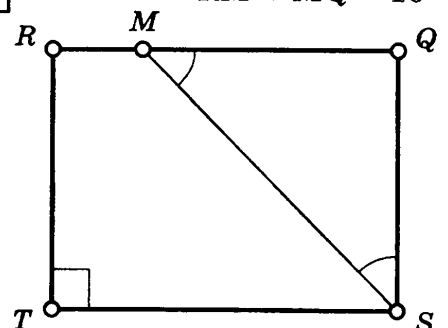
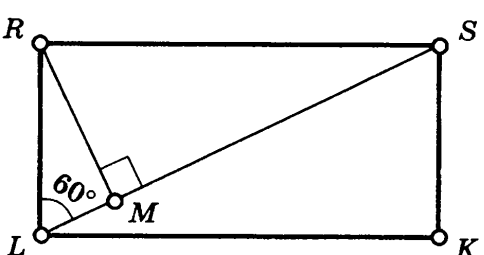
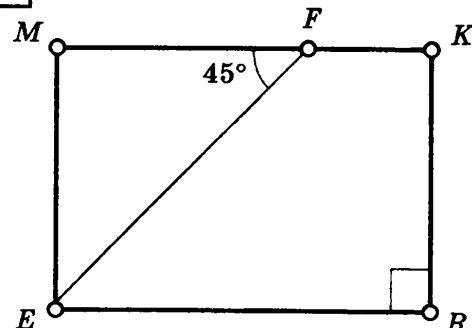
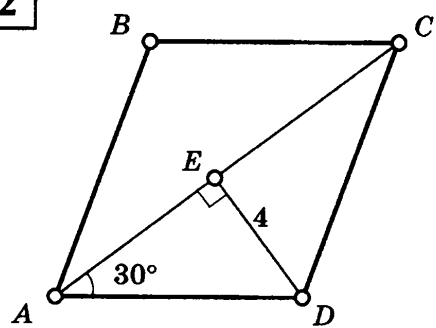
ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Таблица 5

Найдите стороны параллелограмма, если $P = 36$.

1 	5 
2 	6 $KM = 2 KF$ 
3 $LO - LS = 1$ 	7 $AB : BC = 1 : 2$ 
4 $AB : BC = 2 : 3$ 	8  $RM = 1,5 RN$

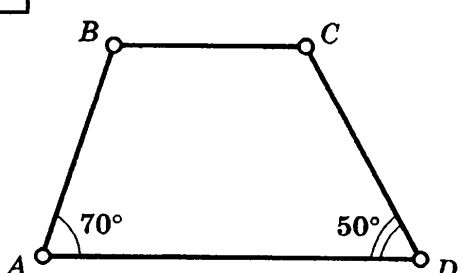
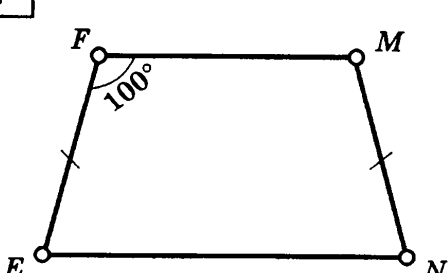
Окончание табл. 5

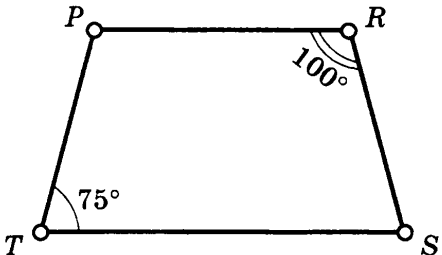
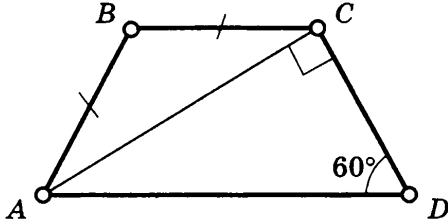
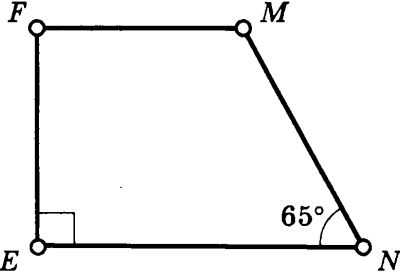
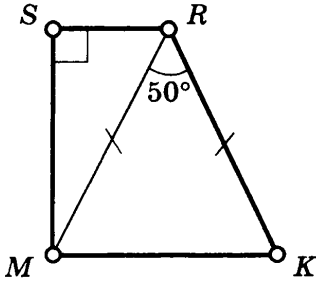
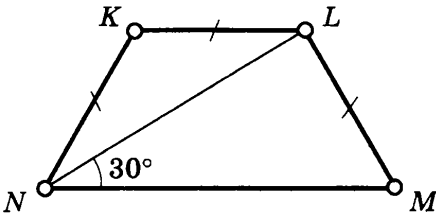
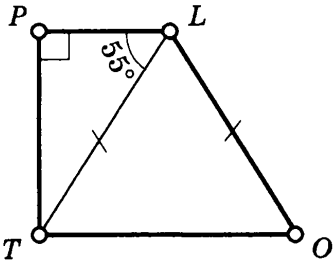
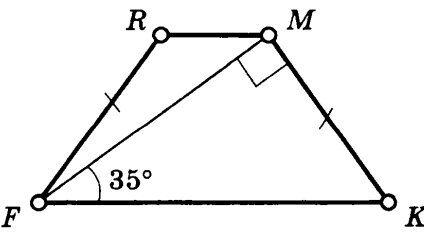
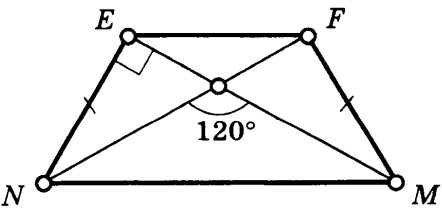
9 $RM + MQ = 10$ 	11 $LM = 2$ 
10 $MF - FK = 6$ 	12 

ТРАПЕЦИЯ

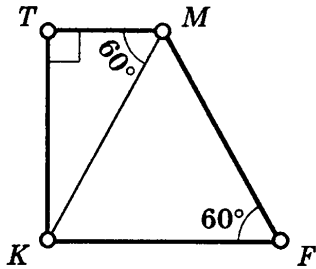
Таблица 6

Найдите углы трапеции.

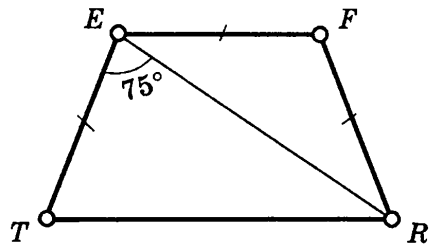
1 	2 
---	--

3  A trapezoid with vertices P, R, T, and S. The angle at vertex R is 100° and the angle at vertex T is 75°.	7  A trapezoid with vertices A, B, C, and D. Diagonal AC is drawn. Sides AB and BC are marked with single tick marks, and sides AD and CD are marked with double tick marks. The angle at vertex D is 60°. A right angle symbol is shown at vertex C between AC and CD.
4  A trapezoid with vertices F, M, E, and N. Diagonal FN is drawn. Sides FE and EN are marked with single tick marks, and sides FM and MN are marked with double tick marks. The angle at vertex N is 65°. A right angle symbol is shown at vertex E between FE and EN.	8  A trapezoid with vertices S, R, M, and K. Diagonal SR is drawn. Sides SM and MR are marked with single tick marks, and sides SK and KR are marked with double tick marks. The angle at vertex R is 50°. A right angle symbol is shown at vertex S between SR and SM.
5  A trapezoid with vertices K, L, N, and M. Diagonal LN is drawn. Sides KN and LM are marked with single tick marks, and sides KL and LM are marked with double tick marks. The angle at vertex N is 30°.	9  A trapezoid with vertices P, L, T, and O. Diagonal PL is drawn. Sides PT and LO are marked with single tick marks, and sides PL and LO are marked with double tick marks. The angle at vertex L is 53°. A right angle symbol is shown at vertex P between PL and PT.
6  A trapezoid with vertices R, M, F, and K. Diagonal FM is drawn. Sides FR and MK are marked with single tick marks, and sides FM and MK are marked with double tick marks. The angle at vertex F is 35°. A right angle symbol is shown at vertex M between FM and MK.	10  A trapezoid with vertices E, F, N, and M. Diagonals EM and FN are drawn. Sides EN and FM are marked with single tick marks, and sides EM and FN are marked with double tick marks. The angle between the diagonals at their intersection is 120°. A right angle symbol is shown at vertex E between EN and EM.

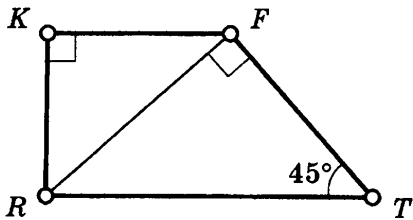
11



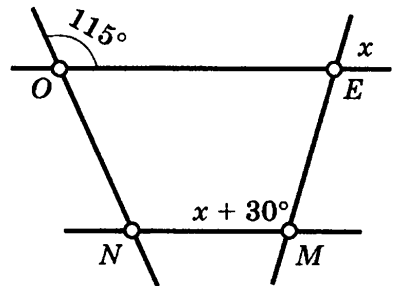
15



12

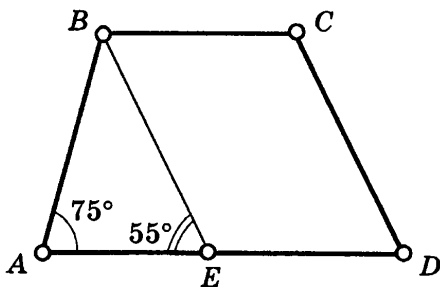


16

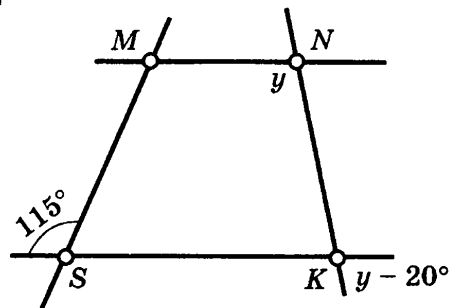


13

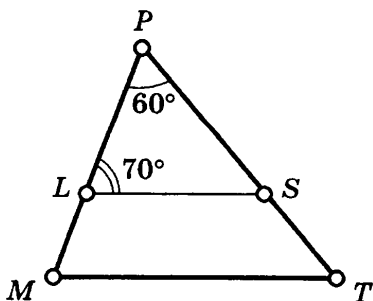
$BE \parallel CD$



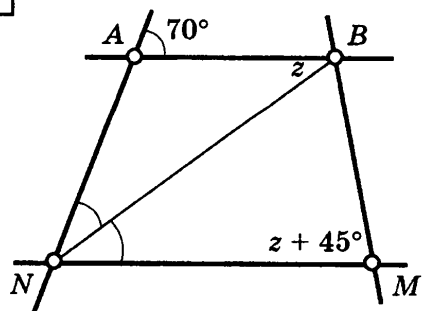
17



14

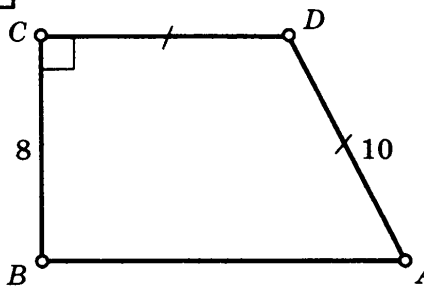
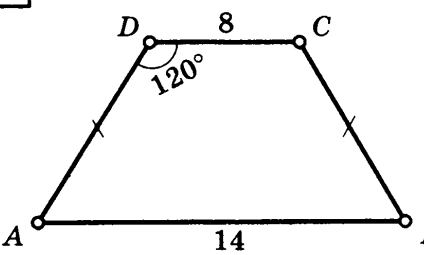
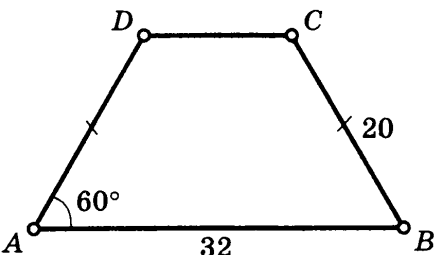
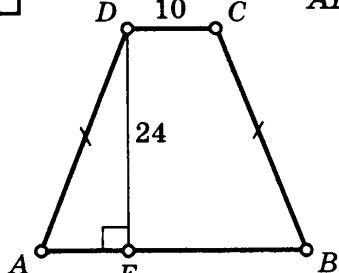
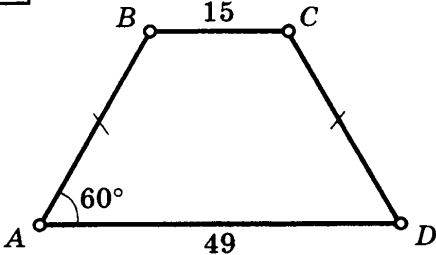
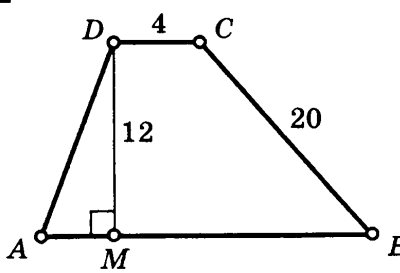
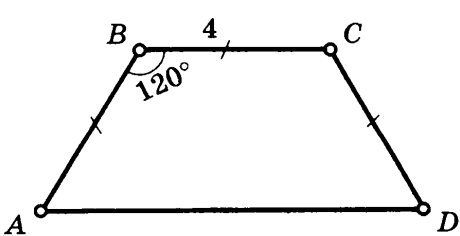
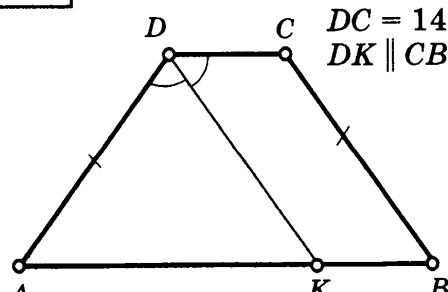


18

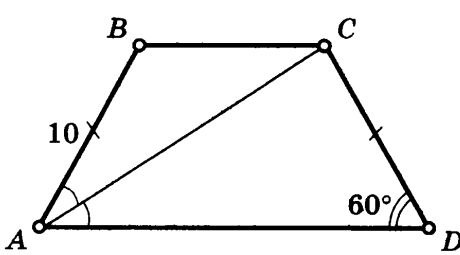
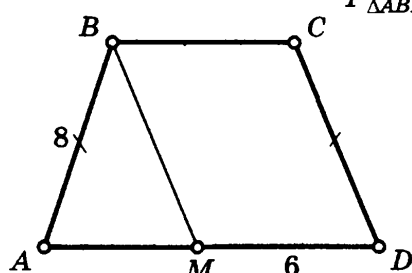


ТРАПЕЦИЯ

Найдите P_{ABCD} .

1 	5 
2 	6 
3 	7 
4 	8 

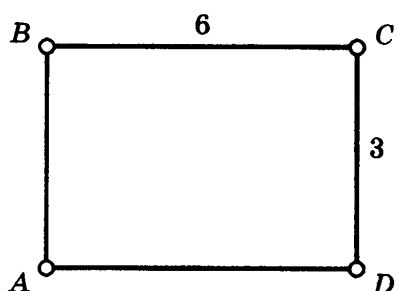
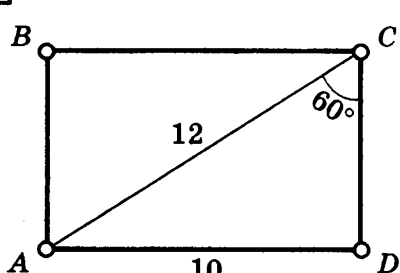
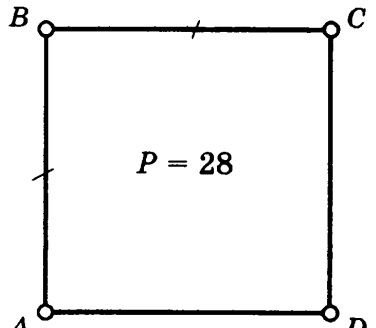
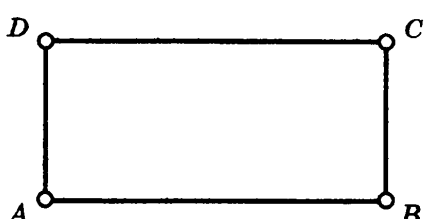
Окончание табл. 7

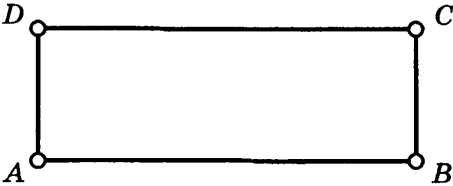
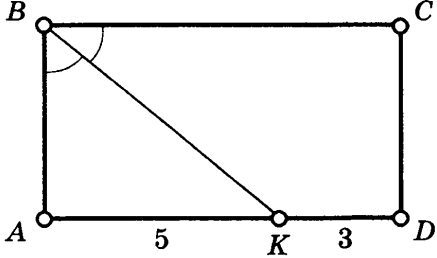
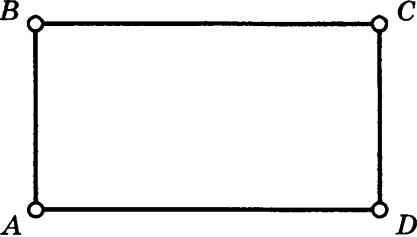
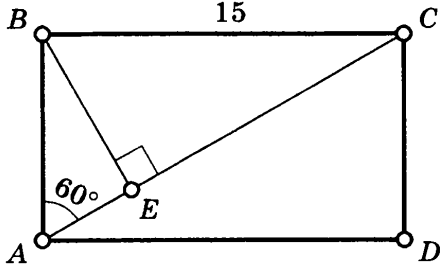
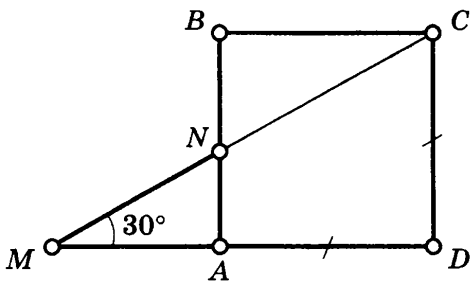
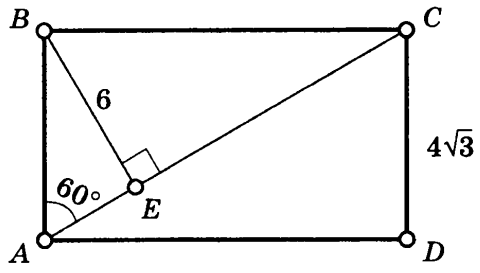
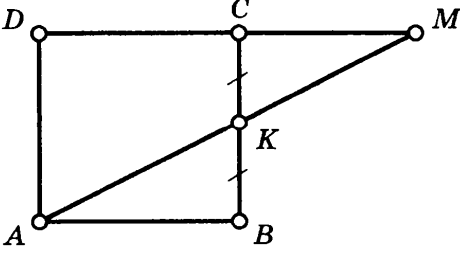
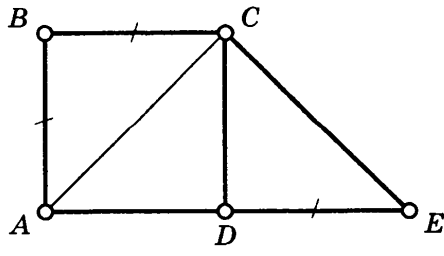
9 	10 $BM \parallel CD$ $P_{\triangle ABM} = 20$ 
--	---

ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

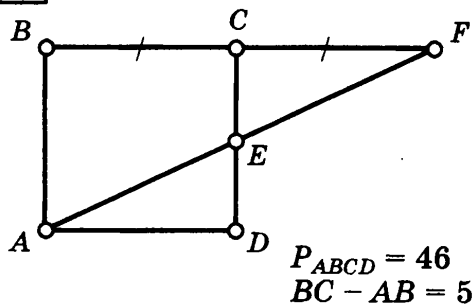
Таблица 8

Найдите S_{ABCD} .

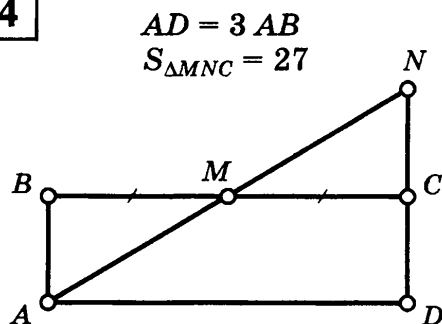
1 	3 
2 	4 $AB = 3 BC$ $AB - BC = 12$ 

5 $P = 30$ $AB = 4 BC$ 	9 
6 $P = 36$ $AD : DC = 2 : 1$ 	10 $AE = 2,5 \sqrt{3}$ 
7 $MC = 20$ 	11 
8 $S_{\triangle AMD} = 33$ 	12 $S_{\triangle ACE} = 64$ 

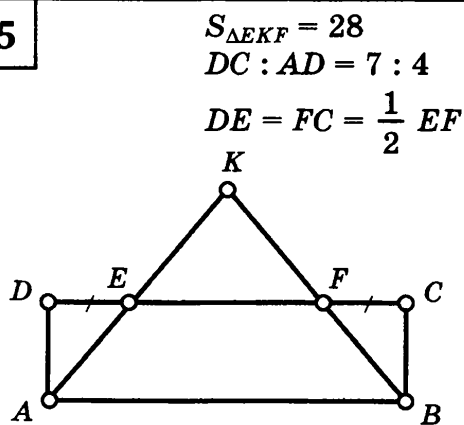
13



14



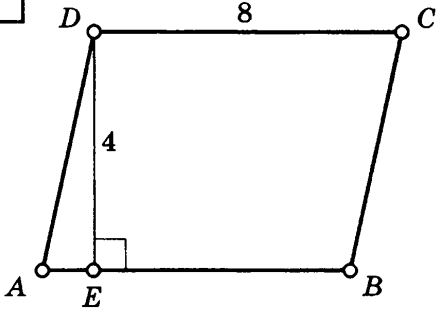
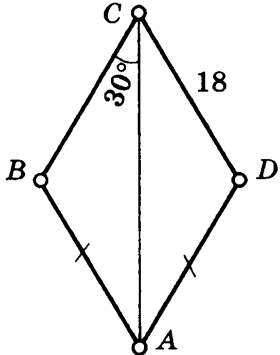
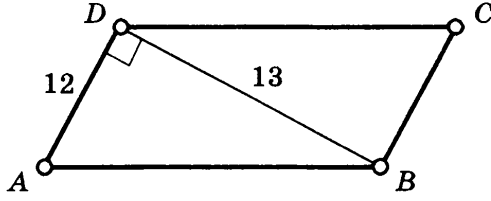
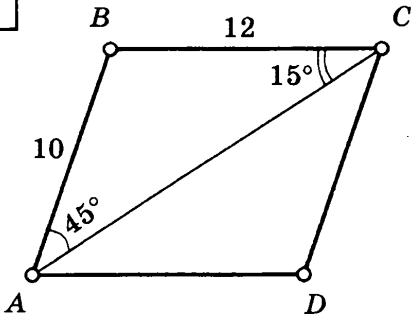
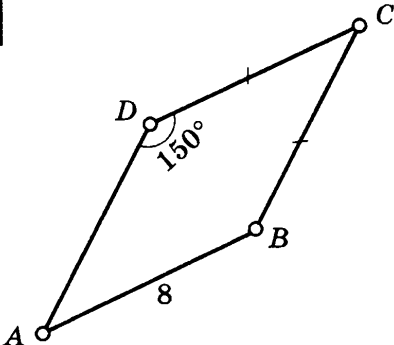
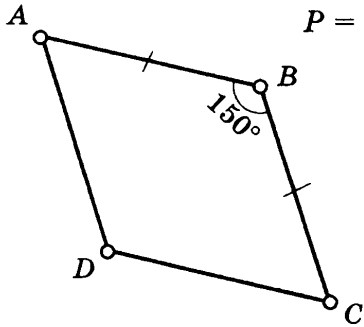
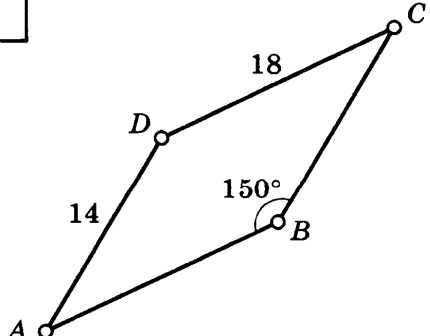
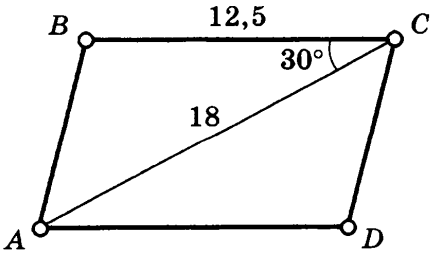
15



ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Таблица 9

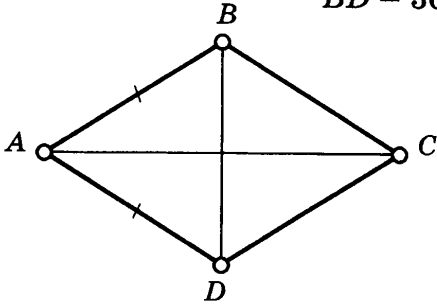
Найдите S_{ABCD} .

1 	5 
2 	6 
3 	7 
4 	8 

9

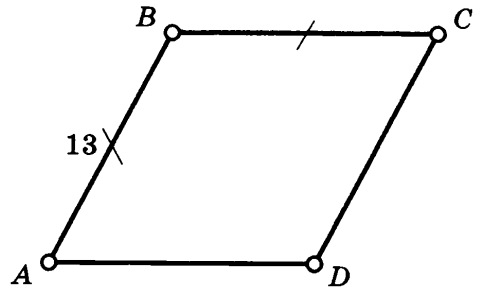
$$AC = 48$$

$$BD = 36$$

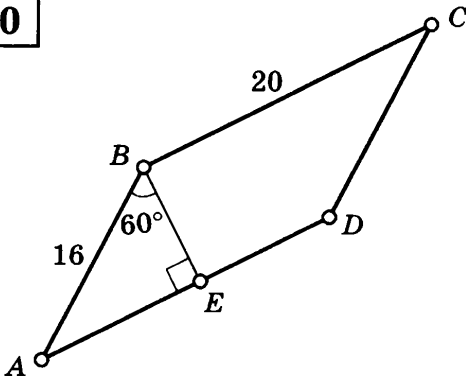


13

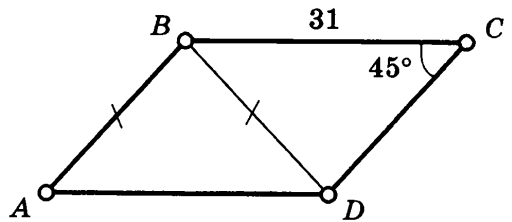
$$\angle B = 2 \angle A$$



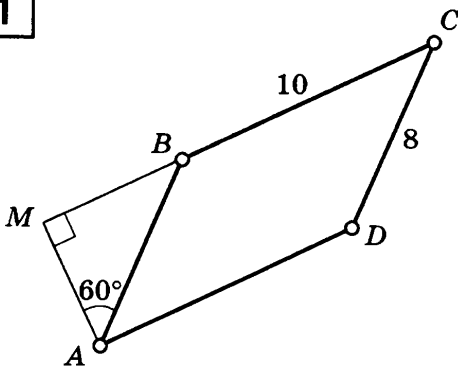
10



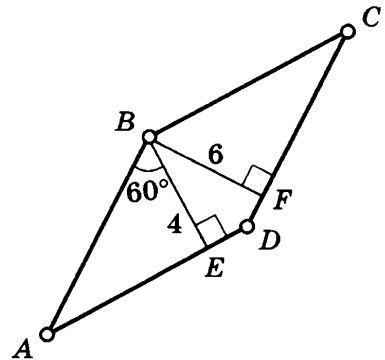
14



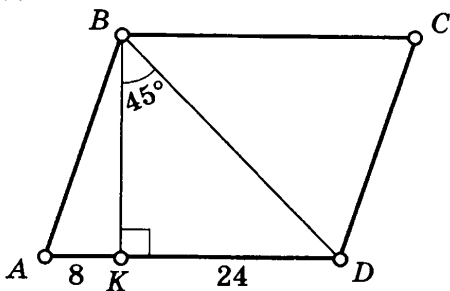
11



15

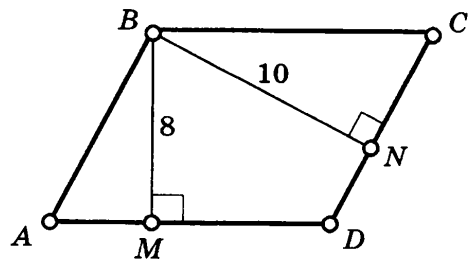


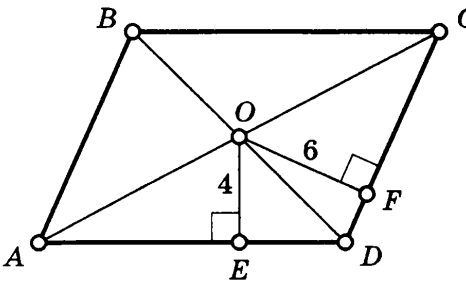
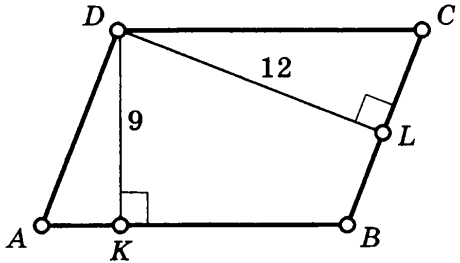
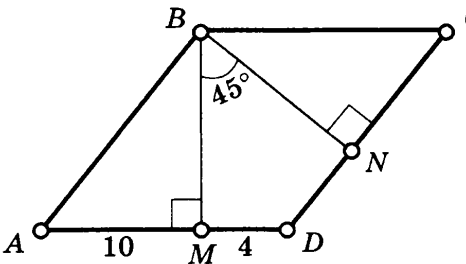
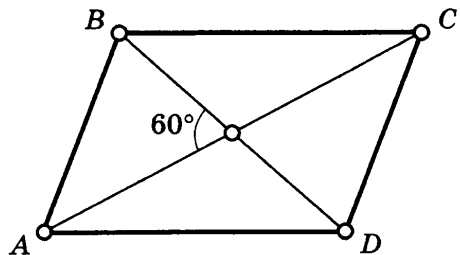
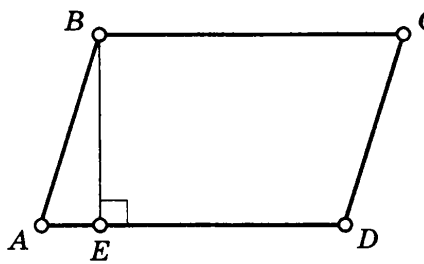
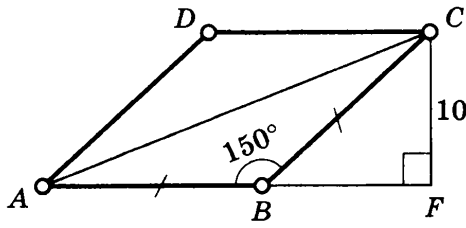
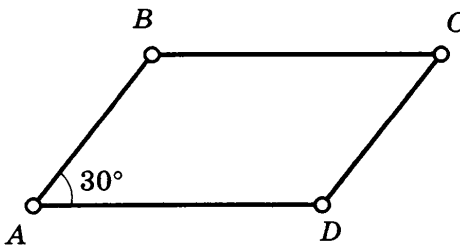
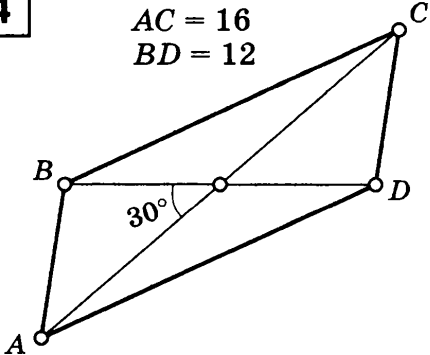
12



16

$$P = 84$$

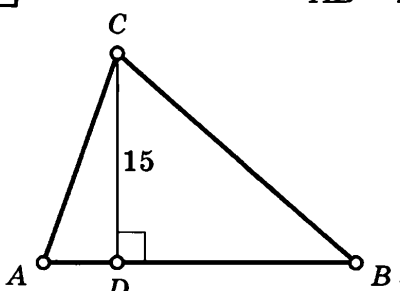
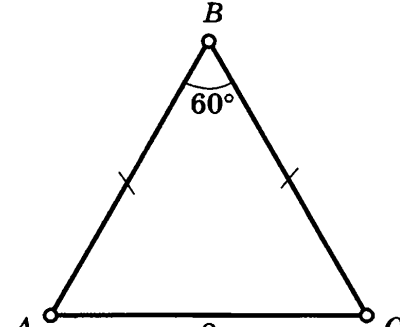
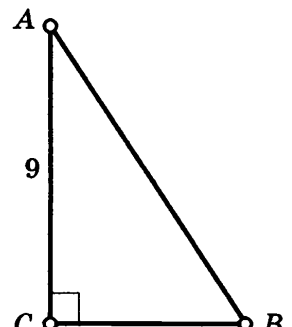
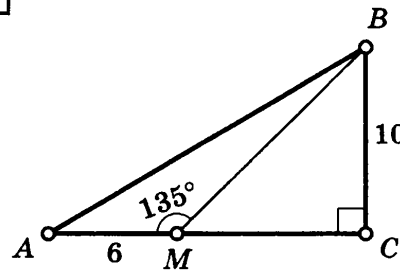
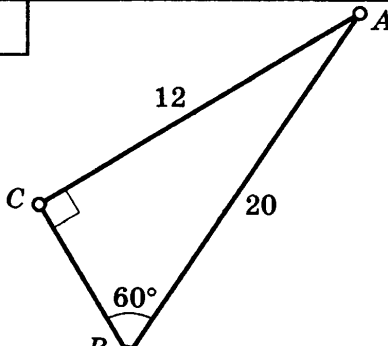
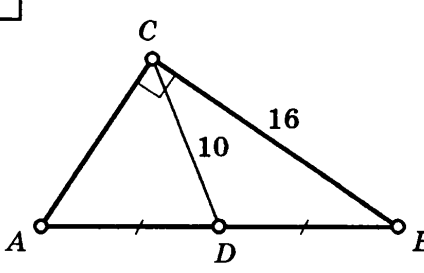
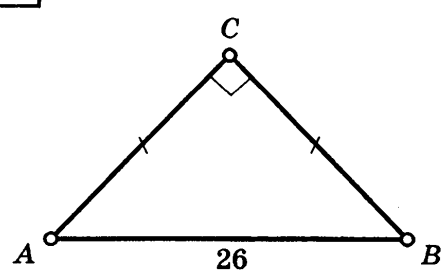
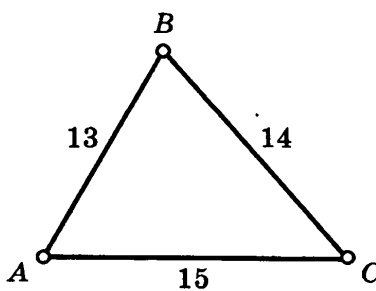


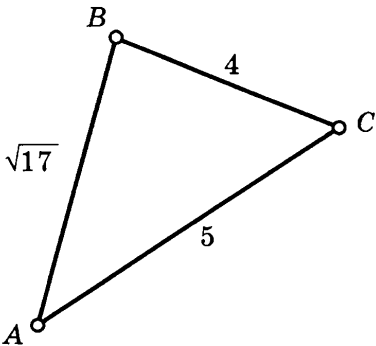
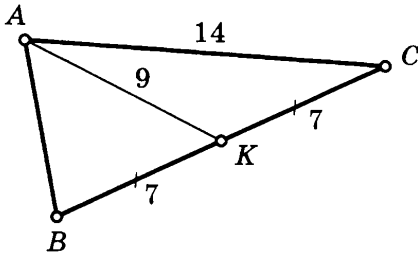
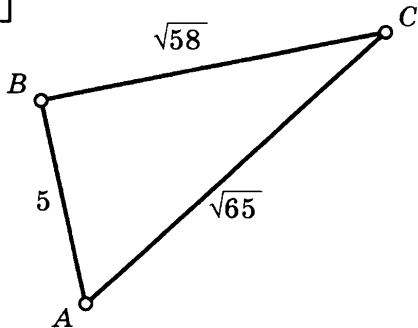
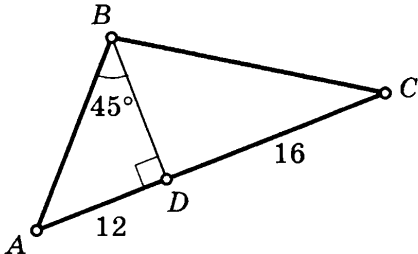
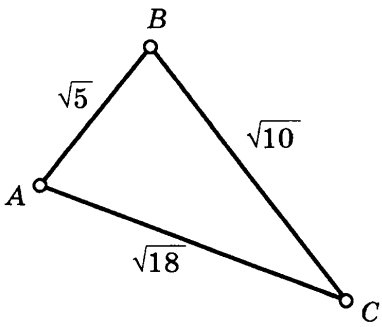
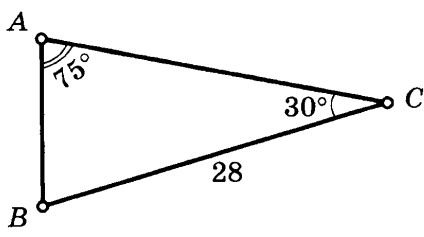
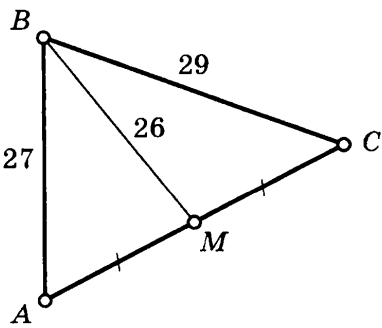
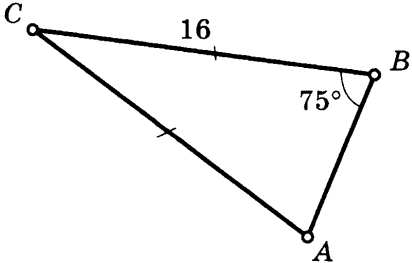
17 $P = 20$ 	21 $AB - BC = 4$ 
18 	22 $BD = 12$ $AC = 16$ 
19 $BE : AD = 1 : 3$ $AD - BE = 8$ 	23 
20 $P = 92$ $BC - AB = 4$ 	24 $AC = 16$ $BD = 12$ 

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Таблица 10

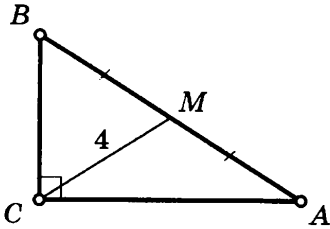
Найдите $S_{\triangle ABC}$.

1 $AB = 22$ 	5 
2 	6 
3 	7 
4 	8 

9  Triangle ABC with side $AB = \sqrt{17}$, $BC = 4$, and $AC = 5$.	13  Triangle ABC with side $AC = 14$, median $AK = 9$, and segments $BK = KC = 7$.
10  Triangle ABC with side $AB = 5$, $BC = \sqrt{58}$, and $AC = \sqrt{65}$.	14  Triangle ABC with side $AB = 12$, $BC = 16$, and $\angle ABC = 45^\circ$. AD is the altitude from A to BC.
11  Triangle ABC with side $AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{10}$, and $AC = \sqrt{18}$.	15  Triangle ABC with side $BC = 28$, $\angle A = 75^\circ$, and $\angle C = 30^\circ$.
12  Triangle ABC with side $AB = 27$, $BC = 29$, and median $BM = 26$. M is the midpoint of AC.	16  Triangle ABC with side $BC = 16$, $\angle B = 75^\circ$, and $AB = AC$.

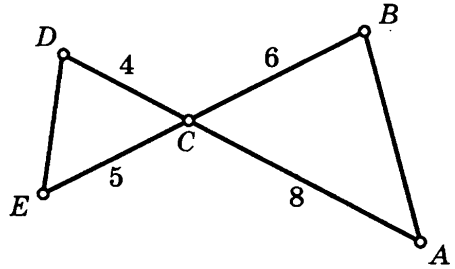
17

$$\angle ACM : \angle BCM = 1 : 2$$



19

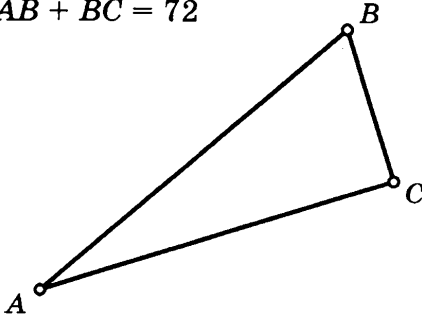
$$S_{\triangle DEC} + S_{\triangle ABC} = 51$$



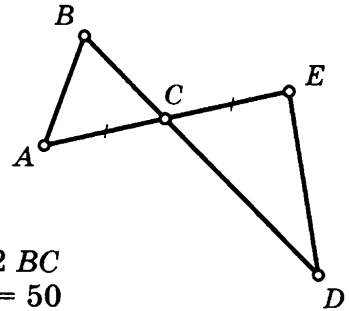
18

$$\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$$

$$AB + BC = 72$$



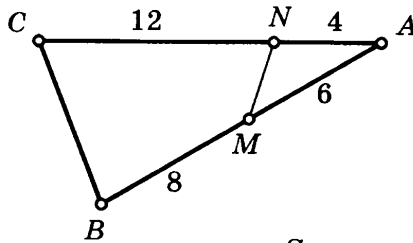
20



$$CD = 2 BC$$

$$S_{\triangle CED} = 50$$

21

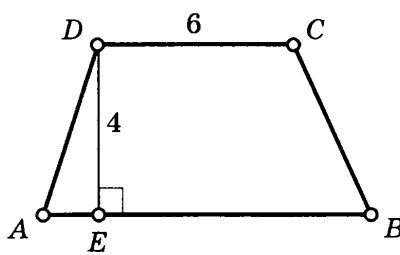
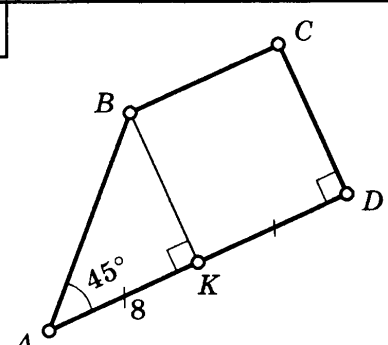
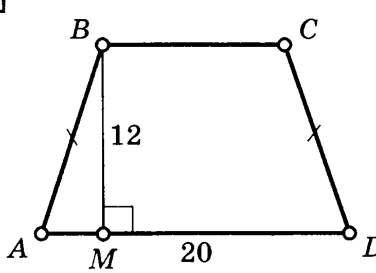
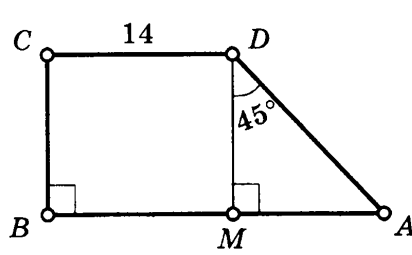
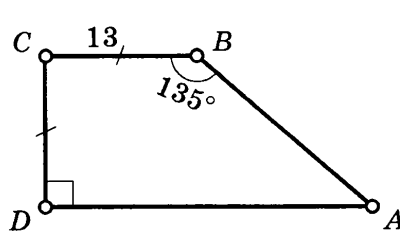
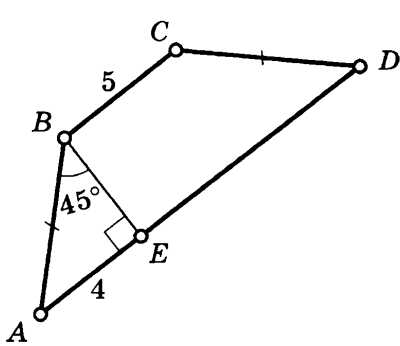
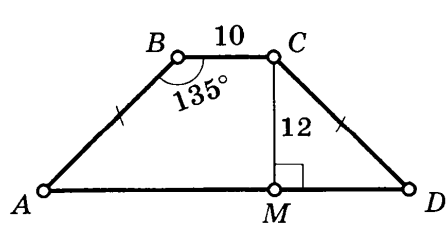
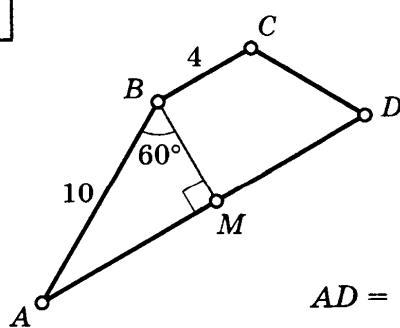


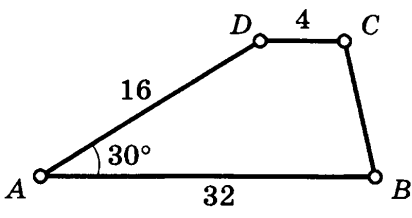
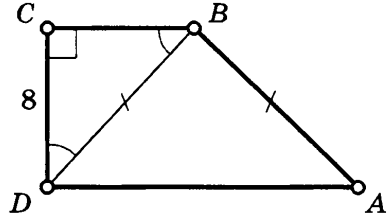
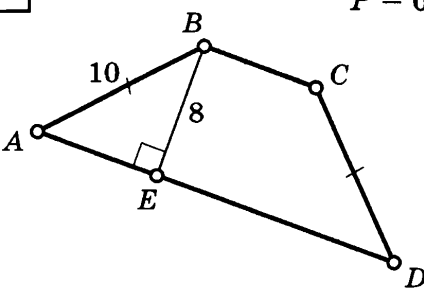
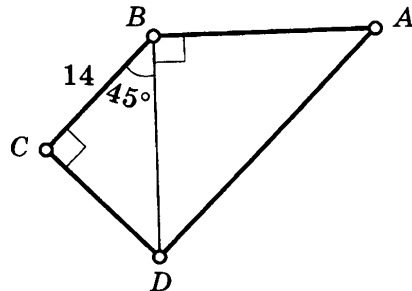
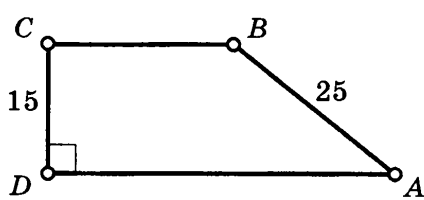
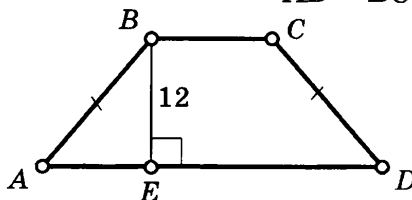
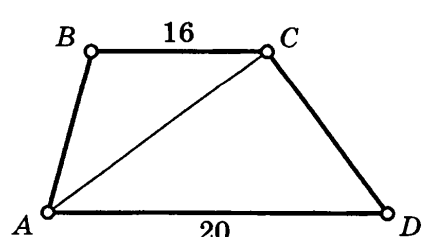
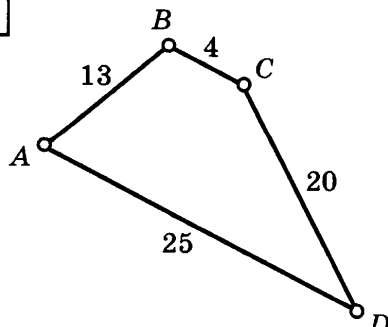
$$S_{\triangle AMN} = 9$$

ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ

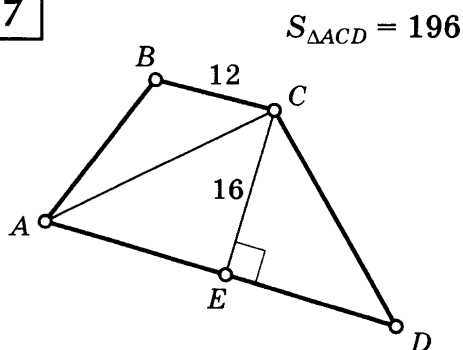
Таблица 11

Найдите S_{ABCD} .

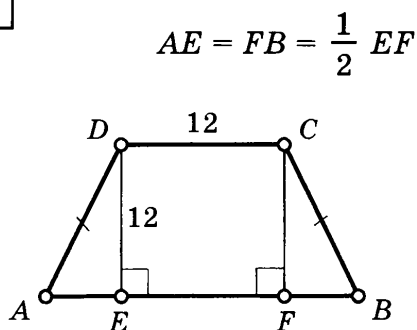
1 $AB = 10$ 	5 
2 	6 $AB = 25$ 
3 	7 
4 	8  $AD = 15$

9 	13 
10 $P = 64$ 	14 
11 $P = 80$ 	15 $BC = \frac{1}{2} ED$ $AD - BC = 4$ 
12 $S_{\triangle ACD} = 60$ 	16 

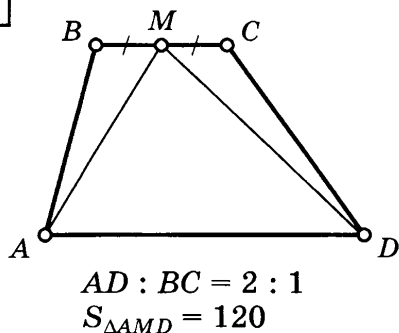
17



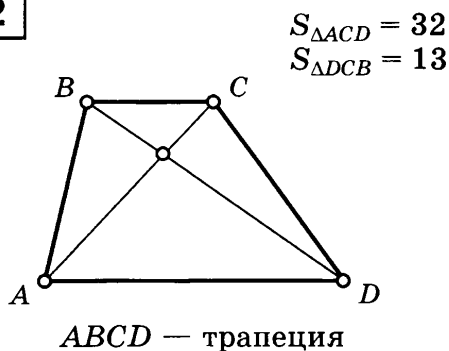
21



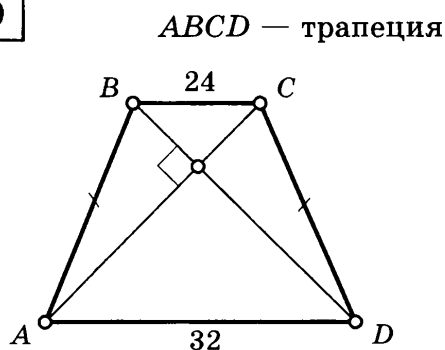
18



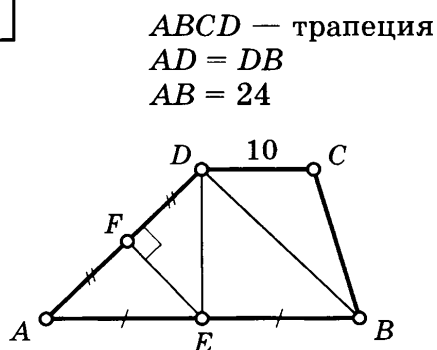
22



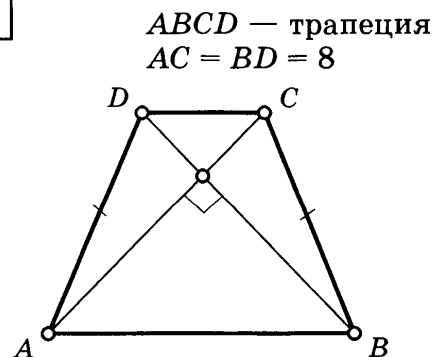
19



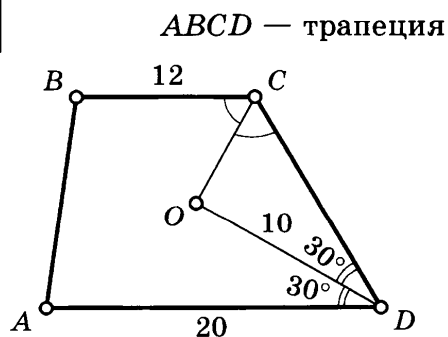
23



20



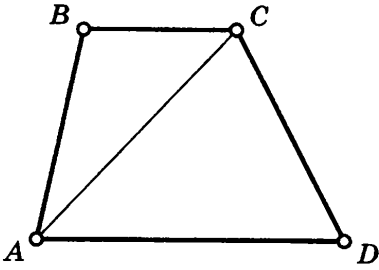
24



25

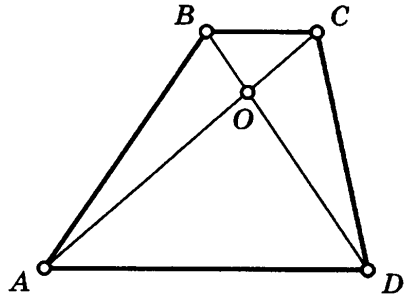
$$BC : AD = 3 : 4$$

$$S_{\triangle ABC} = 30$$



26

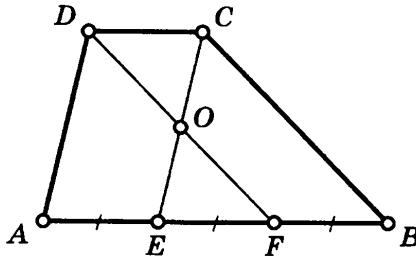
$$S_{\triangle BOC} = 4 \quad S_{\triangle AOD} = 25$$



27

$$AB : DC = 3 : 1$$

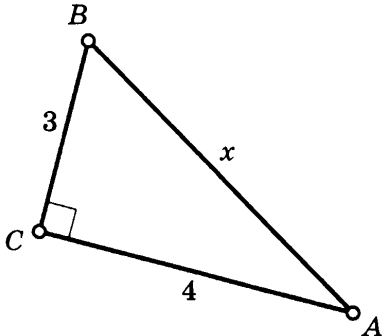
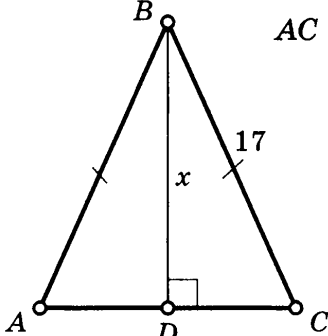
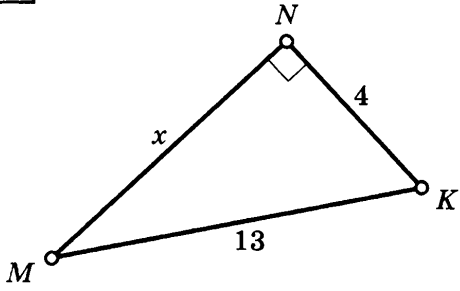
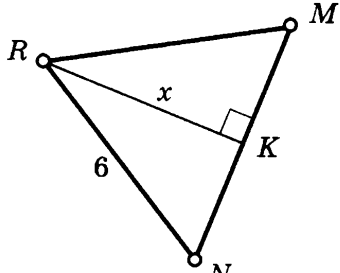
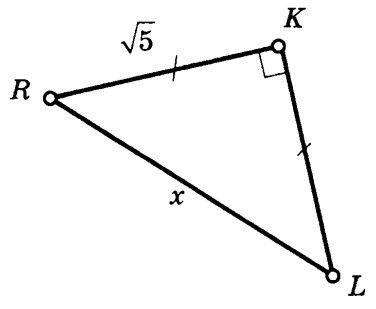
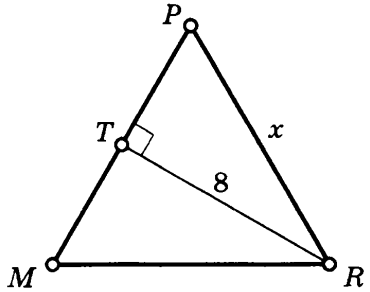
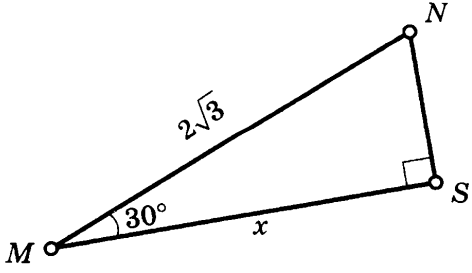
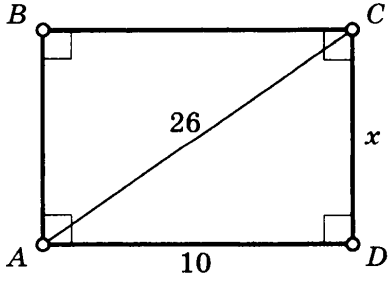
$$S_{\triangle DOC} = 8$$

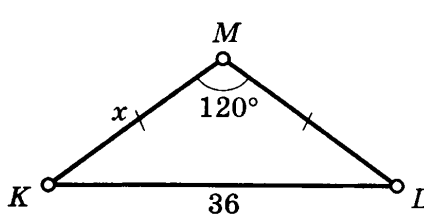
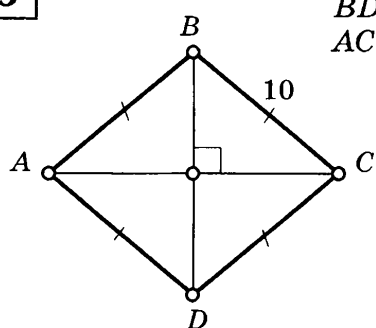
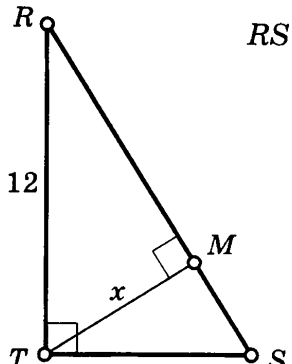
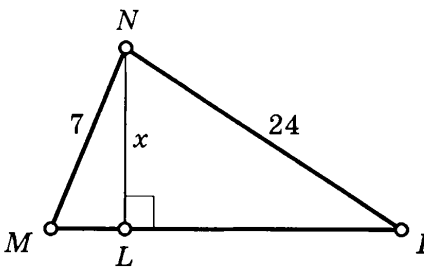
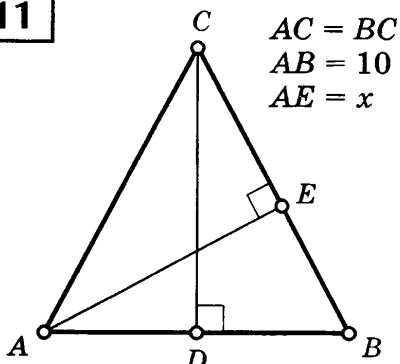
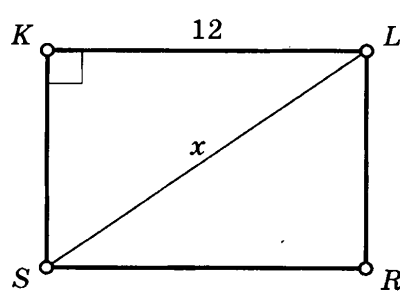
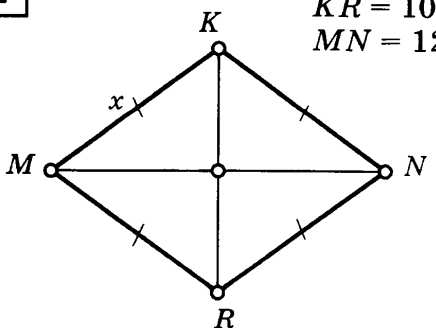
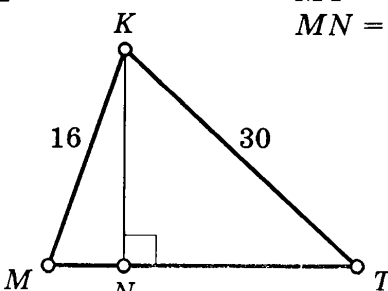


ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Таблица 12

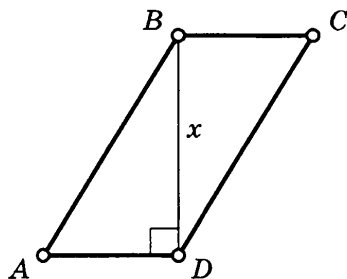
Найдите x .

1 	5 
2 	6 $\triangle RMN$ — правильный 
3 	7 $\triangle MPR$ — правильный 
4 	8 

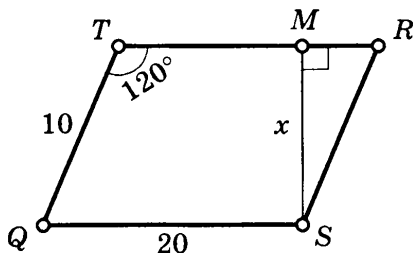
9 	13 $BD = 12$ $AC = x$ 
10 $RS = 13$ 	14 $MK = 25$ 
11 $AC = BC = 13$ $AB = 10$ $AE = x$ 	15 $SRLK$ — прямоугольник 
12 $KR = 10$ $MN = 12$ 	16 $MT = 34$ $MN = x$ 

17

$$AB - BC = 3 \quad P = 50$$

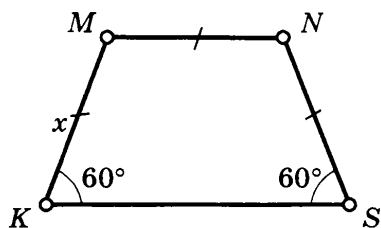


21



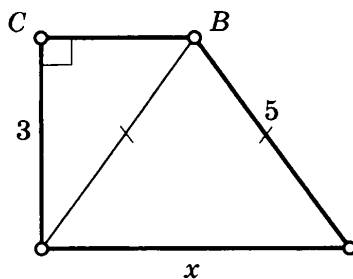
18

$$S_{KMNS} = 96\sqrt{3}$$



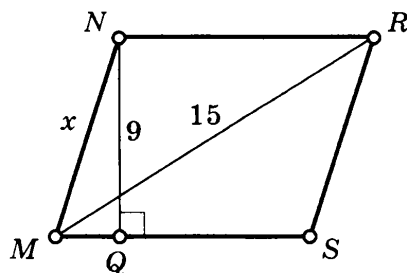
22

ABCD — трапеция



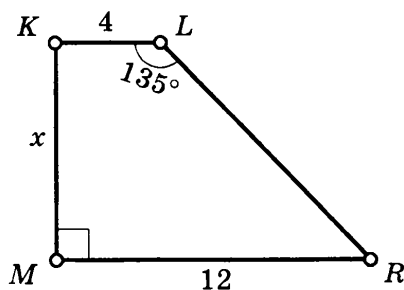
19

$$S_{MNRS} = 99$$



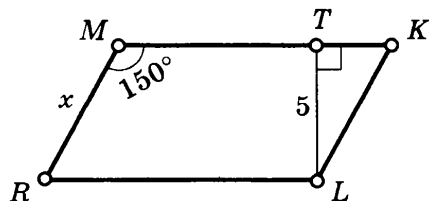
23

MKLR — трапеция

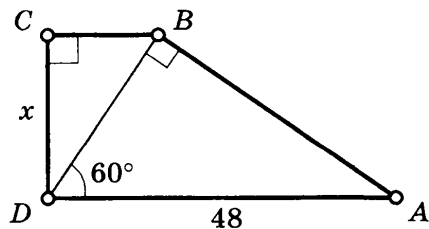


20

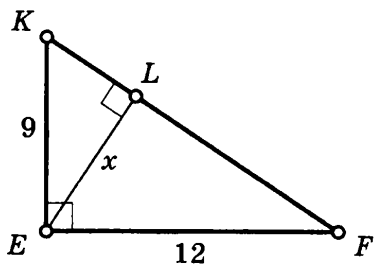
RLKM — параллелограмм



24

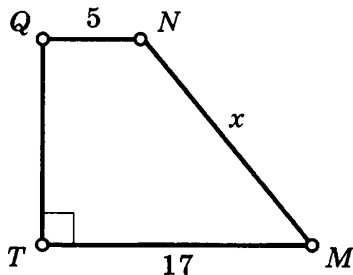


25

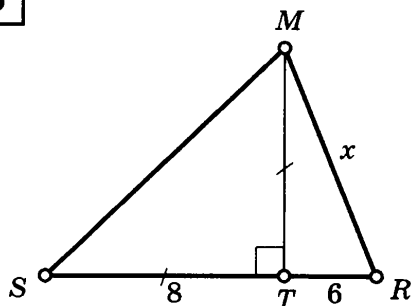


29

$S = 55$

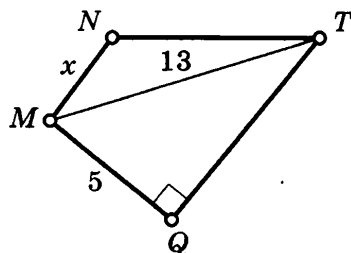


26

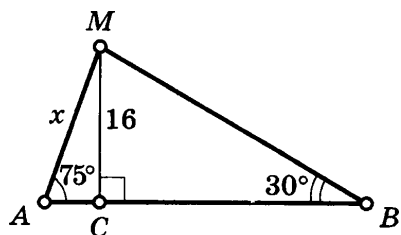


30

$MNTQ$ — трапеция
 $S_{MNTQ} = 50$

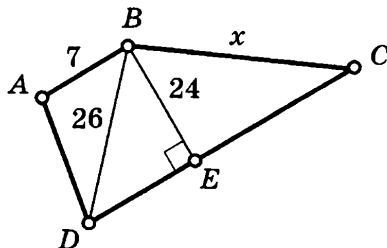


27

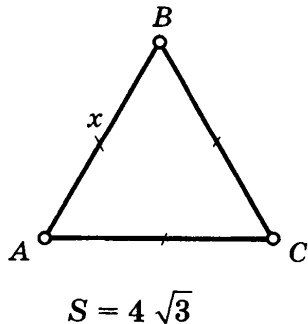


31

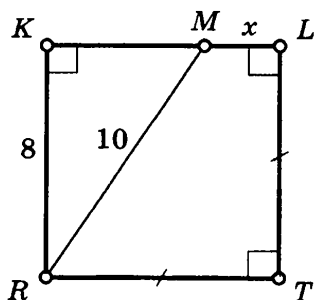
$ABCD$ — трапеция
 $S_{ABCD} = 432$



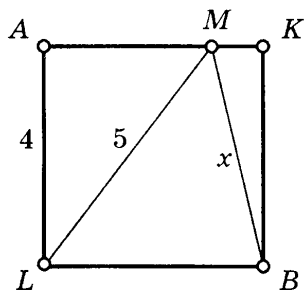
28



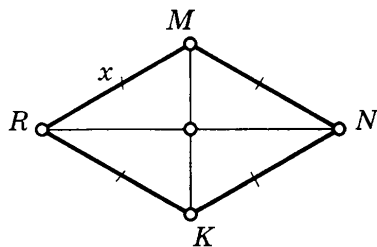
32



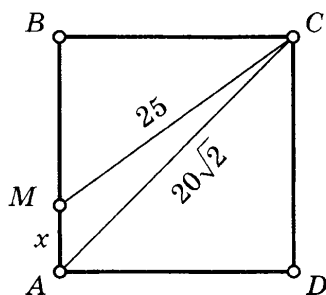
33

 $AKBL$ — квадрат

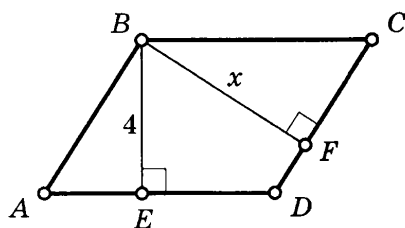
37

 $RN - MK = 4$
 $S_{RMNK} = 96$


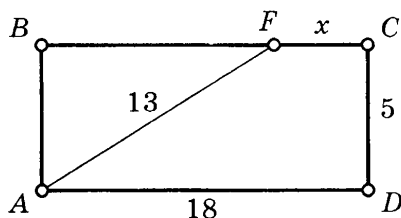
34

 $ABCD$ — квадрат

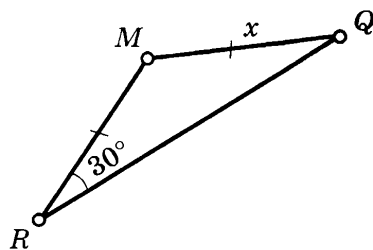
38

 $ABCD$ — параллелограмм
 $P_{ABCD} = 42$, $S_{ABCD} = \frac{140}{3}$


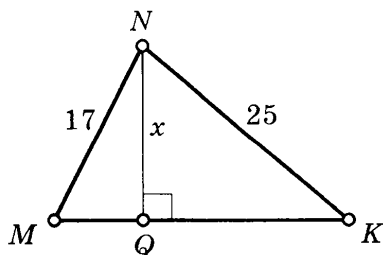
35

 $ABCD$ — прямоугольник

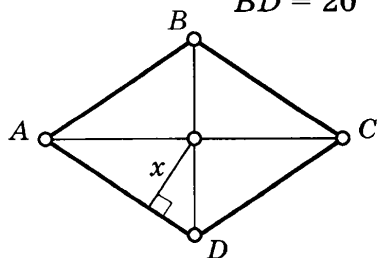
39

 $S = 100\sqrt{3}$

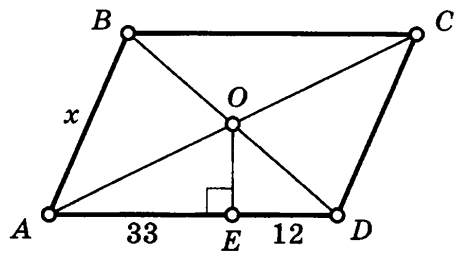
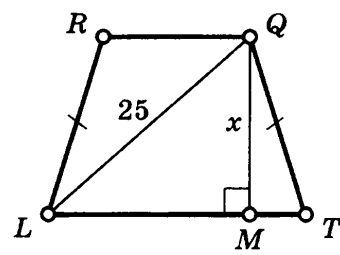
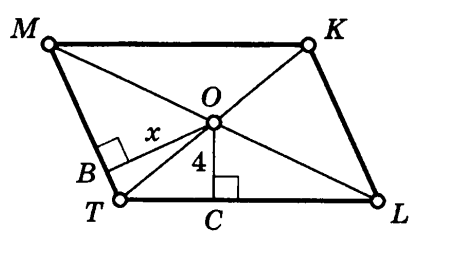
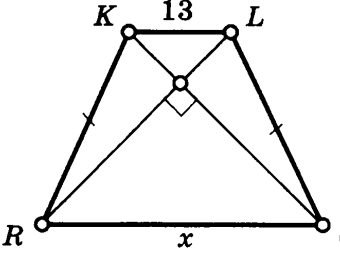
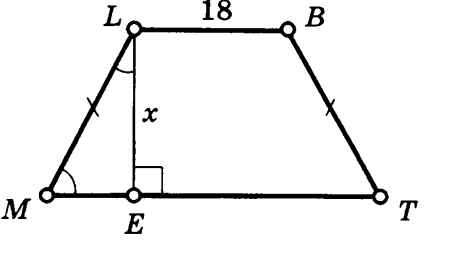
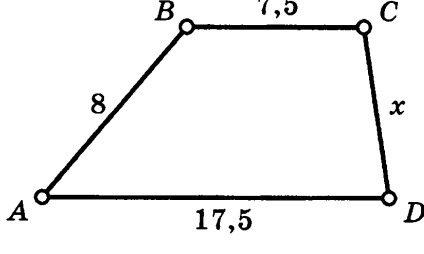
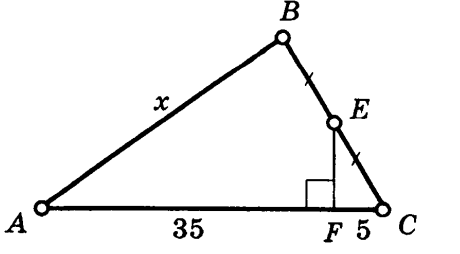
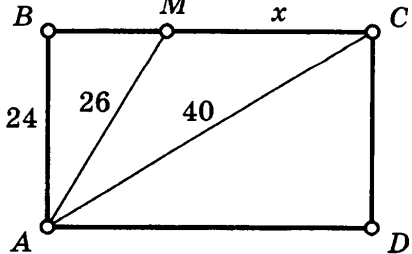
36

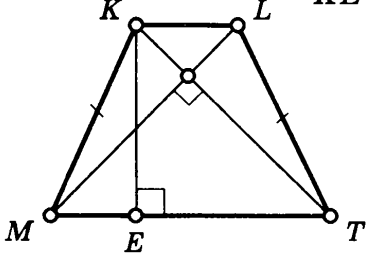
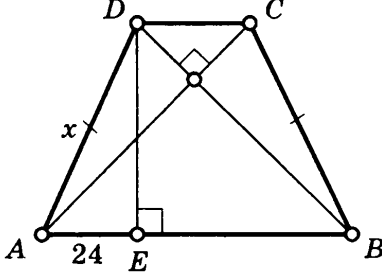
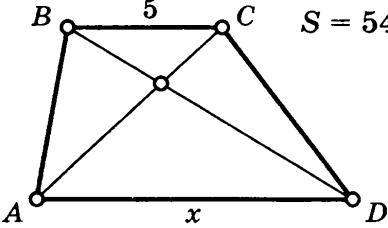
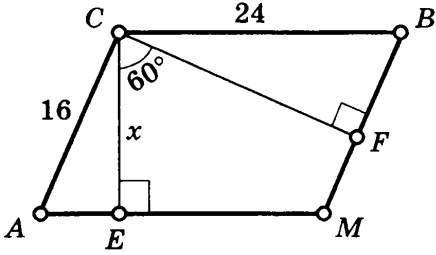
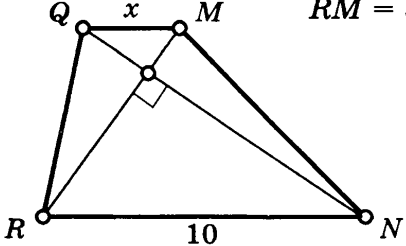
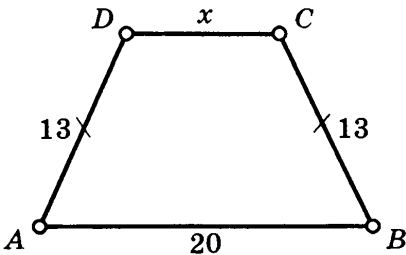
 $P_{\triangle MNK} = 70$ 

40

 $ABCD$ — ромб
 $S_{ABCD} = 480$
 $BD = 20$


Продолжение табл. 12

41 $ABCD$ — параллелограмм $S = 900$ 	45 $LRQT$ — трапеция $S_{LRQT} = 300$ 
42 $MKLT$ — параллелограмм $S_{MKLT} = 48$, $P_{MKLT} = 40$ 	46 $RKQL$ — трапеция $S = 100$ 
43 $MLBT$ — трапеция $S = 243$ 	47 $S_{ABCD} = 60$, $AD \parallel BC$ 
44 $S_{\triangle ABC} = 320$ 	48 $ABCD$ — прямоугольник 

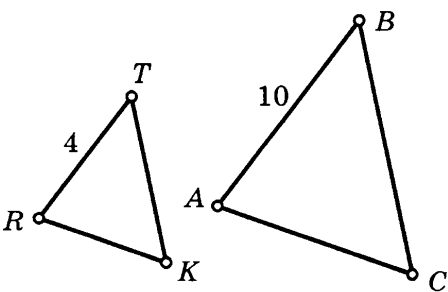
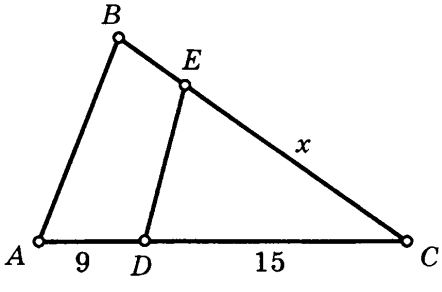
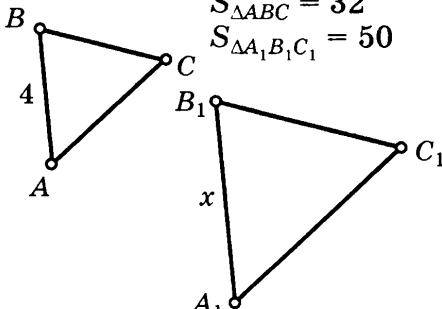
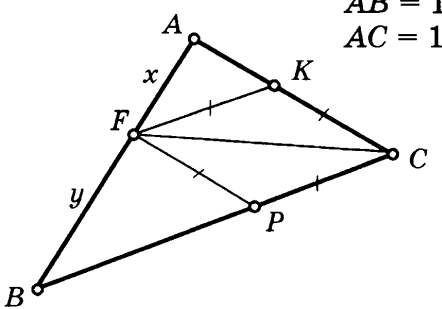
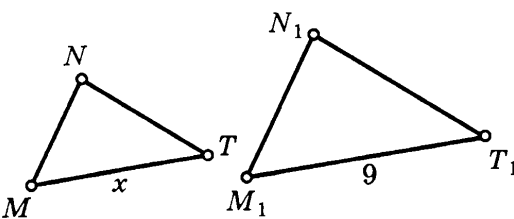
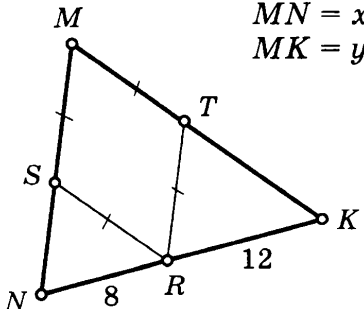
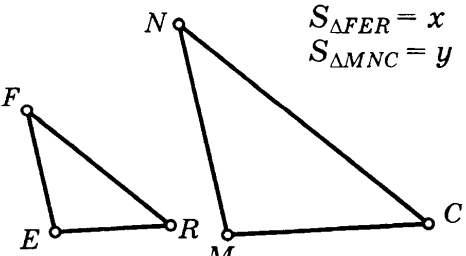
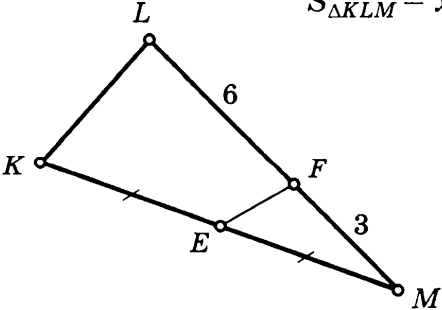
49 $MKLT$ — трапеция $S = 81$ $KE = x$ 	52 $ABCD$ — трапеция $S = 100$ 
50 $ABCD$ — трапеция $AC = 9$ $BD = 12$ $S = 54$ 	53 $ACBM$ — параллелограмм 
51 $RQMN$ — трапеция $QN = 12$ $RM = 5$ 	54 $S_{ABCD} = 180$ 

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Таблица 13

Найдите x , y , z .

1 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$	5 $\triangle QMR \sim \triangle Q_1M_1R_1$ $P_{\triangle Q_1M_1R_1} = 110$
2 $\triangle MNK \sim \triangle M_1N_1K_1$ $N_1K_1 : NK = 2 : 1$	6 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ $AB : BC : AC = 6 : 4 : 3$ $P_{\triangle A_1B_1C_1} = 91$
3 $\triangle KLM \sim \triangle K_1L_1M_1$ $KL : LM : KM = 6 : 7 : 5$	7 $\triangle MKN \sim \triangle M_1K_1N_1$ $MK : KN : MN = 9 : 7 : 8$ $x + y = 48$
4 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ $P_{\triangle ABC} = 36$	8 $\triangle MKN \sim \triangle M_1K_1N_1$ $MK : KN : MN = 9 : 7 : 8$ $x - y = 6$

9 $\triangle RTK \sim \triangle ABC$ $S_{\triangle RTK} = 16, S_{\triangle ABC} = x$ 	13 $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ $BC = 21$ 
10 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ $S_{\triangle ABC} = 32$ $S_{\triangle A_1B_1C_1} = 50$ 	14 $BC = 14$ $AB = 12$ $AC = 10$ 
11 $\triangle MNT \sim \triangle M_1N_1T_1$ $S_{\triangle MNT} = 75$ $S_{\triangle M_1N_1T_1} = 225$ 	15 $P_{\triangle MNK} = 55$ $MN = x$ $MK = y$ 
12 $\triangle FER \sim \triangle NMC$ $MN : FE = 7 : 6$ $S_{\triangle MNC} - S_{\triangle FER} = 26$ $S_{\triangle FER} = x$ $S_{\triangle MNC} = y$ 	16 $S_{\triangle MEF} = 8$ $S_{\triangle KLM} = x$ 

17

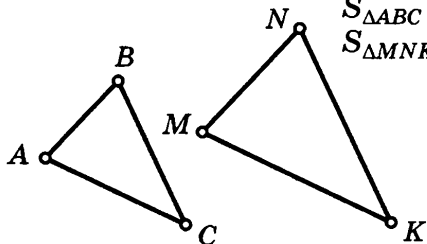
$$\triangle ABC \sim \triangle MNK$$

$$P_{\triangle ABC} : P_{\triangle MNK} = 2 : 3$$

$$S_{\triangle ABC} + S_{\triangle MNK} = 130$$

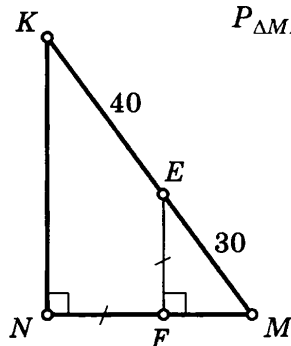
$$S_{\triangle ABC} = x$$

$$S_{\triangle MNK} = y$$



21

$$P_{\triangle MNK} = x$$



18

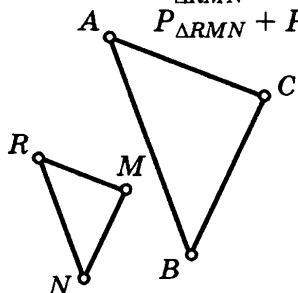
$$\triangle RMN \sim \triangle ACB$$

$$S_{\triangle RMN} = 18, S_{\triangle ACB} = 32$$

$$P_{\triangle RMN} + P_{\triangle ACB} = 91$$

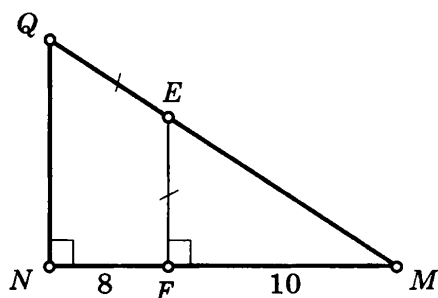
$$P_{\triangle RMN} = x$$

$$P_{\triangle ACB} = y$$



22

$$P_{\triangle MNQ} = x$$

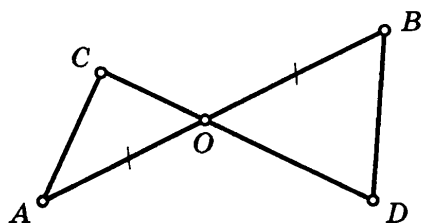


19

$$CO : OD = 5 : 6$$

$$S_{\triangle AOC} = 5$$

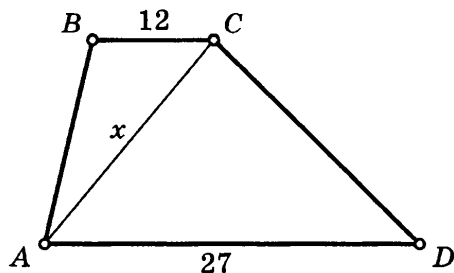
$$S_{\triangle BOD} = x$$



23

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD$$

$$BC \parallel AD$$

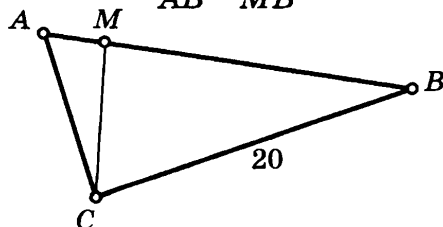


20

$$S_{\triangle AMC} : S_{\triangle MCB} = 1 : 3$$

$$AB = x$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AM}{MB}$$



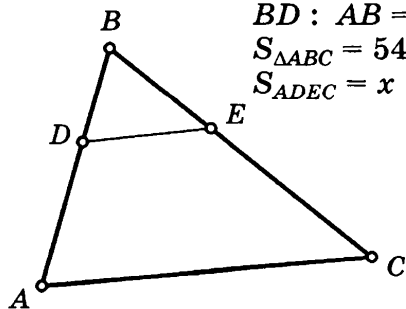
24

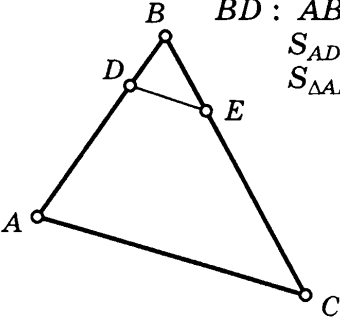
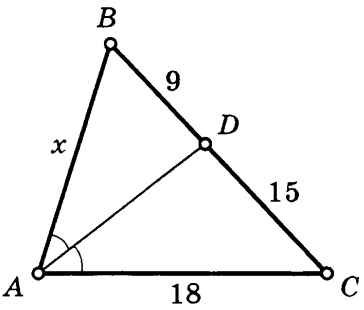
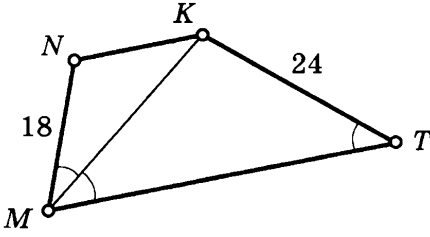
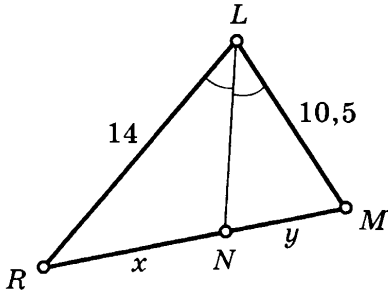
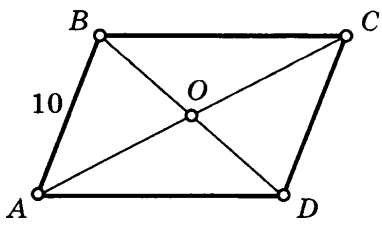
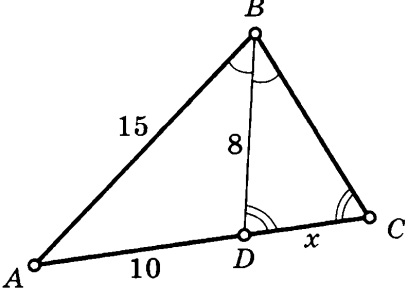
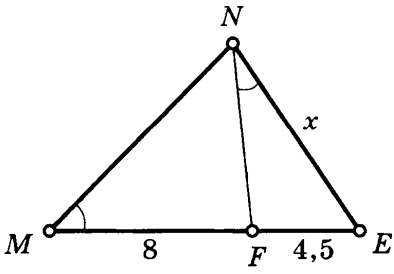
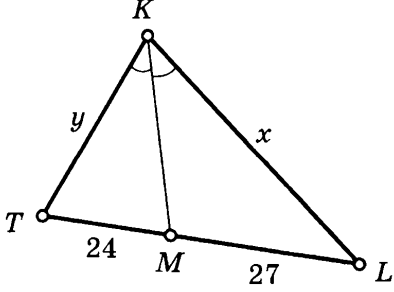
$$DE \parallel AC$$

$$BD : AB = 1 : 3$$

$$S_{\triangle ABC} = 54$$

$$S_{\triangle DEC} = x$$

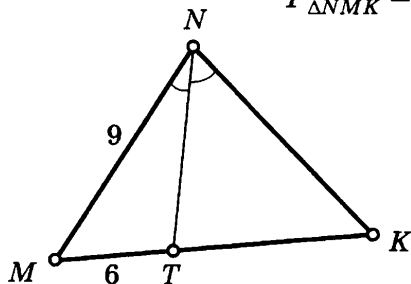


25 $DE \parallel AC$ $BD : AB = 1 : 4$ $S_{ADEEC} = 60$ $S_{\triangle ABC} = x$ 	29 
26 $\triangle MNK \sim \triangle MKT$ $NK \parallel MT$ $P_{MNKT} = x$ 	30 $RM = 20$ 
27 $ABCD$ — параллелограмм $\frac{BC}{AB} = \frac{AC}{OC}$, $P_{ABCD} = x$ 	31 $DC = x$ 
28 $\triangle NFE \sim \triangle MNE$ 	32 $P_{\triangle TKL} = 153$ 

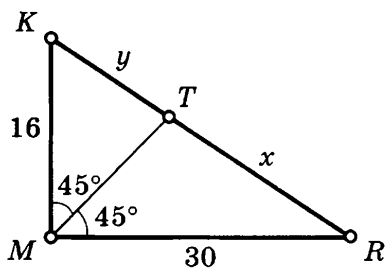
33

$$NK = MK$$

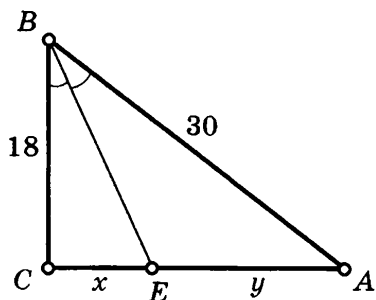
$$P_{\triangle NMK} = x$$



35



34



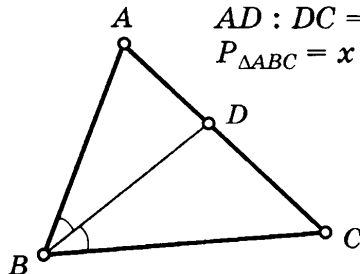
36

$$AC = BC$$

$$AC - AB = 4,8$$

$$AD : DC = 3 : 5$$

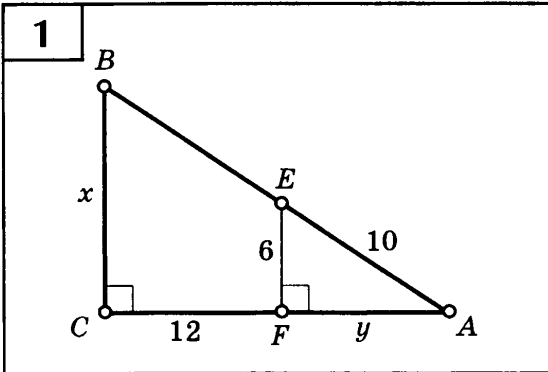
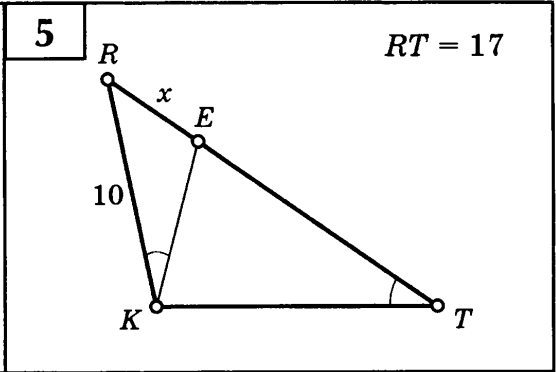
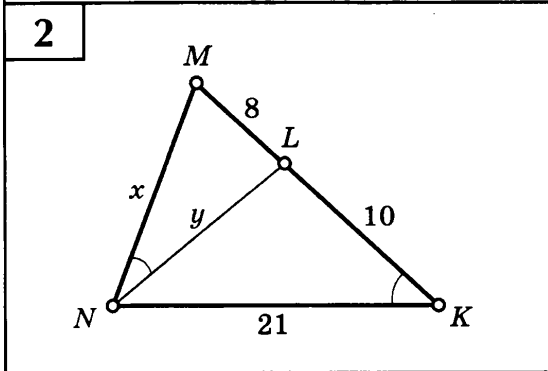
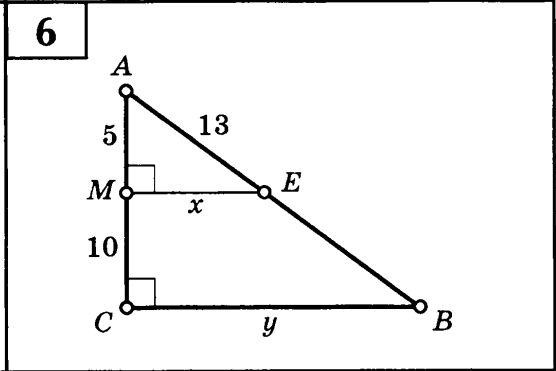
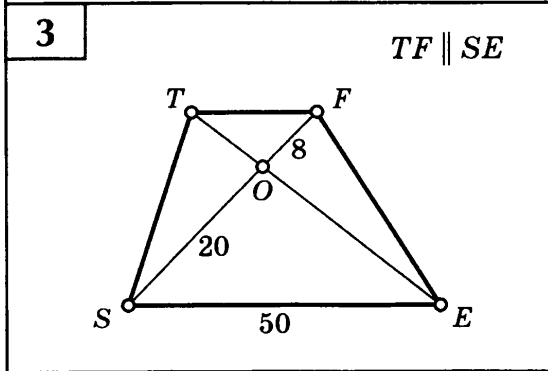
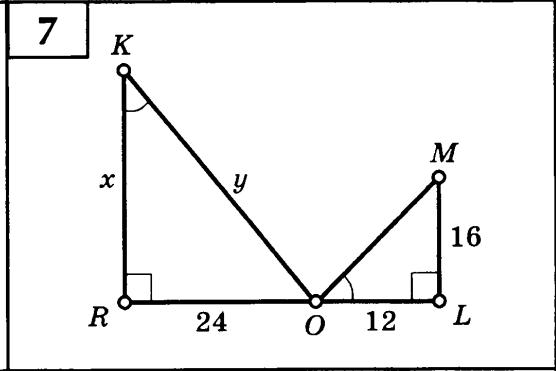
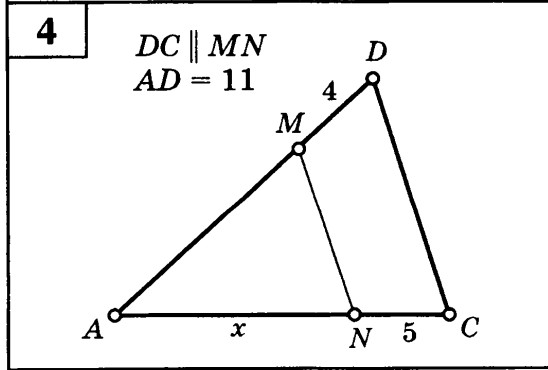
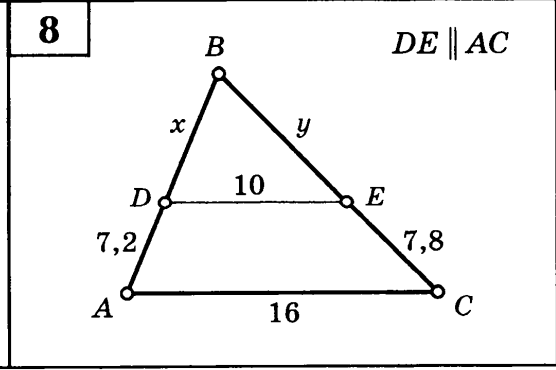
$$P_{\triangle ABC} = x$$

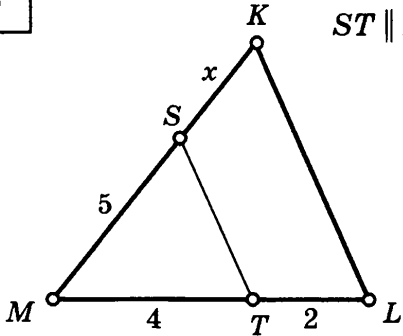
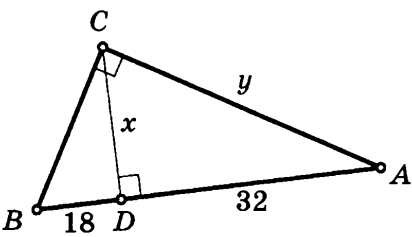
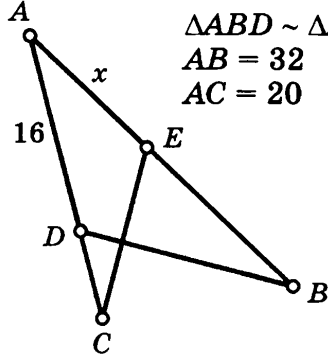
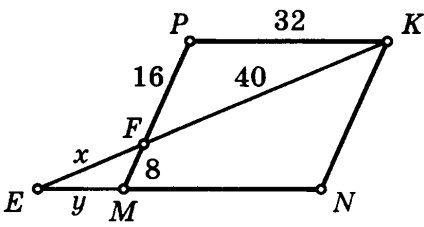
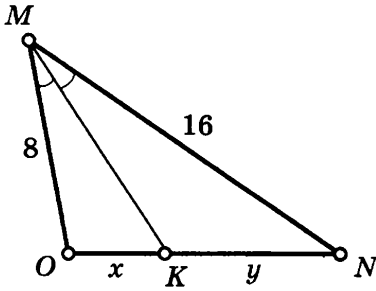
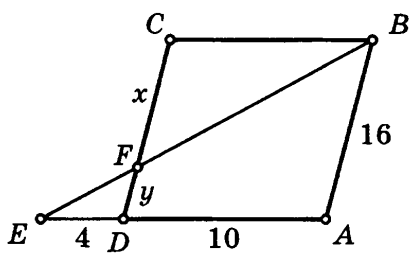
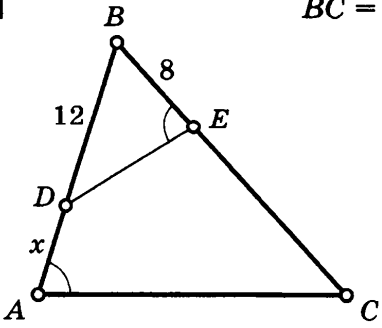
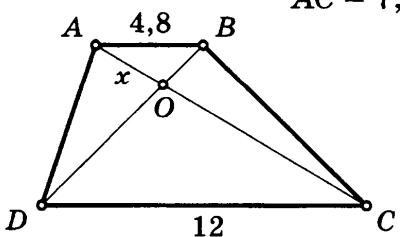


ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

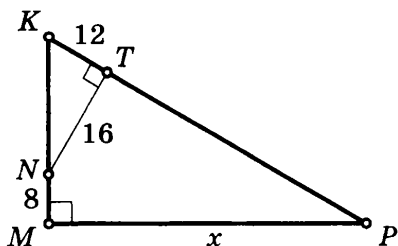
Таблица 14

Найдите x , y .

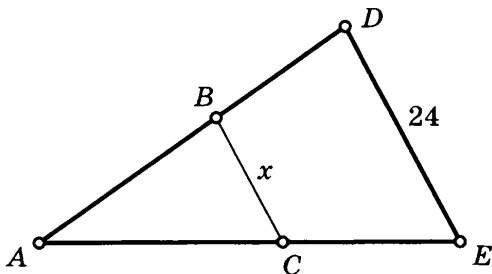
1 	5 
2 	6 
3 	7 
4 	8 

9  $ST \parallel KL$	13 
10  $\triangle ABD \sim \triangle AEC$ $AB = 32$ $AC = 20$	14  $PK \parallel MN$
11  $ON = 12$	15  $CB \parallel DA$
12  $BC = 24$	16  $AB \parallel DC$ $AC = 7,5$

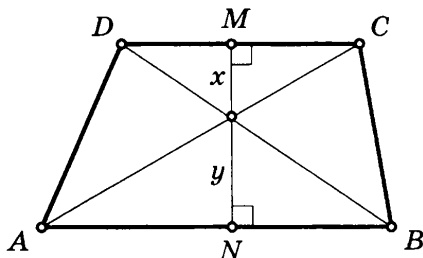
17



21

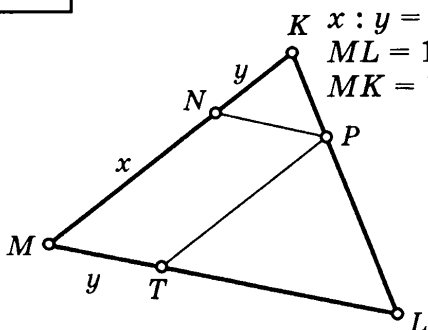
 $BC \parallel DE$
 $AB : BD = 2 : 1$


18

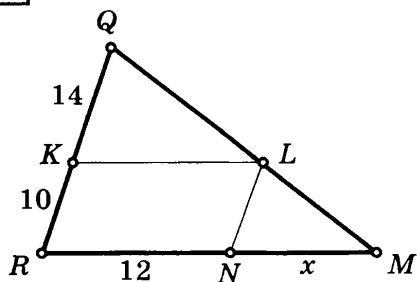
 $AB \parallel DC, AB = 18$
 $DC = 12, x + y = 20$


22

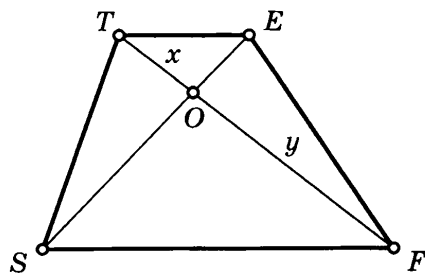
 $MNPT$ — параллелограмм

 $x : y = 3 : 1$
 $ML = 12$
 $MK = 18$


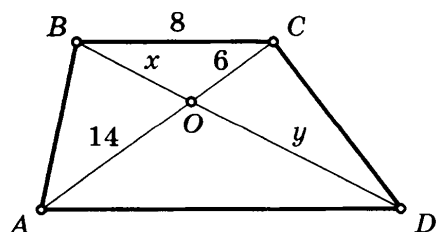
19

 $RKLN$ — параллелограмм


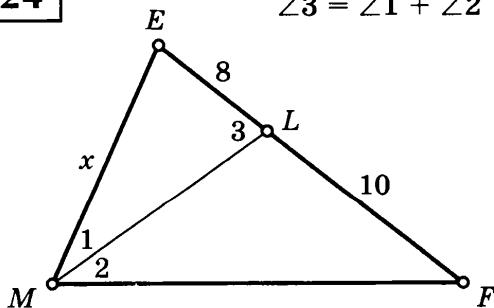
23

 $P_{\triangle TOE} : P_{\triangle SOF} = 2 : 3$
 $x + y = 10, TE \parallel SF$


20

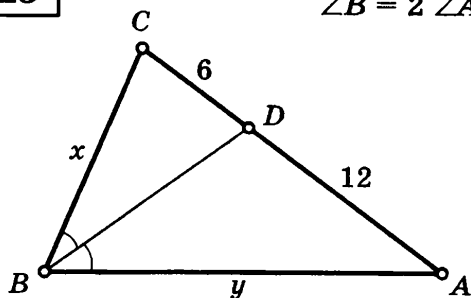
 $ABCD$ — трапеция
 $BD = 32$


24

 $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$


25

$$\angle B = 2 \angle A$$

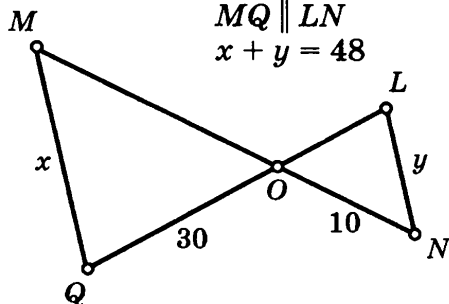


27

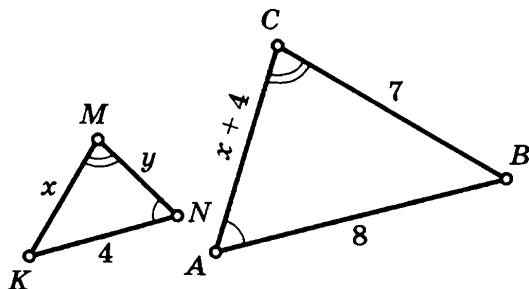
$$MO : OL = 3 : 1$$

$$MQ \parallel LN$$

$$x + y = 48$$



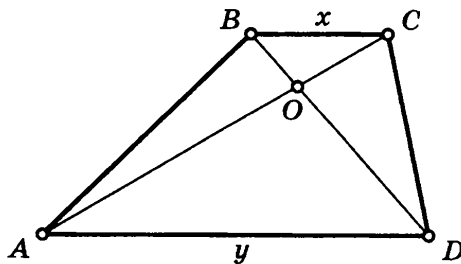
26



28

$$S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOD} = 1 : 9$$

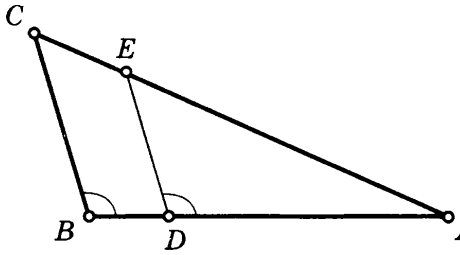
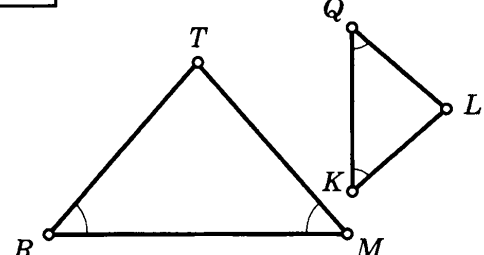
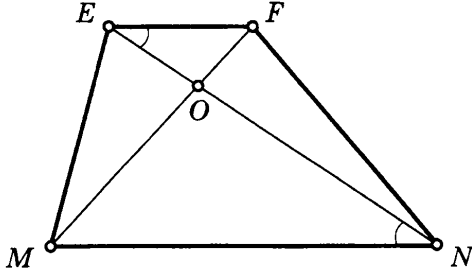
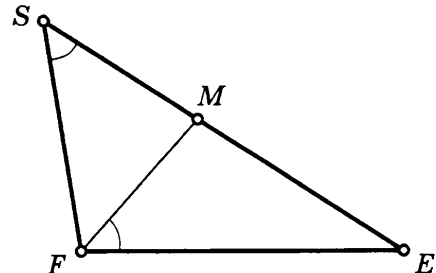
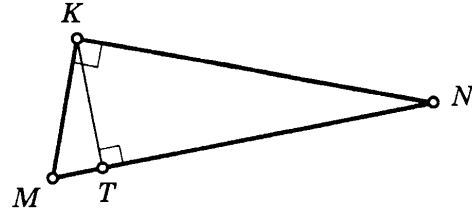
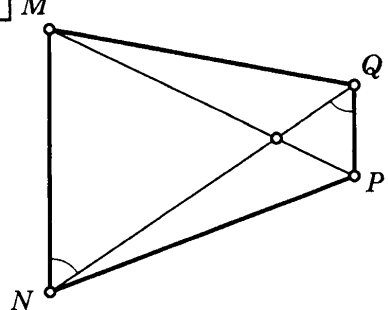
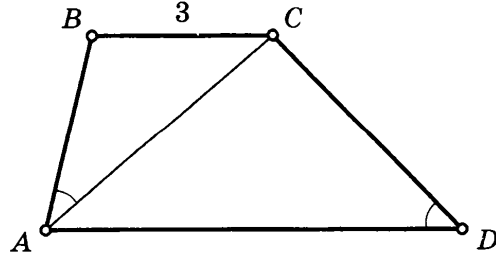
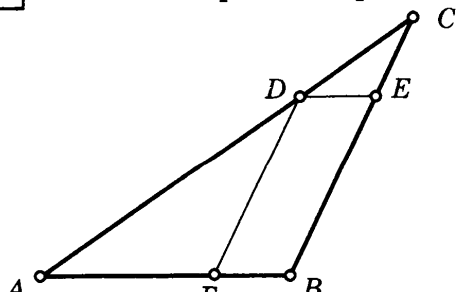
$$BC \parallel AD, x + y = 9,6$$



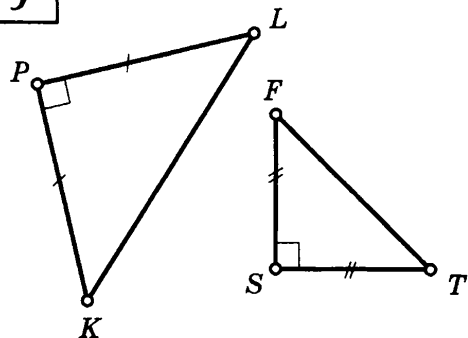
ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Таблица 15

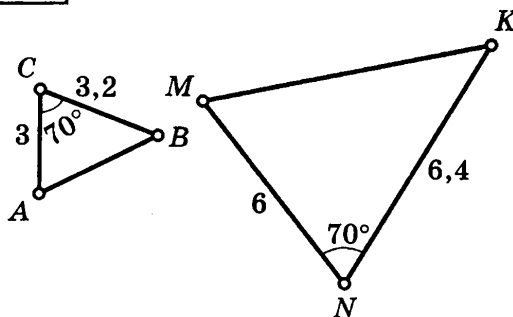
Укажите пары подобных треугольников и докажите их подобие.

1 	5 
2 	6 
3 	7 
4 $ABCD$ — трапеция 	8 $FDEB$ — параллелограмм 

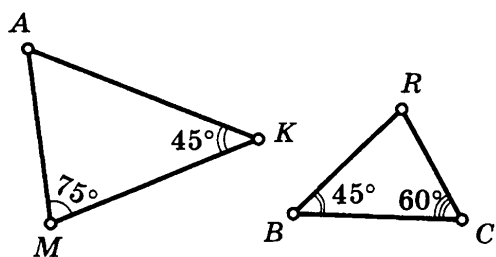
9



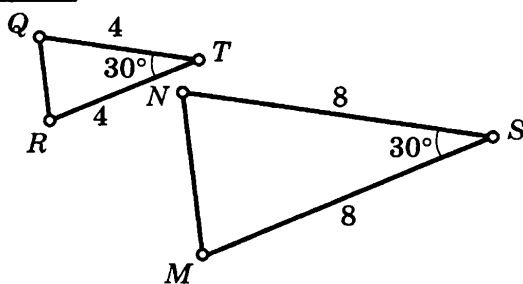
13



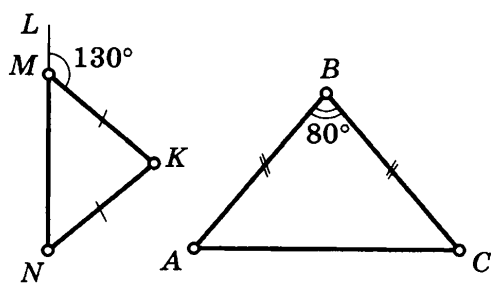
10



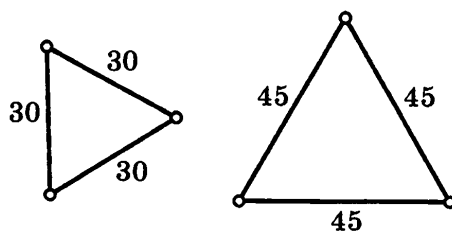
14



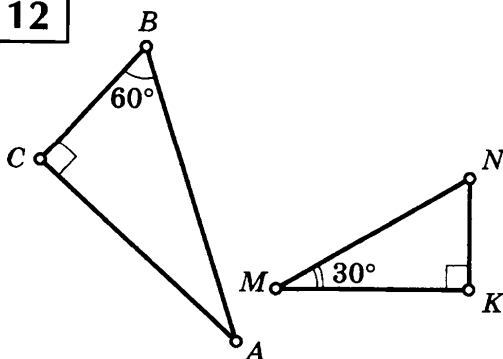
11



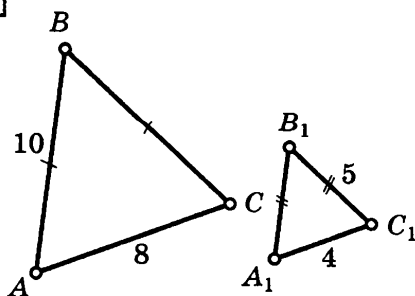
15



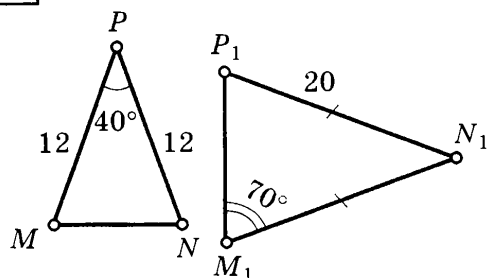
12



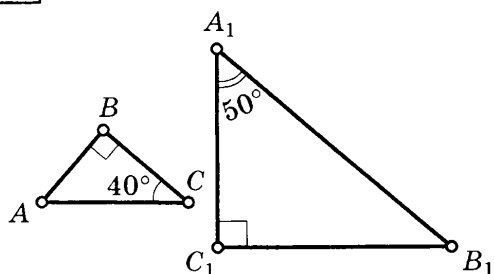
16



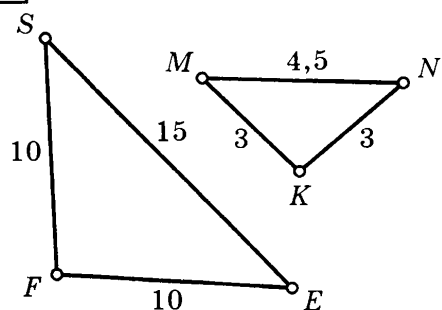
17



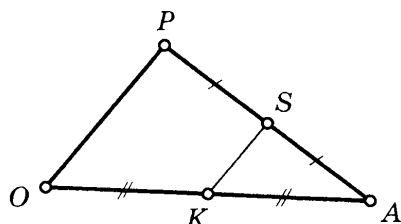
21



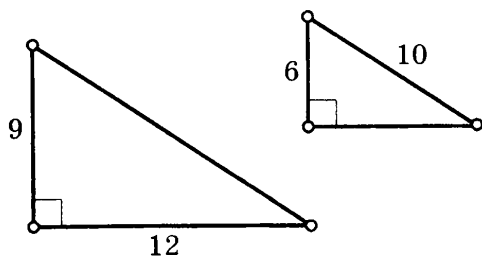
18



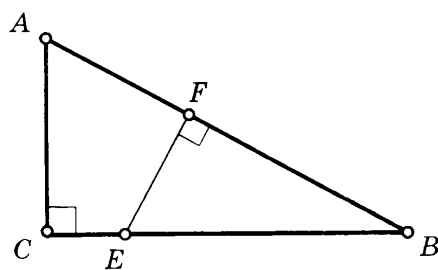
22



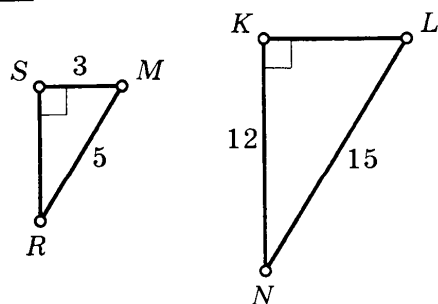
19



23

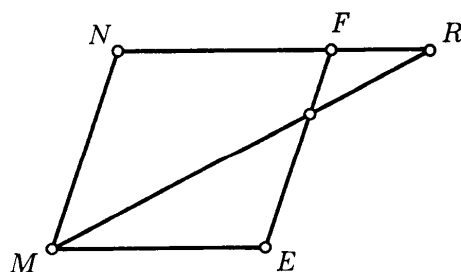


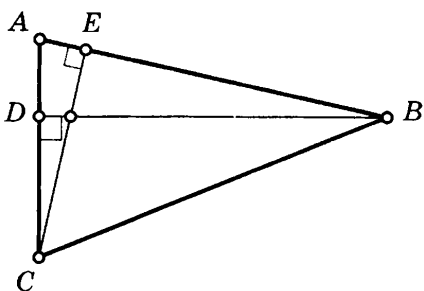
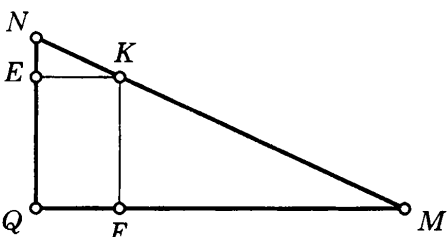
20



24

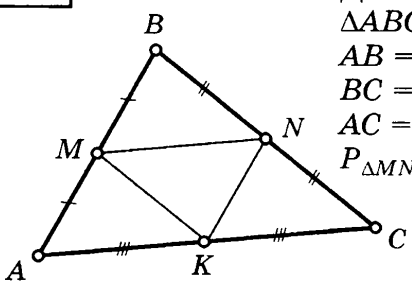
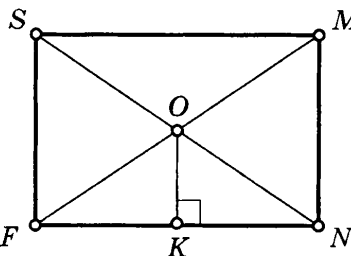
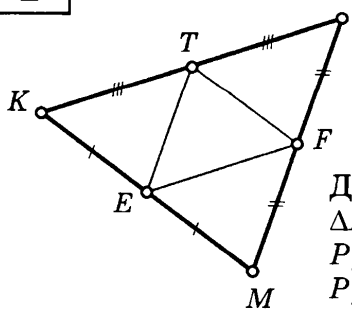
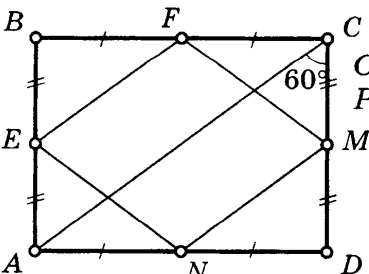
$MNFE$ — параллелограмм



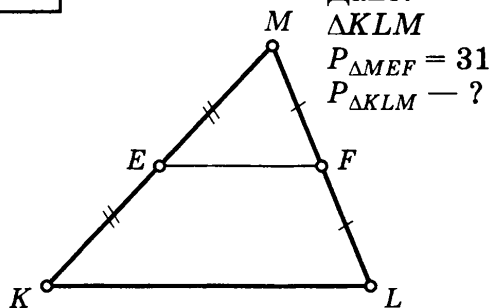
25 	26 $EKFQ$ — прямоугольник 
---	---

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

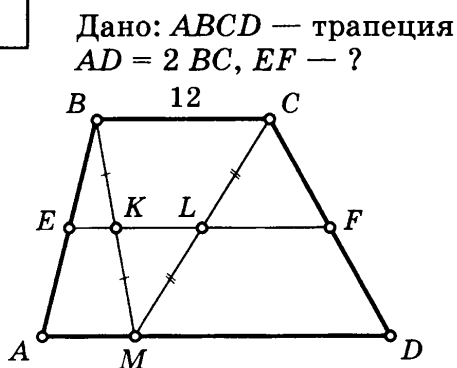
Таблица 16

1  Дано: $\triangle ABC$ $AB = 16$ $BC = 18$ $AC = 20$ $P_{\triangle MNK} = ?$	3 Дано: $FSMN$ — прямоугольник  $OK = 24$, $SF = ?$
2  Дано: $\triangle KLM$ $P_{\triangle KLM} = 24$ $P_{\triangle ETF} = ?$	4 Дано: $ABCD$ — прямоугольник  $CD = 30$, $P_{EFMN} = ?$

5

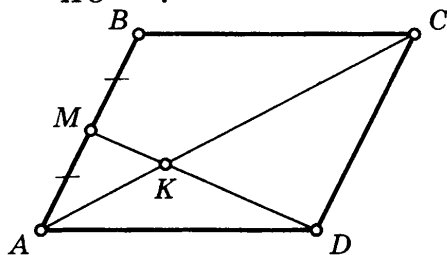


9



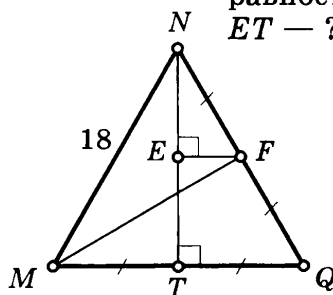
6

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AC = 18$, $AK = ?$,
 $KC = ?$



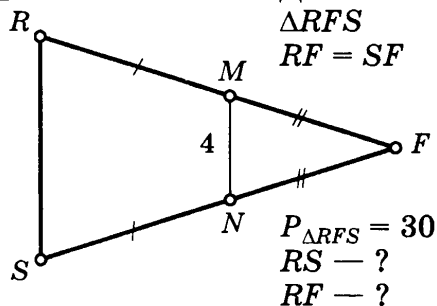
10

Дано: $\triangle MNQ$ —
 равносторонний
 $ET = ?$



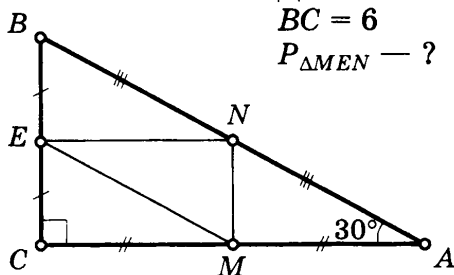
7

Дано: $\triangle RFS$
 $RF = SF$



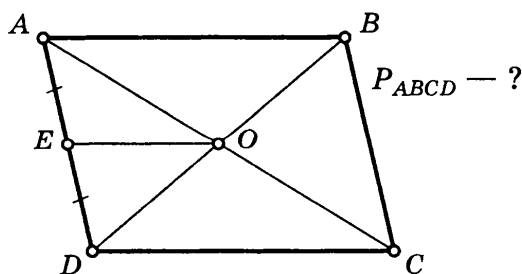
11

Дано: $\triangle ABC$
 $BC = 6$
 $P_{\triangle MEN} = ?$



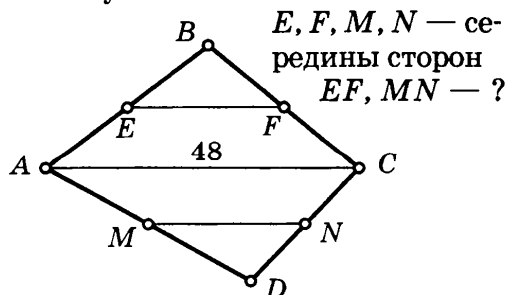
8

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $EO = 4$, $ED = 3$,

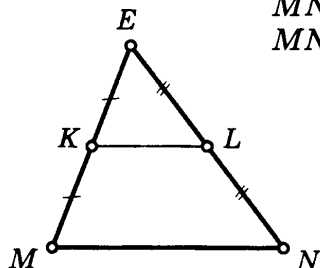


12

Дано: $ABCD$ — четырех-
 угольник

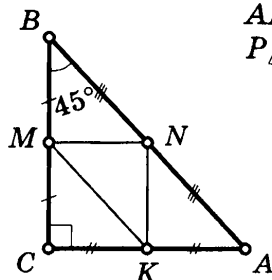


13



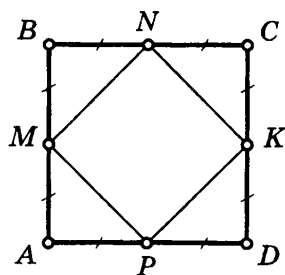
Дано: $\triangle MEN$
 $MN - KL = 6$
 $MN - ?$

15



Дано: $\triangle ABC$
 $AB = 16$
 $P_{\triangle MNK} - ?$

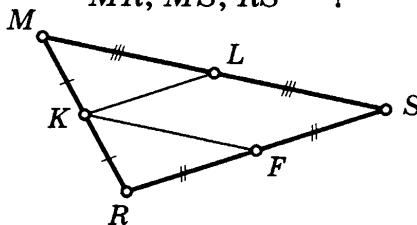
14



Дано: $ABCD$ — квадрат

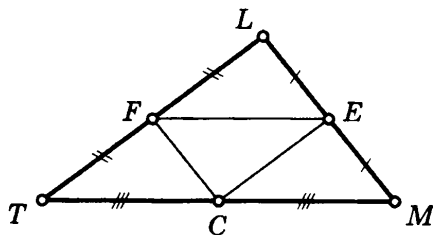
$\frac{S_{MNKP}}{S_{ABCD}} - ?$

16



Дано: $\triangle MRS$
 $MR : MS : RS = 3 : 6 : 4$
 $P_{\triangle KLF} = 10,4$
 $MR, MS, RS - ?$

17

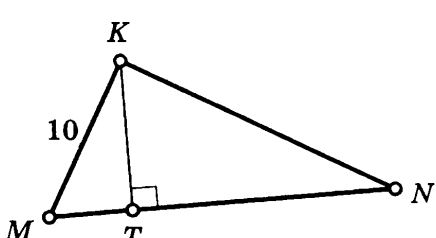
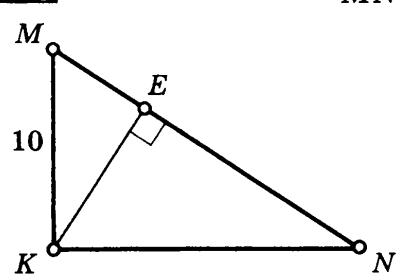
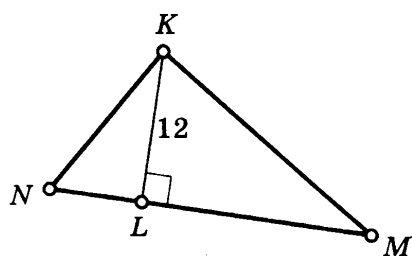
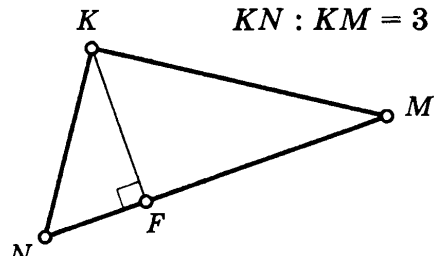
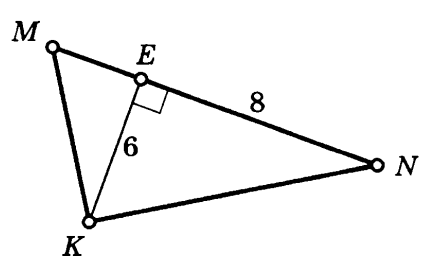
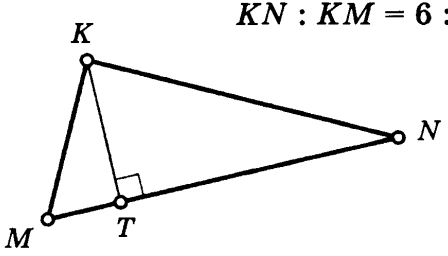
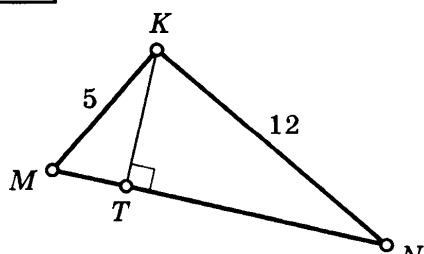
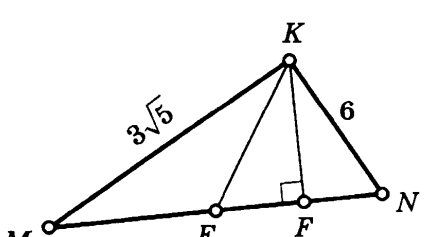


Дано: $\triangle TLM$
 $TL : LM : TM = 4 : 3 : 5$
 $P_{\triangle TLM} = 60, FE, EC, FC - ?$

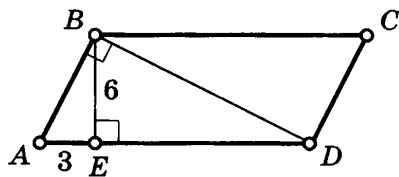
ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Таблица 17

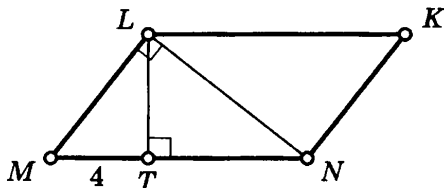
Найдите неизвестные линейные элементы $\triangle MNK$ ($\angle K = 90^\circ$).

1 $MN = 26$ 	5 $MN = 25$ 
2 $MN = 25$ 	6 $MN = 50$ $KN : KM = 3 : 4$ 
3 	7 $TN - MT = 11$ $KN : KM = 6 : 5$ 
4 	8 $ME = EN$ 

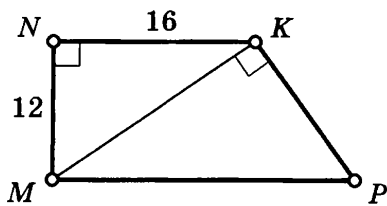
- 9** $ABCD$ — параллелограмм
 S_{ABCD} — ?



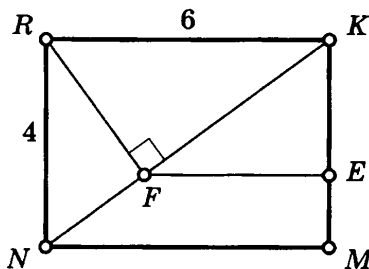
- 12** $MLKN$ — параллелограмм
 $MN : ML = 2 : 1$
 S_{MNKL} — ?



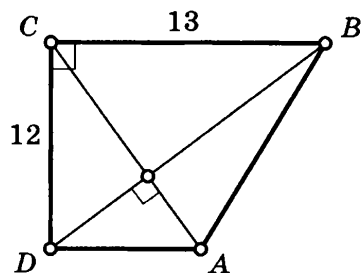
- 10** $MNKP$ — трапеция
 S_{MNKP} — ?



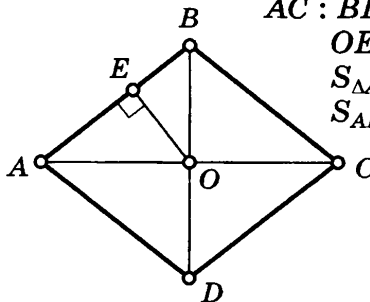
- 13** $RKMN$ — прямоугольник
 $FE \parallel NM$, FE — ?



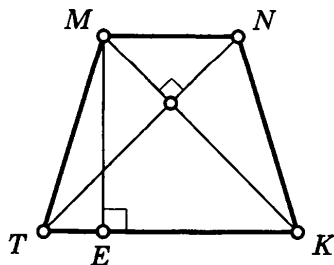
- 11** $ABCD$ — трапеция
 AD — ?



- 14** $ABCD$ — ромб
 $AC : BD = 3 : 2$
 $OE \perp AB$
 $S_{\triangle AOE} = 27$
 S_{ABCD} — ?



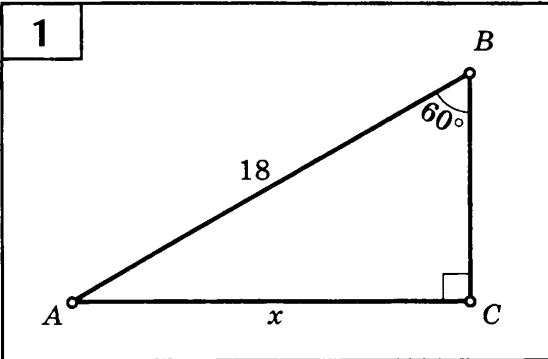
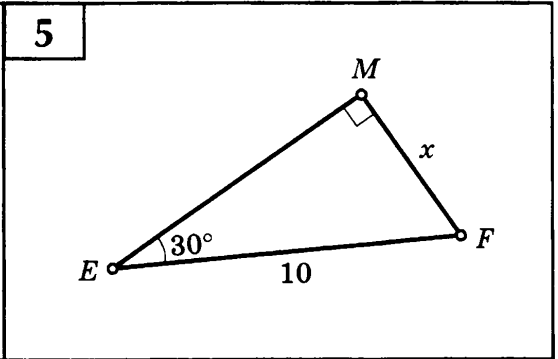
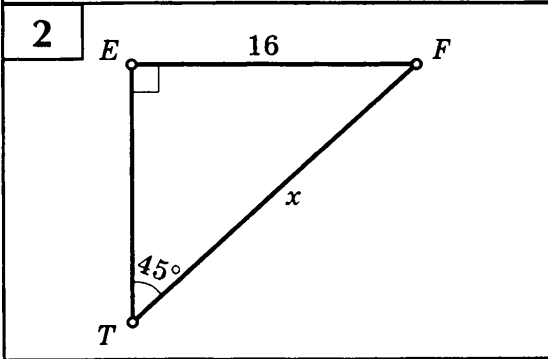
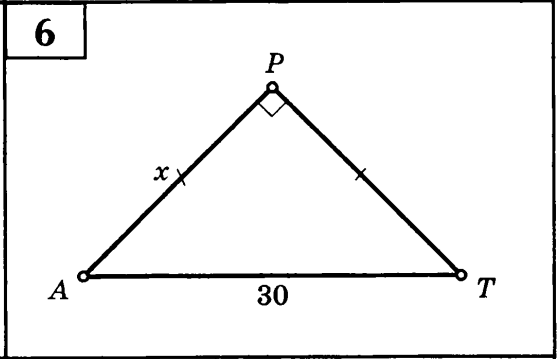
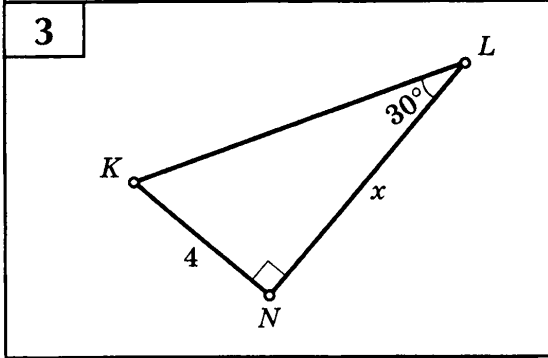
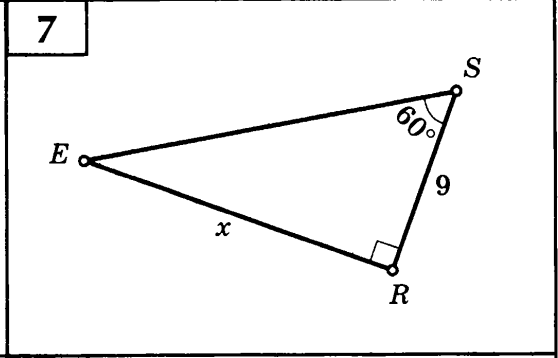
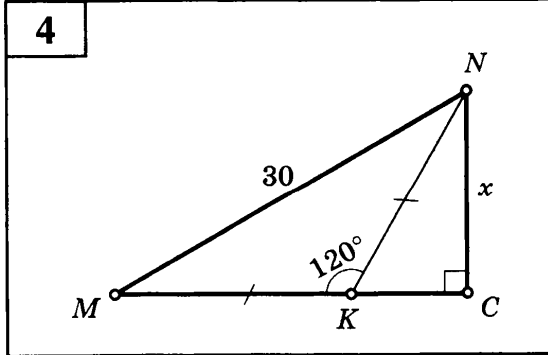
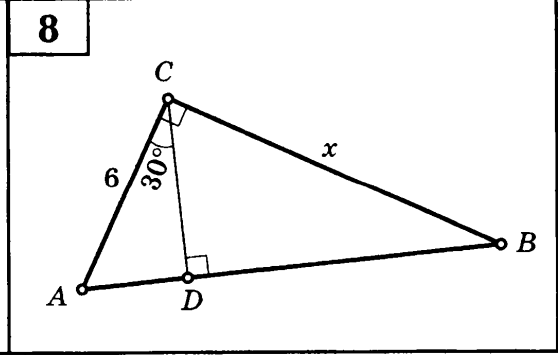
- 15** $TMNK$ — трапеция
 $MK = 15$
 $ME = 9$
 S_{TMNK} — ?

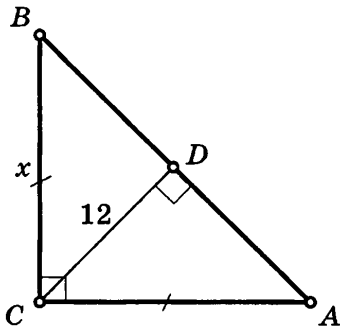
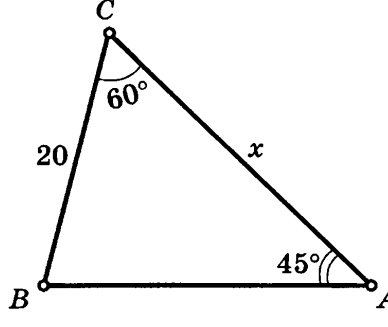
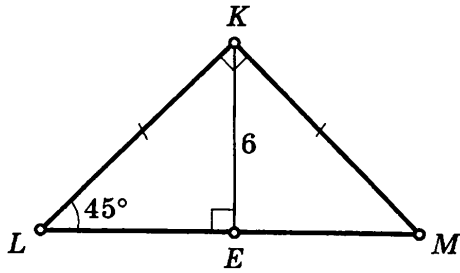
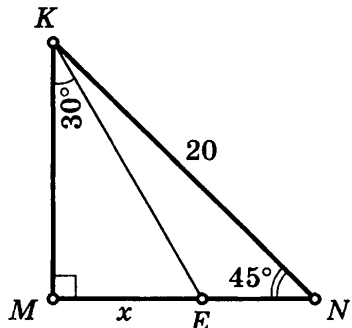
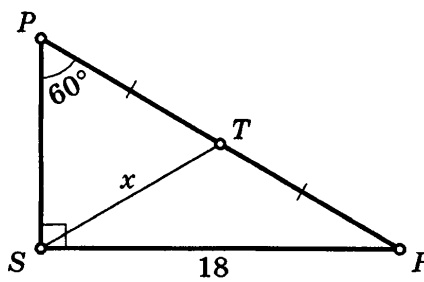
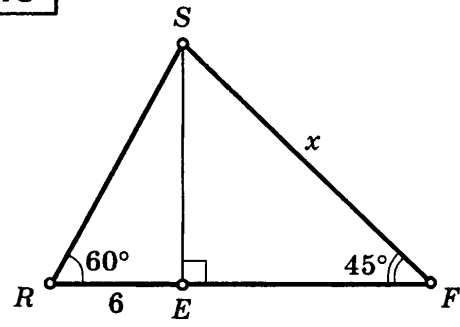
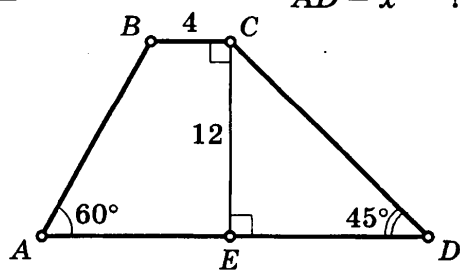
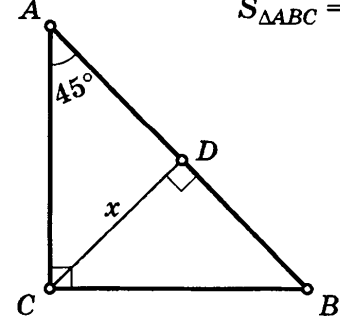


СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ
В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Таблица 18

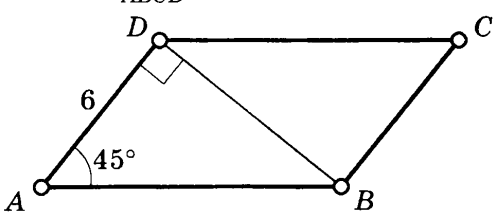
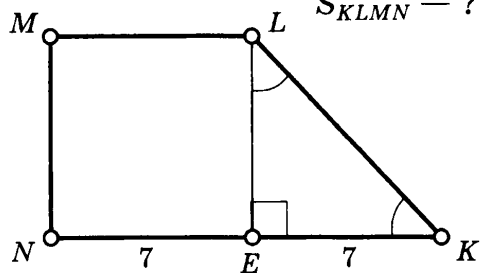
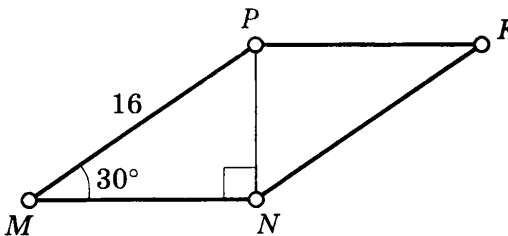
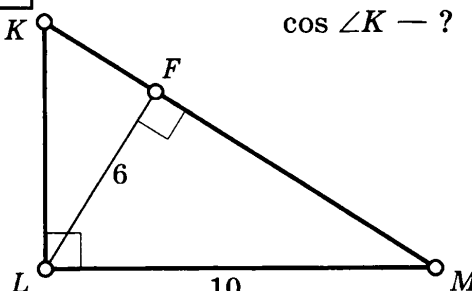
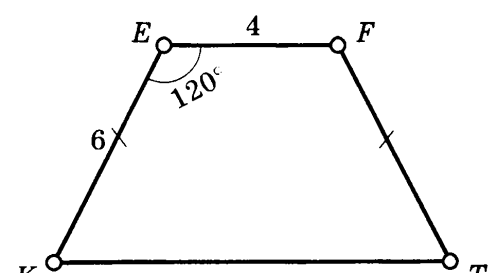
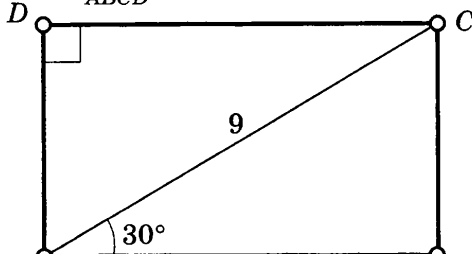
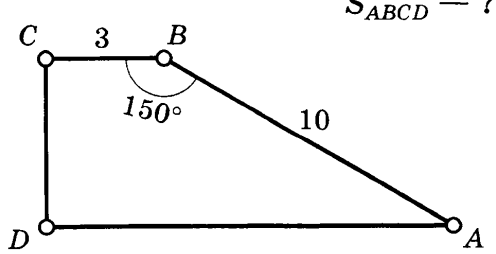
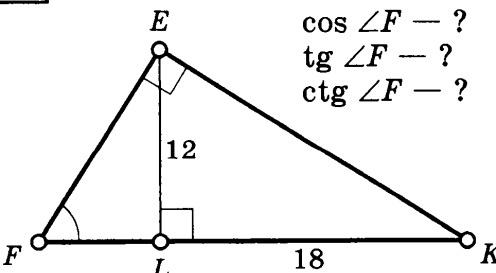
Найдите x .

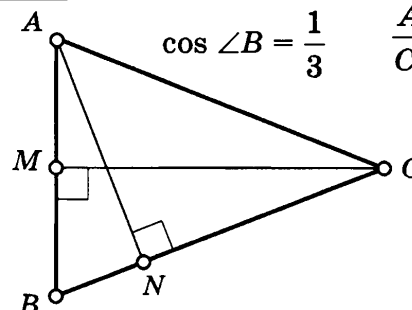
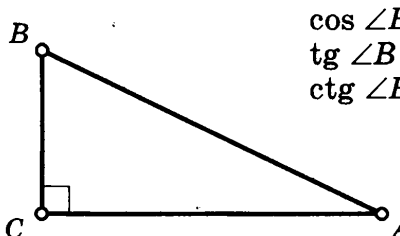
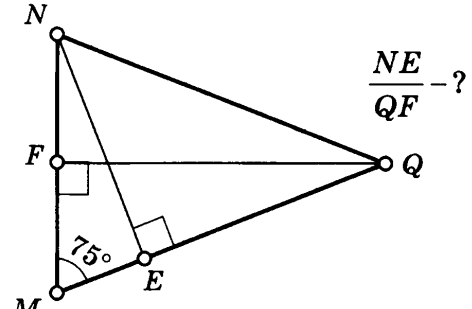
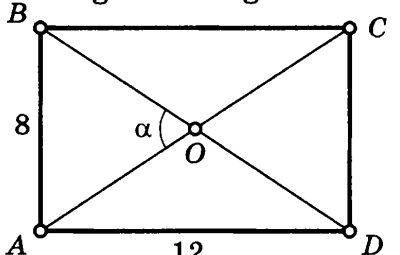
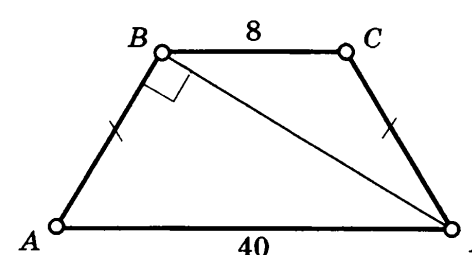
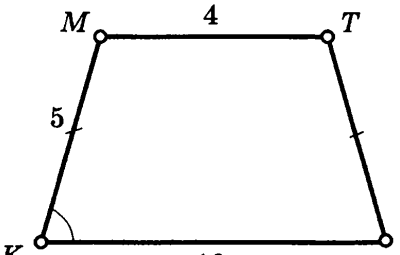
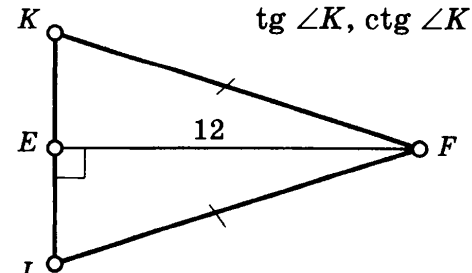
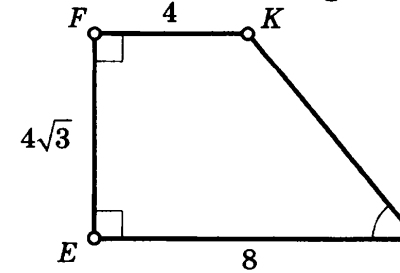
1 	5 
2 	6 
3 	7 
4 	8 

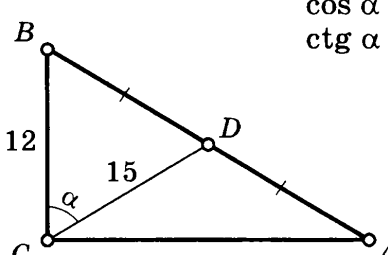
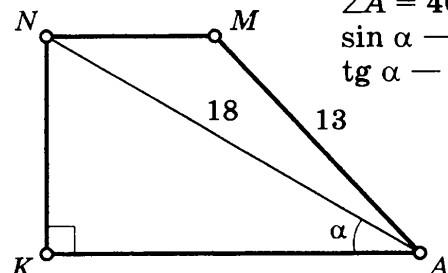
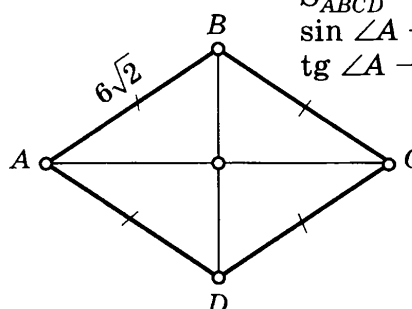
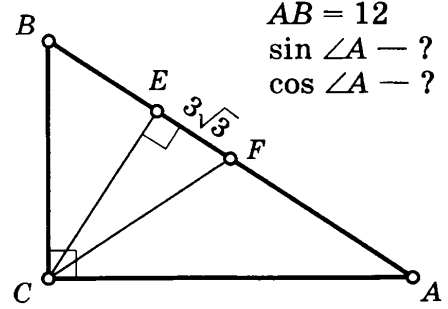
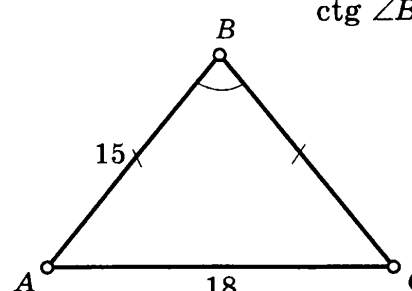
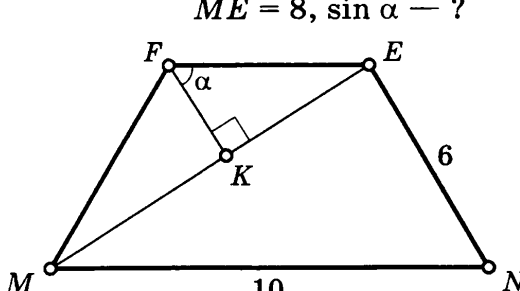
9 	13 
10 $LM = x - ?$ 	14 
11 	15 
12 $AD = x - ?$ 	16 $S_{\triangle ABC} = 50$ 

СОотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике

Таблица 19

1 $ABCD$ — параллелограмм $S_{ABCD} = ?$ 	5 $ML \parallel NK$ $S_{KLMN} = ?$ 
2 $MNKP$ — параллелограмм $S_{MNKP} = ?$ 	6 $KL = ?$ $\cos \angle K = ?$ 
3 $EF \parallel KT$, $S_{EFTK} = ?$ 	7 $ABCD$ — прямоугольник $S_{ABCD} = ?$ $\cos \angle ACB = ?$ 
4 $AD \parallel BC$ $S_{ABCD} = ?$ 	8 $\sin \angle F = ?$ $\cos \angle F = ?$ $\operatorname{tg} \angle F = ?$ $\operatorname{ctg} \angle F = ?$ 

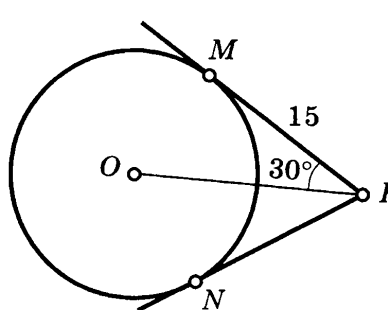
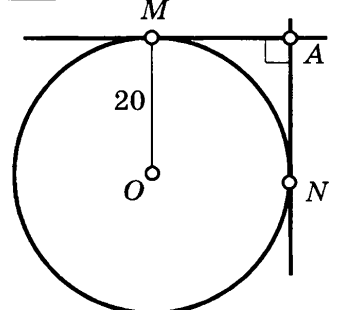
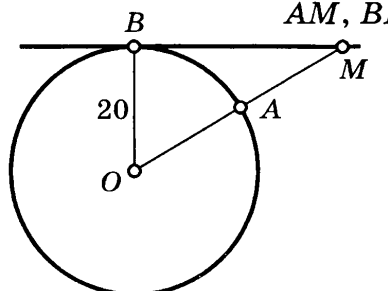
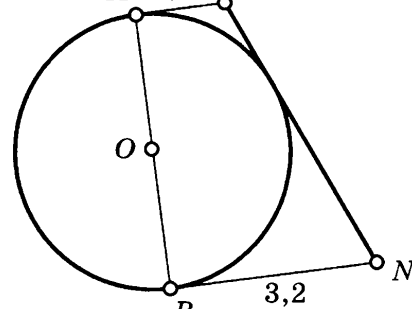
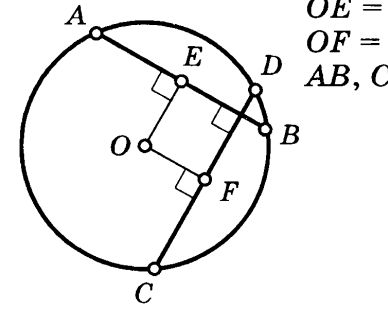
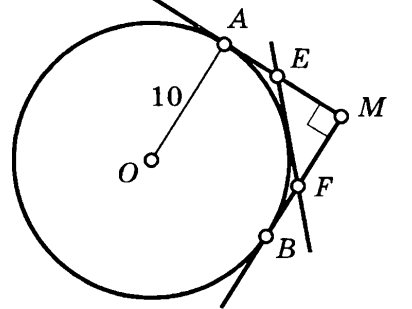
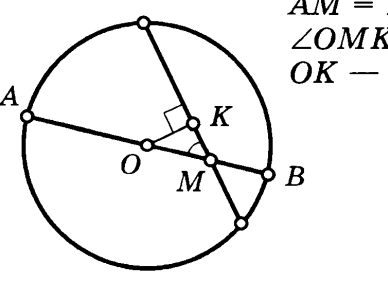
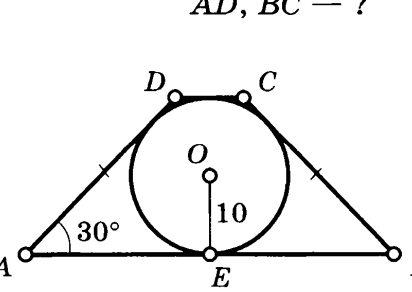
9 $AC = BC$ $\cos \angle B = \frac{1}{3}$ $\frac{AN}{CM} - ?$ 	13 $AB = 5 BC$ $\sin \angle B - ?$ $\cos \angle B - ?$ $\operatorname{tg} \angle B - ?$ $\operatorname{ctg} \angle B - ?$ 
10 $NQ = MQ$ $\frac{NE}{QF} - ?$ 	14 $ABCD$ — прямоугольник $\sin \alpha - ?$ $\cos \alpha - ?$ $\operatorname{tg} \alpha - ?$ $\operatorname{ctg} \alpha - ?$ 
11 $ABCD$ — трапеция $S_{ABCD} - ?$ 	15 $KMTF$ — трапеция $\sin \angle K - ?$ $\cos \angle K - ?$ 
12 $KL = 8$ $\sin \angle K, \cos \angle K$ $\operatorname{tg} \angle K, \operatorname{ctg} \angle K$ 	16 $\sin \angle R - ?$ $\operatorname{tg} \angle R - ?$ 

17 $\angle ACB = 90^\circ$ $\cos \alpha = ?$ $\operatorname{ctg} \alpha = ?$ 	20 $AMNK$ — трапеция $\angle A = 40^\circ$ $\sin \alpha = ?$ $\operatorname{tg} \alpha = ?$ 
18 $S_{ABCD} = 12\sqrt{2}$ $\sin \angle A = ?$ $\operatorname{tg} \angle A = ?$ 	21 CF — медиана $AB = 12$ $\sin \angle A = ?$ $\cos \angle A = ?$ 
19 $\cos \angle B = ?$ $\operatorname{ctg} \angle B = ?$ 	22 $MNEF$ — трапеция $ME = 8$, $\sin \alpha = ?$ 

КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

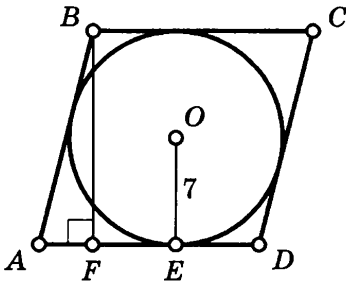
Таблица 20

1 $KL - ?$	5 $ON = 15, MN - ?$
2 $OM = 18$ $\angle NMK - ?$	6 $OK = 6$ $\angle MON = 120^\circ$ $MK, NK - ?$
3 $\angle BAC - ?$	7 $\angle ACB = 90^\circ$ $AB = 25$ $AE - ?$
4 $\angle AMB - ?$	8 $\angle AMB - ?$

9 MN — ? 	13 MA, NA — ? 
10 $OM = 30$ AM, BM — ? 	14 AB — ? 
11 $AO = 10$ $OE = 8$ $OF = 6$ AB, CD — ? 	15 $P_{\triangle MEF}$ — ? 
12 $MB = 4$ $AM = 12$ $\angle OMK = 30^\circ$ OK — ? 	16 $ABCD$ — трапеция AD, BC — ? 

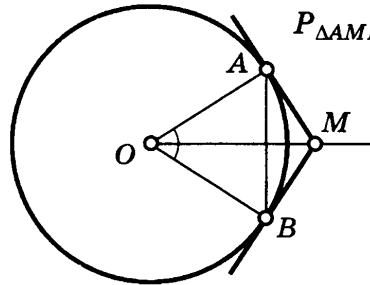
17

$ABCD$ — ромб
 BF — ?



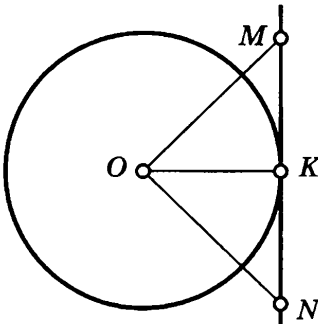
21

$OM = 24$
 $\angle AOB = 60^\circ$
 $P_{\triangle AMB}$ — ?



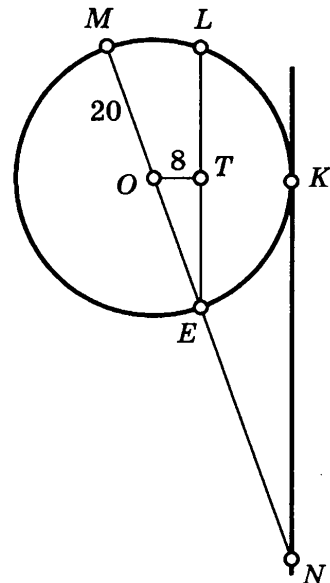
18

$OM = ON = 10$
 $MN = 16$
 OK — ?



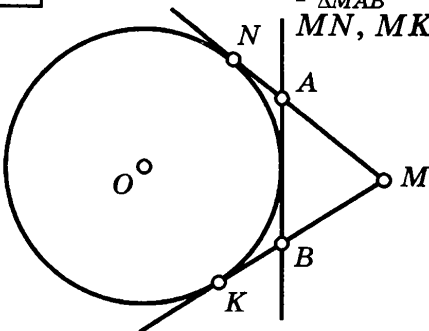
22

$EL \parallel NK$
 MN — ?



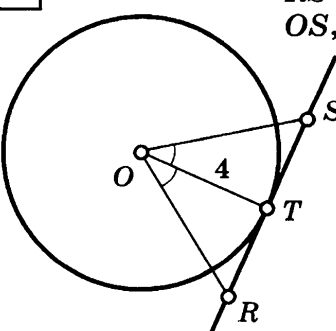
19

$P_{\triangle MAB} = 48$
 MN, MK — ?



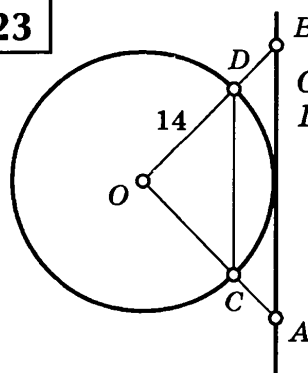
20

$RS = 15$
 OS, OR — ?



23

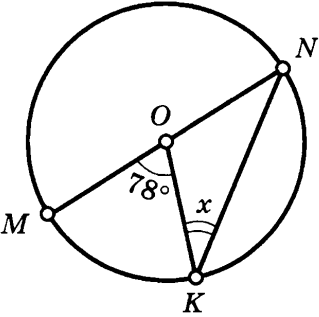
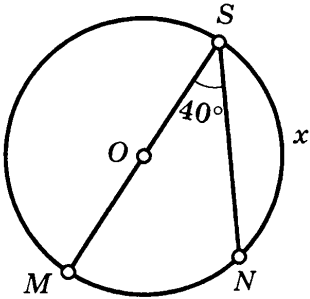
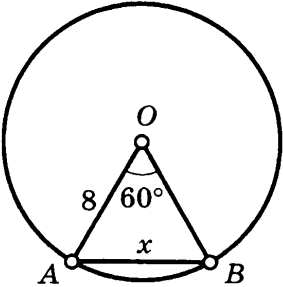
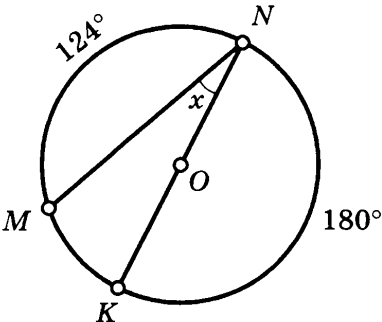
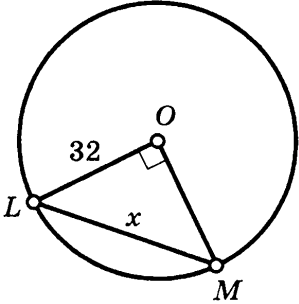
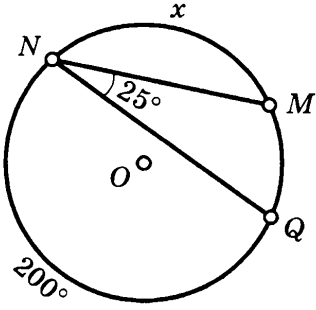
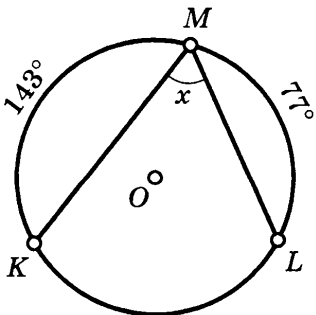
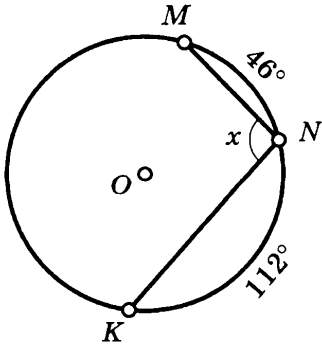
$OA = OB = 20$
 DC — ?



ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ

Таблица 21

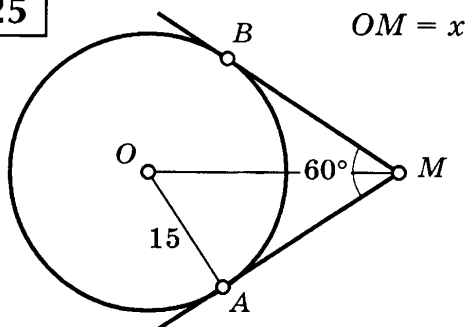
Найдите x .

1 	5 
2 	6 
3 	7 
4 	8 

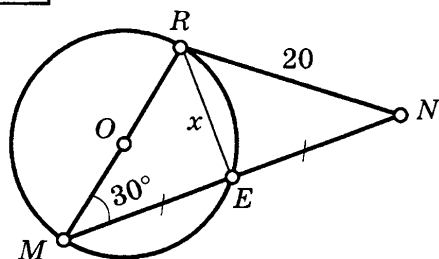
9	13
10	14
11	15
12	16

17	21
18	22
19	23
20	24

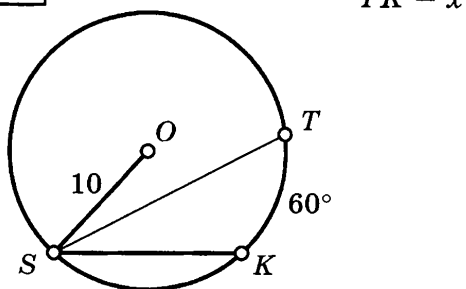
25



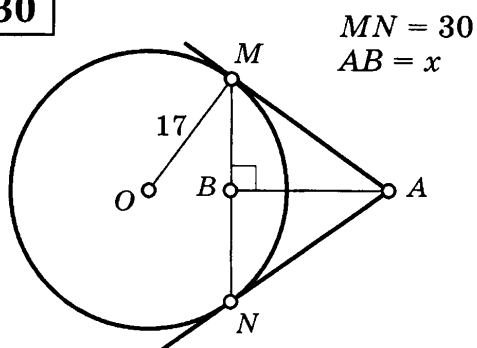
29



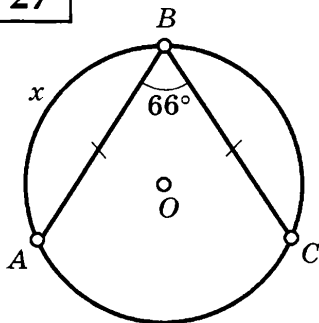
26



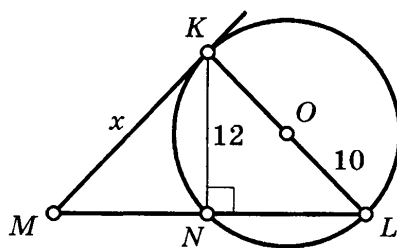
30



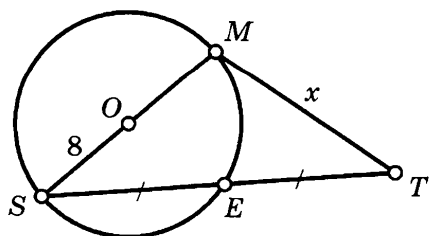
27



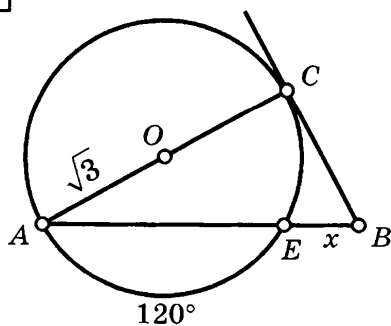
31



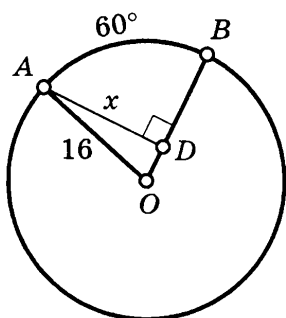
28



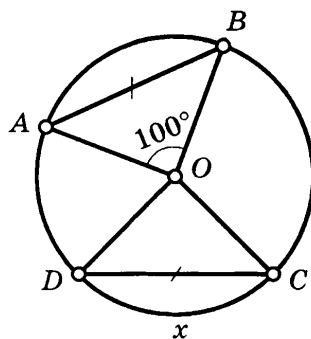
32



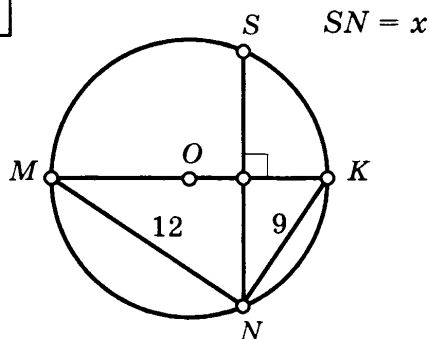
33



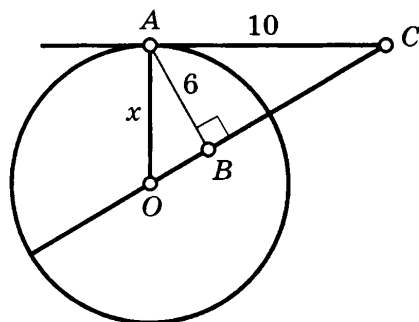
37



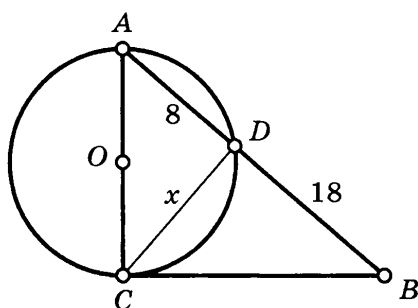
34



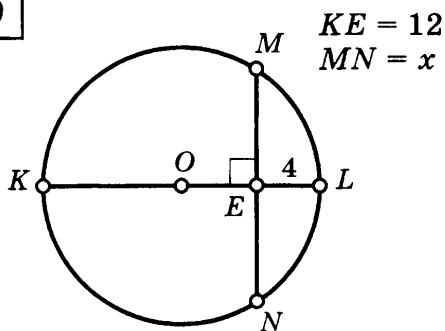
38



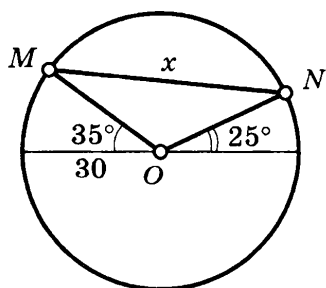
35



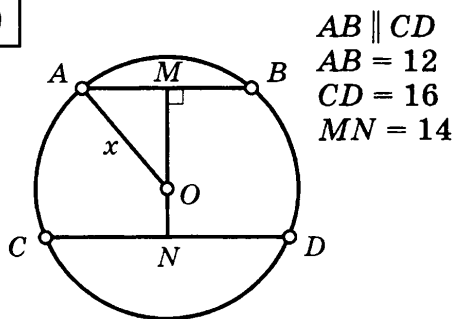
39



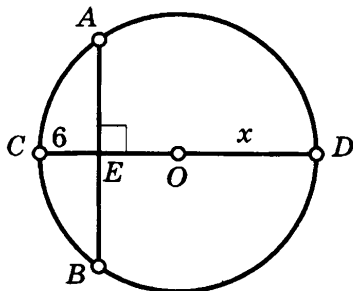
36



40

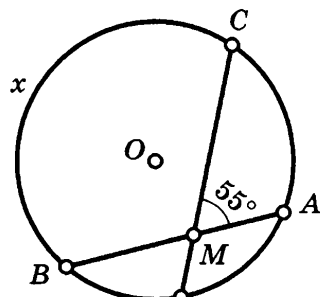


41



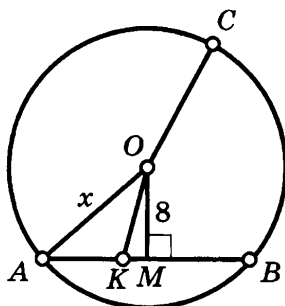
$$AB + CE = CD$$

45



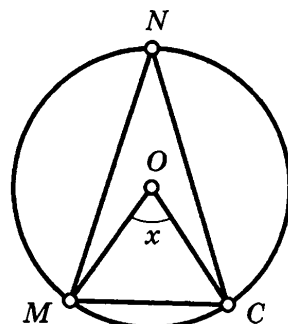
$$\cup CB - \cup AD = 65^\circ$$

42



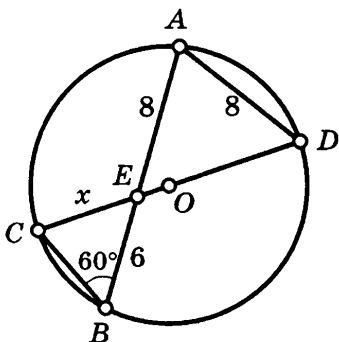
$$AK = OK = 10$$

46

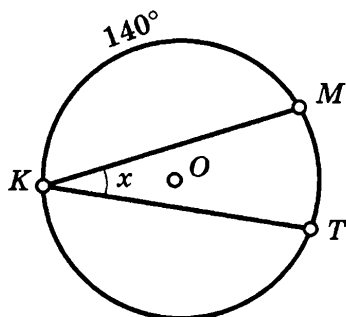


$$\angle NMC = 75^\circ, \cup NM : \cup MC = 2 : 1$$

43

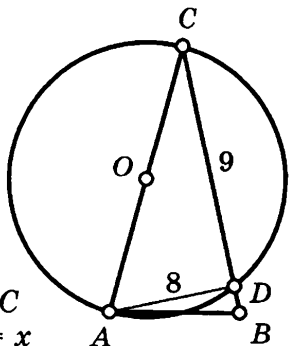


47



$$\cup KT : \cup TM = 7 : 4$$

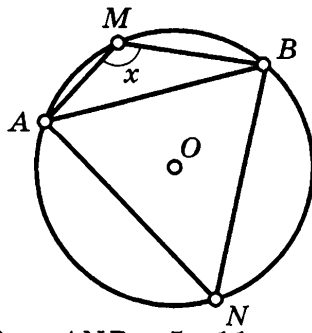
44



$$AC = BC$$

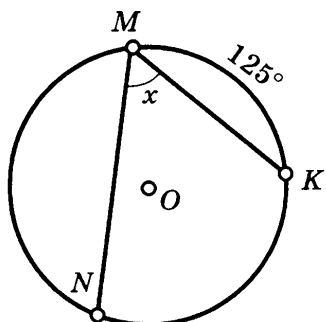
$$S_{\triangle ABC} = x$$

48



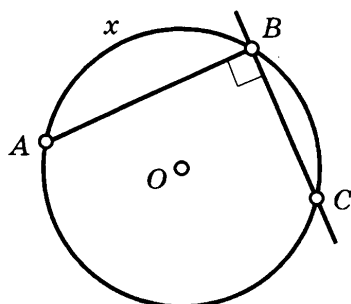
$$\cup AMB : \cup ANB = 5 : 11$$

49



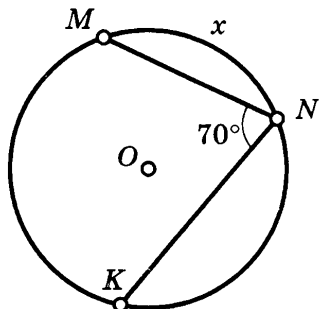
$$\cup MN : \cup NK = 31 : 16$$

52



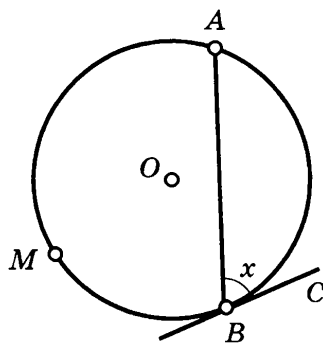
$$\cup BC : \cup CA = 2 : 5$$

50



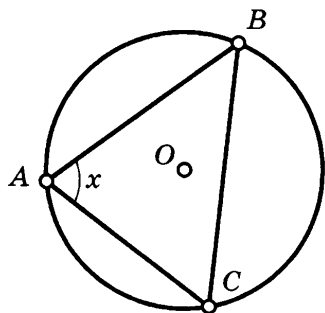
$$\cup NM : \cup NK = 20 : 24$$

53



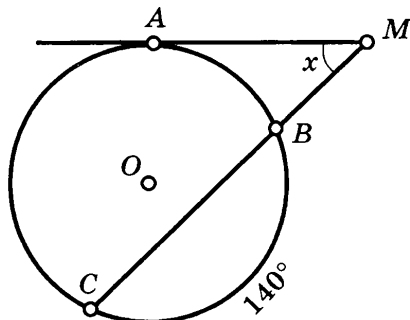
$$\cup AB : \cup BMA = 3 : 5$$

51



$$\cup AB : \cup BC : \cup AC = 7 : 11 : 6$$

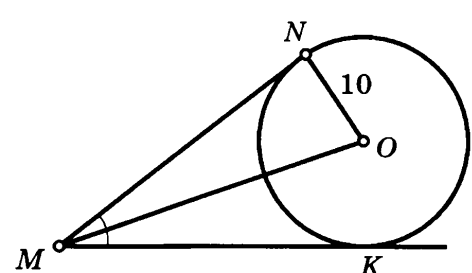
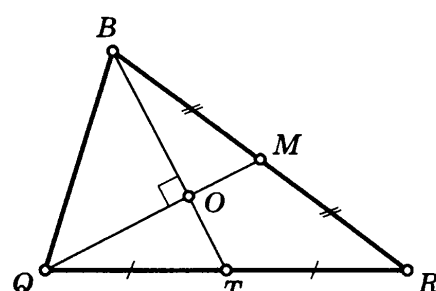
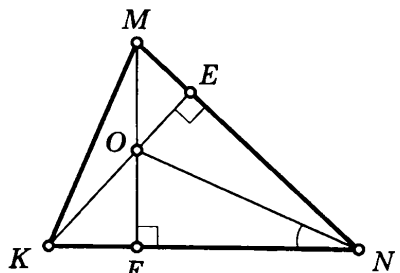
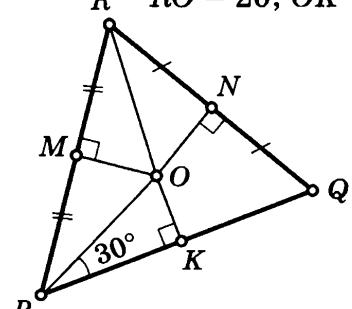
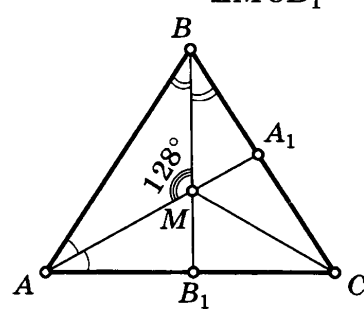
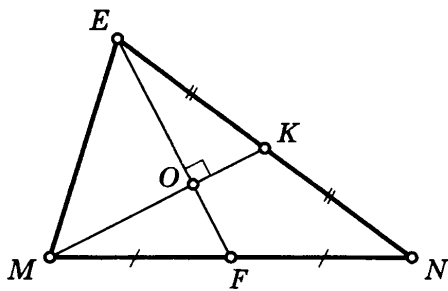
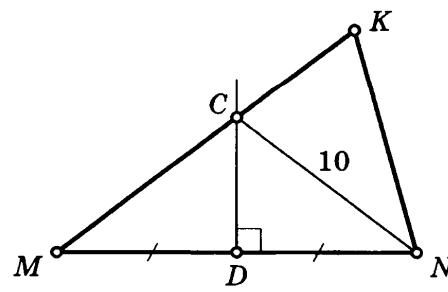
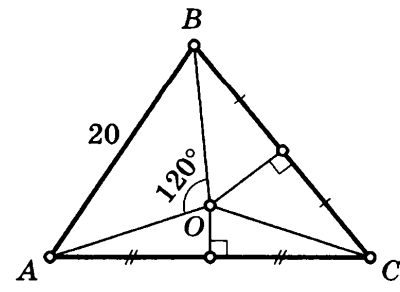
54

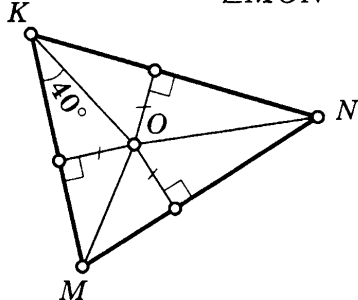
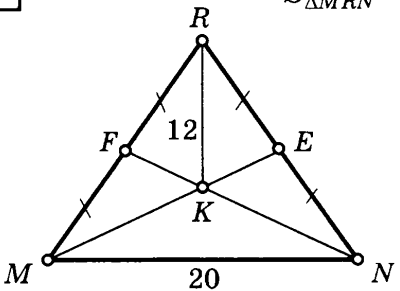
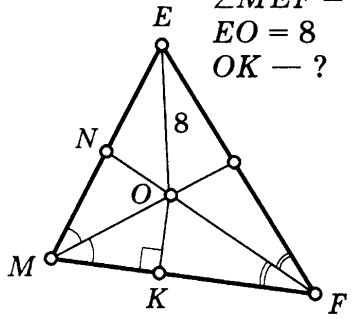
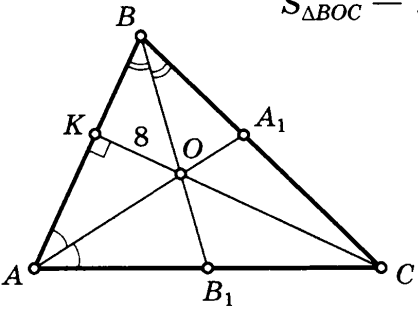
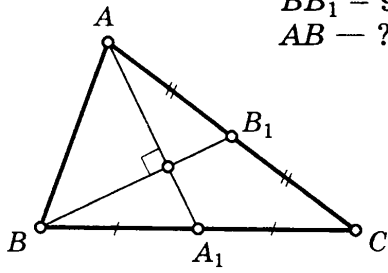
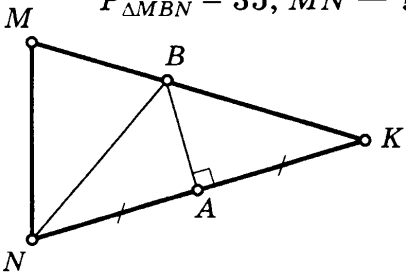
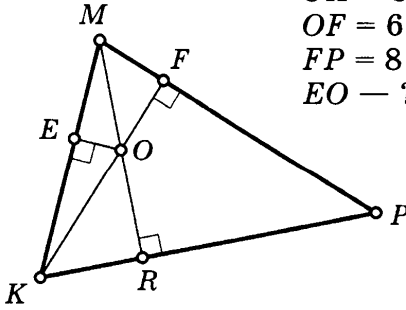
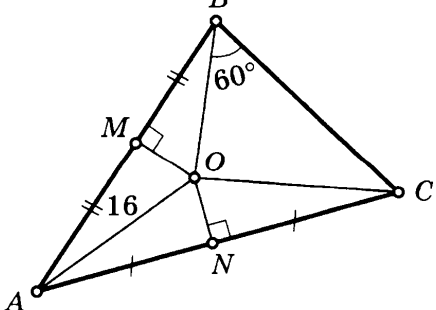


$$\cup AB : \cup CA = 10 : 12$$

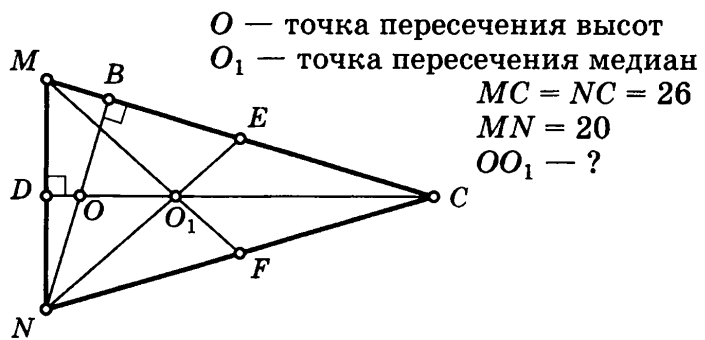
ЧЕТЫРЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Таблица 22

1 $\angle NMK = 60^\circ$, MO — ? 	5 $QM = 9$, $BT = 12$, $S_{\triangle BOQ}$ — ? 
2 $\angle MKN = 66^\circ$, $\angle FNO$ — ? 	6 $RO = 20$, OK — ? 
3 $\angle MCB_1$ — ? 	7 $EF = 18$, $MK = 15$, ON — ? 
4 $MK = 17$, CK — ? 	8 OC — ? 

9 $\angle MON - ?$ 	13 $S_{\triangle MRN} - ?$ 
10 $\angle MEF = 60^\circ$ $EO = 8$ $OK - ?$ 	14 $BC = 20$ $S_{\triangle BOC} - ?$ 
11 $AA_1 = 12$ $BB_1 = 9$ $AB - ?$ 	15 $MK = NK = 20$ $P_{\triangle MBN} = 35, MN - ?$ 
12 $OK = 8$ $OF = 6$ $FP = 8$ $EO - ?$ 	16 $S_{\triangle OBC} - ?$ 

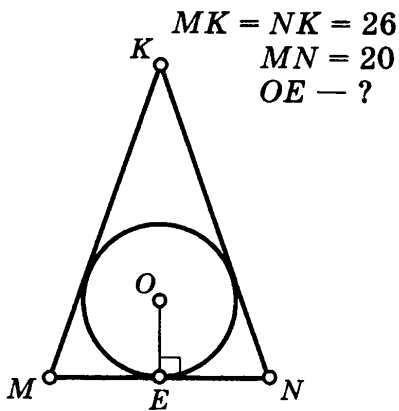
17



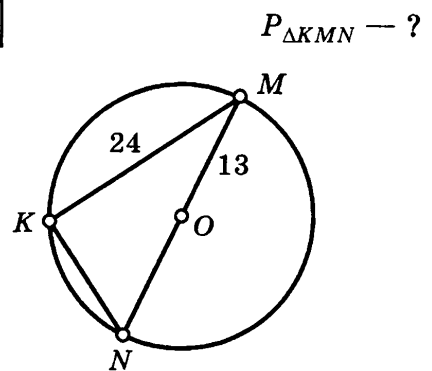
ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТИ

Таблица 23

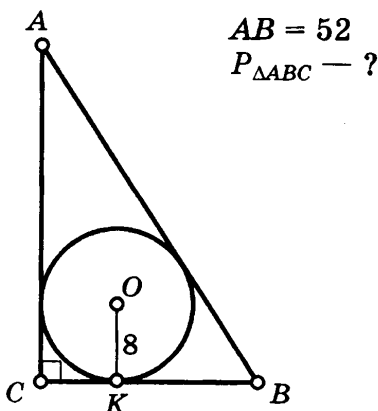
1



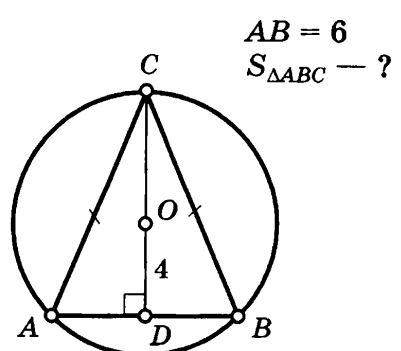
3

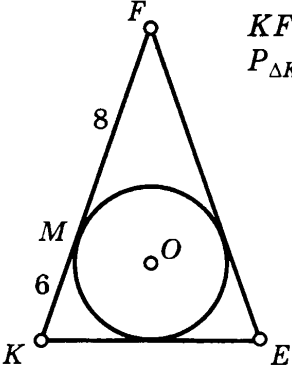
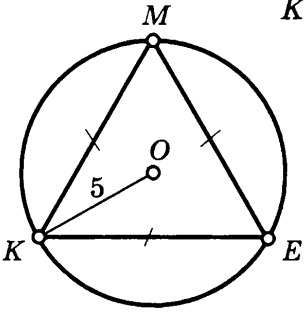
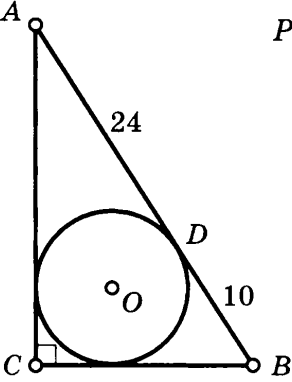
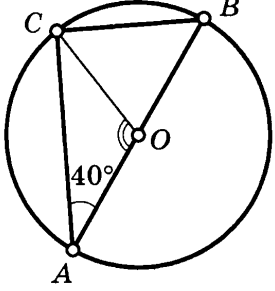
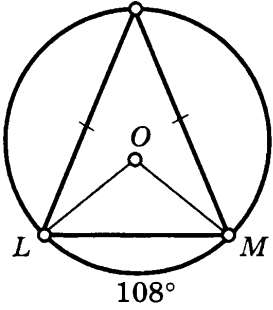
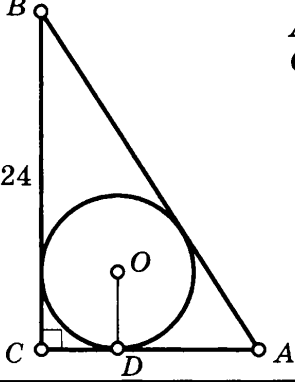
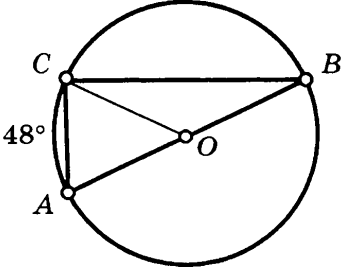
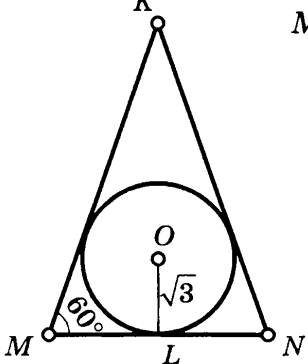


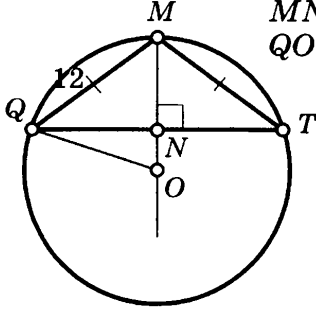
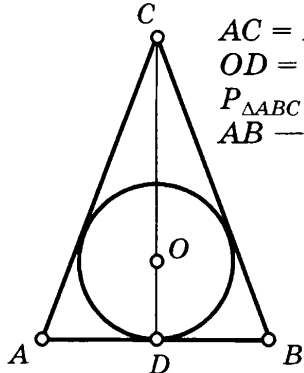
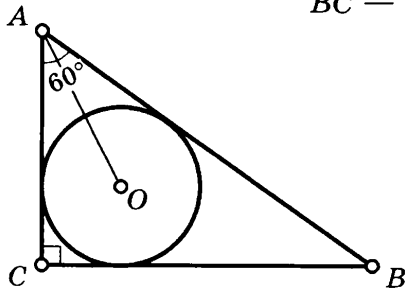
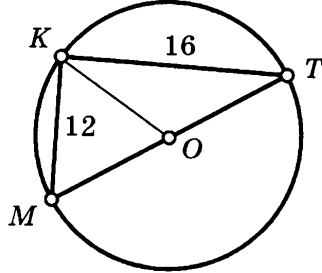
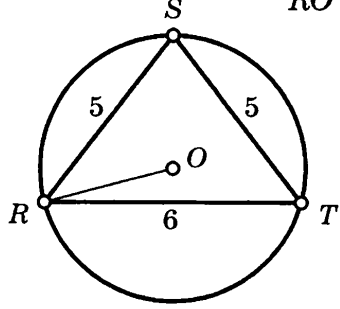
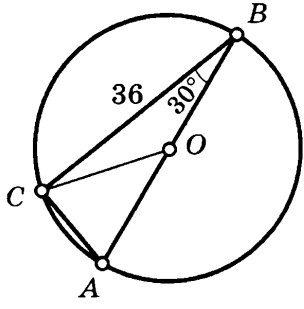
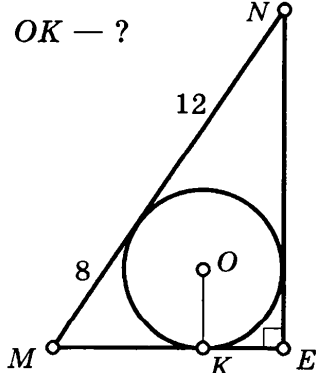
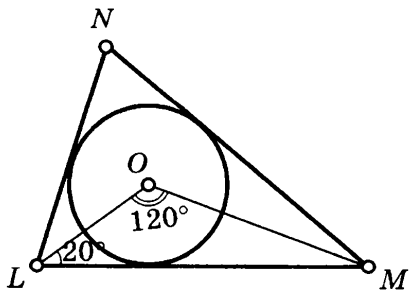
2



4



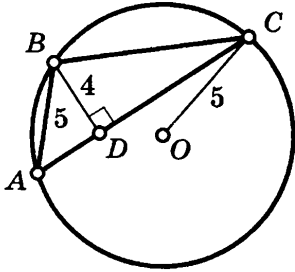
5  $KF = EF$ $P_{\triangle KFE} = ?$	9  $KE = ?$
6  $P_{\triangle ABC} = ?$	10  $\angle AOC = ?$
7  $\angle L, \angle M, \angle E = ?$	11  $AC = 10$ $OD = ?$
8  $\angle A, \angle B, \angle ACB = ?$	12  $MN = ?$

13  $MN = 8$ $QO = ?$	17  $AC = BC$ $OD = 0,4 CD$ $P_{\triangle ABC} = 40$ $AB = ?$
14  $AO = 20$ $BC = ?$	18  $KO = ?$
15  $RO = ?$	19  $CO = ?$
16  $OK = ?$	20  $\angle N = ?$

21 $S_{\triangle REF} = ?$	25 $KE = ?$
22 $S_{\triangle ABC} = ?$	26 $AB = BC = AC, BD = ?$
23 $P_{\triangle ABC} = ?$	27 $MO = ?$
24 $QN = 10$ $MN = 20$ $MQ = 24$ $TN = ?$	28 $OT = ?$

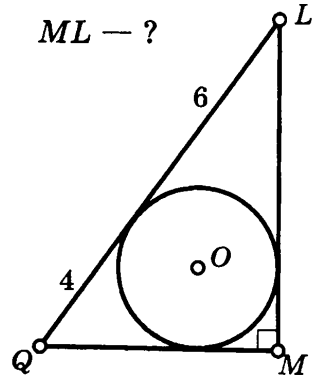
29

$BC - ?$



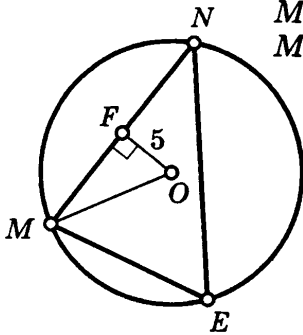
33

$ML - ?$



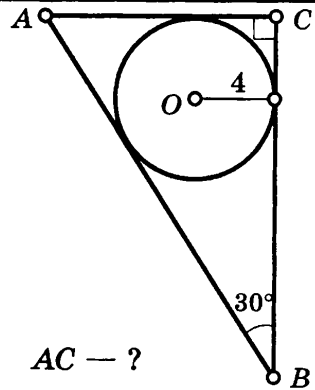
30

$MN = 24$
 $MO - ?$



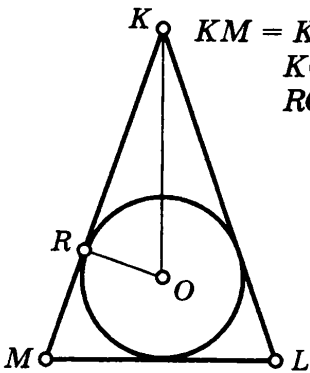
34

$AC - ?$



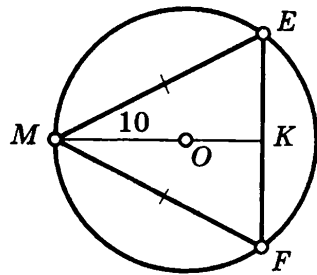
31

$KM = KL = 20$
 $KO = 10$
 $RO - ?$



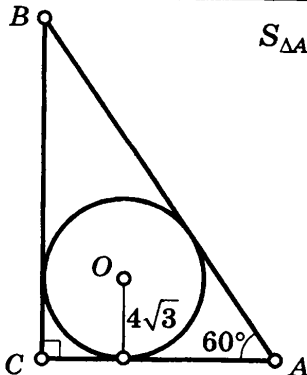
35

$MK = 16, ME, EF - ?$



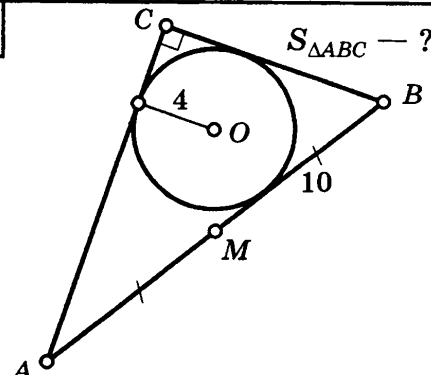
32

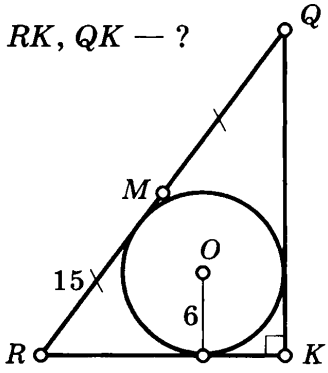
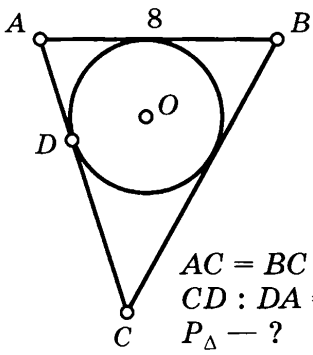
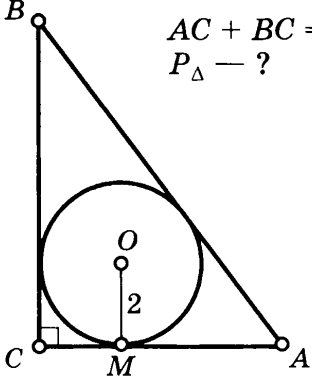
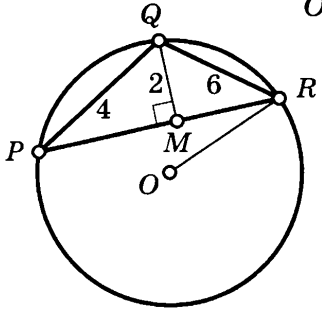
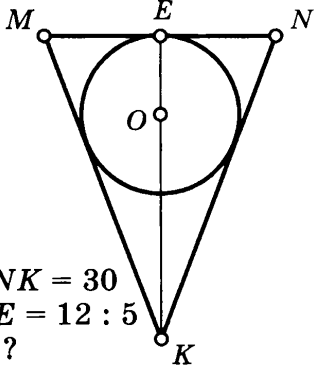
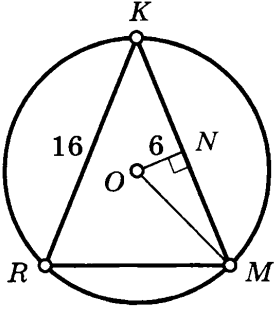
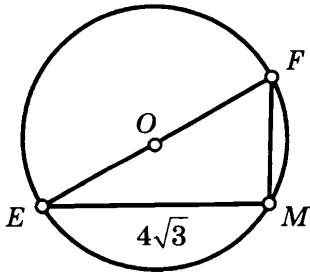
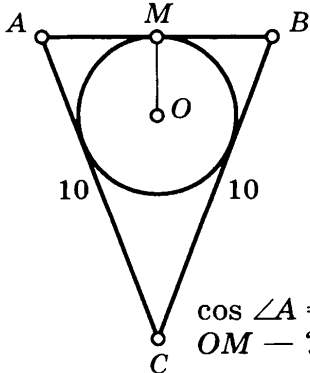
$S_{\triangle ABC} - ?$



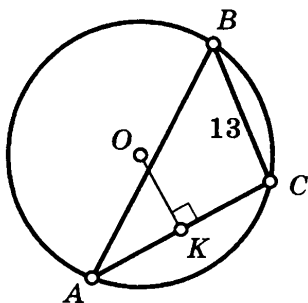
36

$S_{\triangle ABC} - ?$

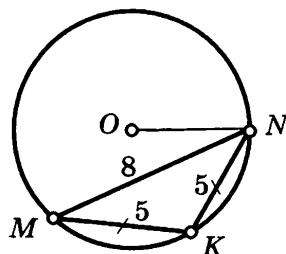


37 RK, QK — ? 	41  $AC = BC$ $CD : DA = 3 : 2$ P_{Δ} — ?
38  $AC + BC = 17$ P_{Δ} — ?	42 OR — ? 
39  $MK = NK = 30$ $KO : OE = 12 : 5$ MN — ?	43  $KR = KM = 16, OM$ — ?
40 EO — ? $\angle E : \angle F = 1 : 2$ 	44  $\cos \angle A = 0,6$ OM — ?

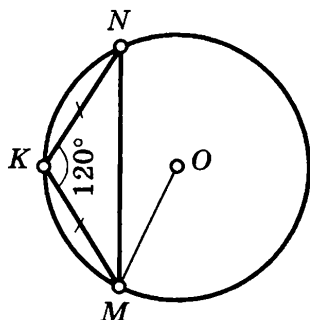
45 $OK = 12, AC = 20, \sin \angle A - ?$



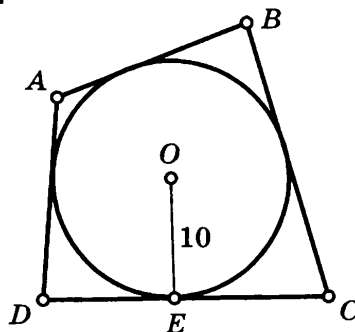
49 $ON - ?$



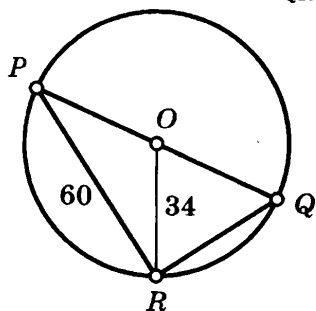
46 $KM = KN = 16, MO - ?$



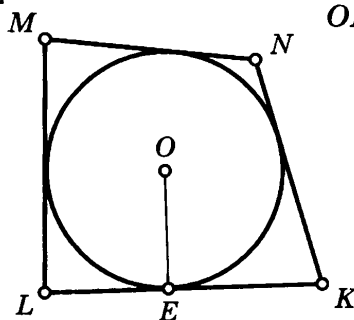
50 $AB + DC = 24, S_{\triangle ABCD} - ?$



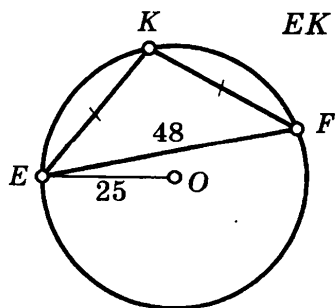
47 $S_{\triangle PQR} - ?$



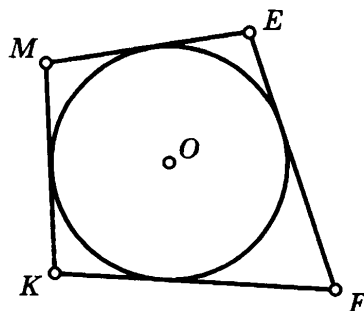
51 $MN + LK = 20, S_{\triangle MNKL} = 24$
 $OE - ?$

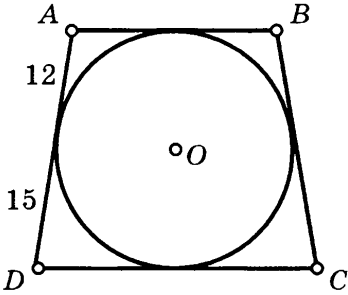
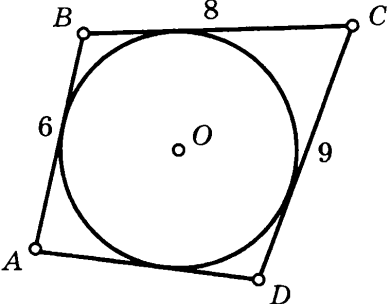
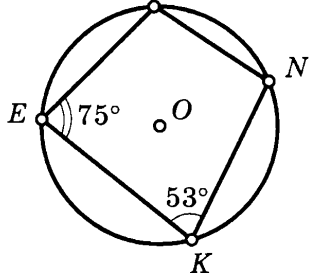
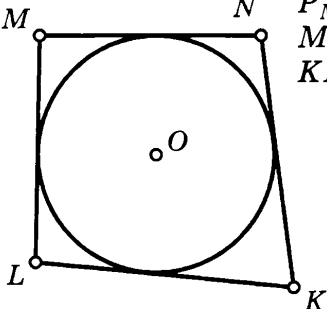
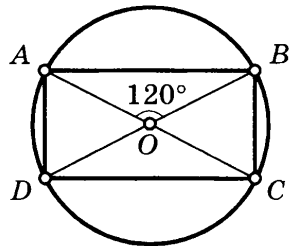
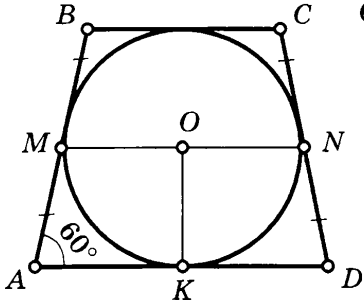
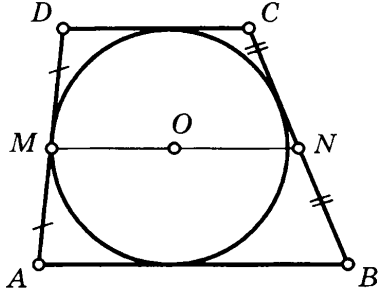
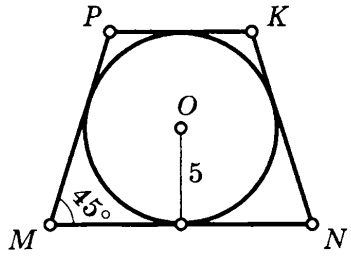


48 $EK - ?$

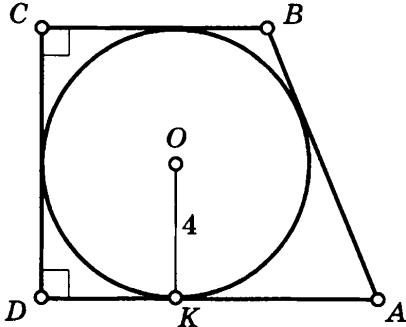


52 $MK + EF = 40, P_{MEFK} - ?$

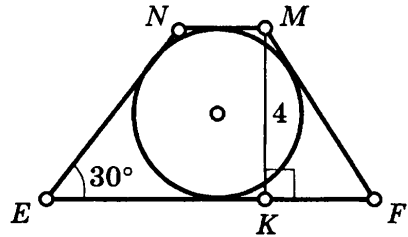


53 $AD = BC$, AB, DC — ? 	57 P_{ABCD} — ? 
54 $\angle M, \angle N$ — ? 	58 $MN : NK : KL = 2 : 6 : 7$ $P_{MNKL} = 54$ MN, NK, KL, LM — ? 
55 $ABCD$ — прямоугольник $AD = 10$, AO — ? 	59 $ABCD$ — трапеция $MN = 20$ — средняя линия OK — ? 
56 $P_{ABCD} = 48$, MN — ? 	60 $MNKP$ — трапеция $MP = NK$, S_{MNKP} — ? 

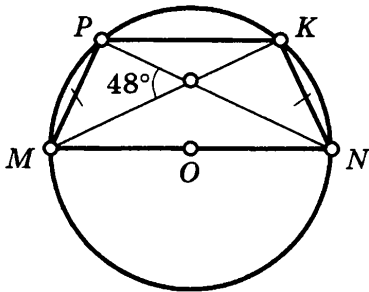
61 $AD - BC = 6$, $P_{ABCD} - ?$



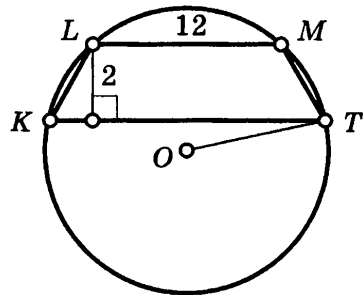
65 $EFMN$ — трапеция
 $NE = MF$
 $EF + MN - ?$



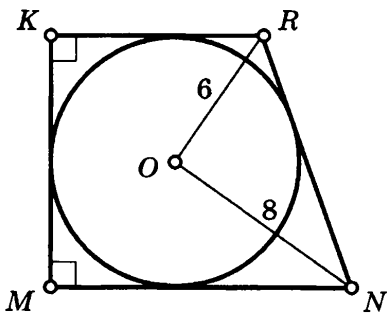
62 $MNKP$ — трапеция
 $\angle M, \angle N, \angle K, \angle P - ?$



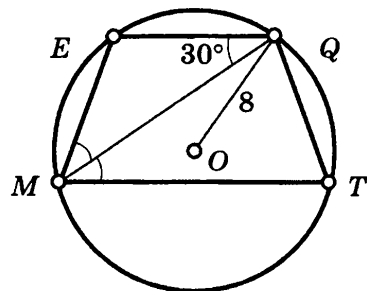
66 $LM \parallel KT$, $KT = 16$, $OT - ?$



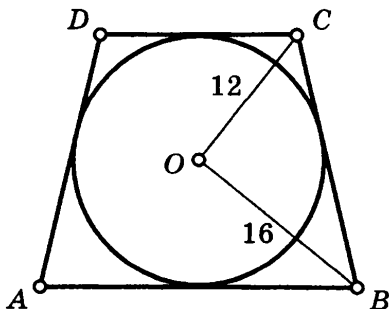
63 $S_{MNRK} - ?$



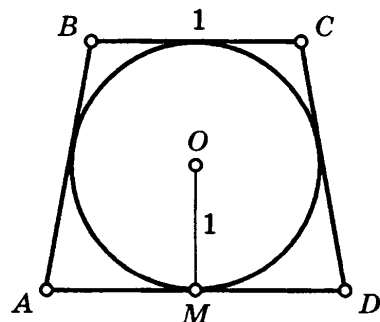
67 $EQ \parallel MT$, $S_{MTQE} - ?$



64 $AD = BC$, $S_{ABCD} - ?$

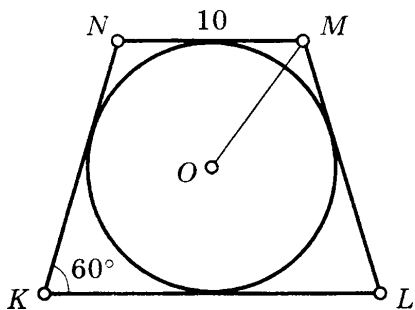


68 $BC \parallel AD$, $AB = CD$, $AD - ?$



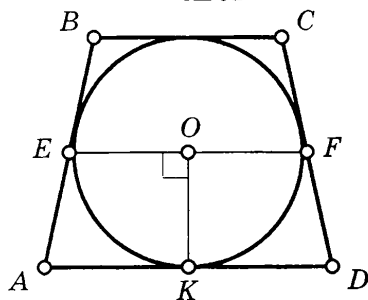
69

$MN \parallel KL$, $KN = NM =$
 $= ML = 10$, MO — ?



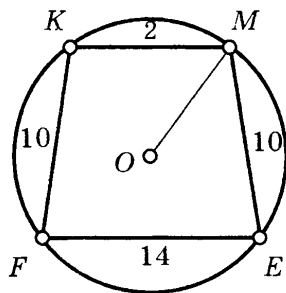
73

$BC \parallel AD$, $AB = CD$, $EF = 8$
 $OK = 5$, S_{ABCD} — ?



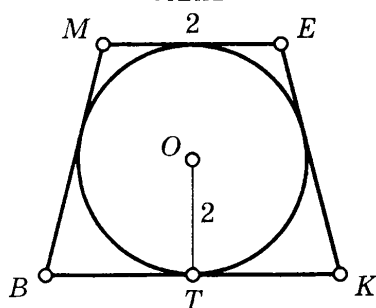
70

$KM \parallel FE$, MO — ?



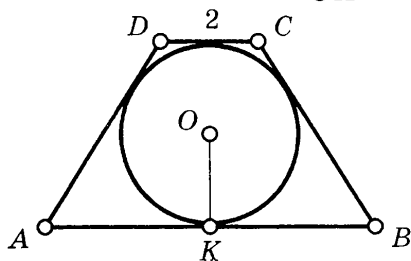
74

$ME \parallel BK$, $MB = EK$
 S_{MEKB} — ?



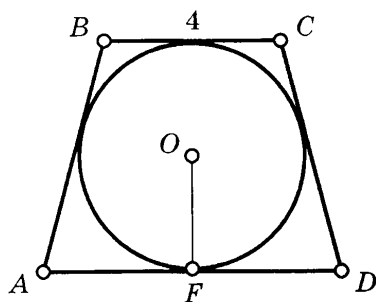
71

$ABCD$ — трапеция
 $AD \parallel BC$, $AB = 18$
 OK — ?



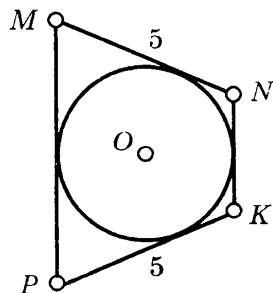
75

$AD \parallel BC$, $AB = CD$
 $AD = 9$, OF — ?



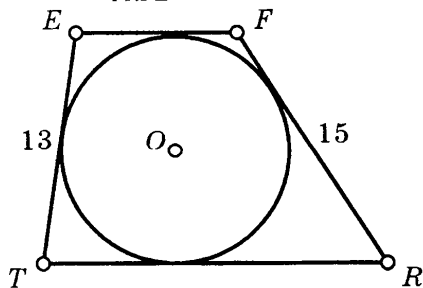
72

$MP \parallel NK$, $MN = PK$
 $MP - NK = 6$, S_{MPKN} — ?



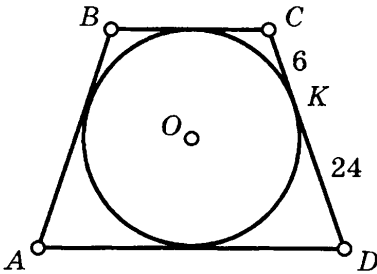
76

$EF \parallel TR$, $TR - EF = 14$
 S_{TRFE} — ?



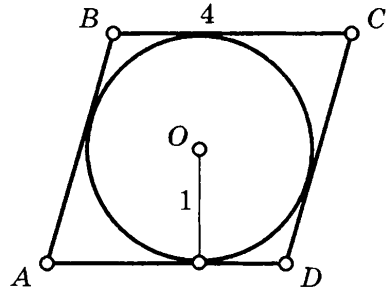
77

$AB = CD, BC \parallel AD$
 $S_{ABCD} = ?$



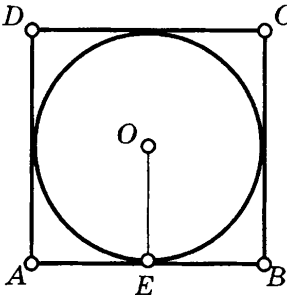
81

$ABCD$ — ромб
 $\angle A = ?$



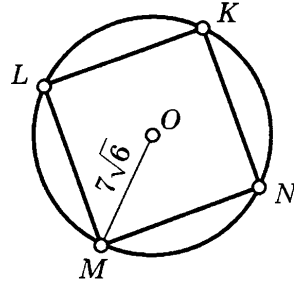
78

$ABCD$ — квадрат
 $AB = 12, OE = ?$



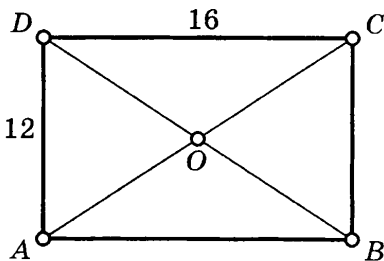
82

$MNKL$ — ромб
 $S_{MNKL} = ?$



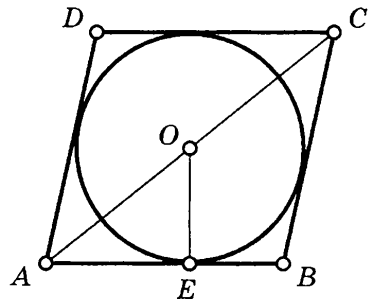
79

$ABCD$ — прямоугольник
 $AO = ?$



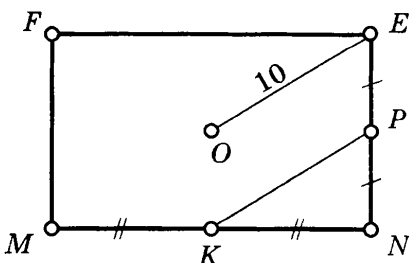
83

$ABCD$ — ромб
 $AC = 32, P = 80, OE = ?$



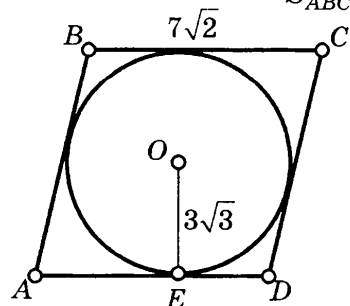
80

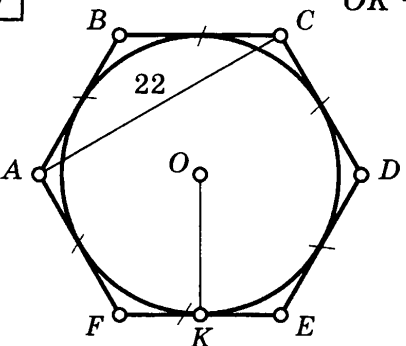
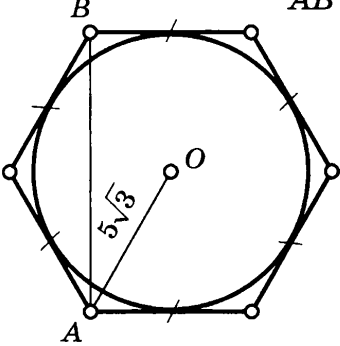
$MNFE$ — прямоугольник
 $KP = ?$



84

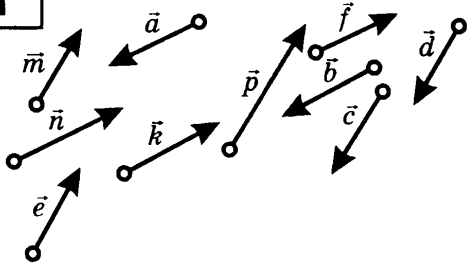
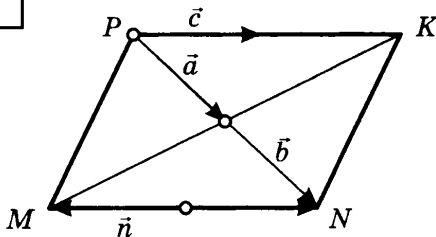
$AB = CD, BC = AD$
 $S_{ABCD} = ?$

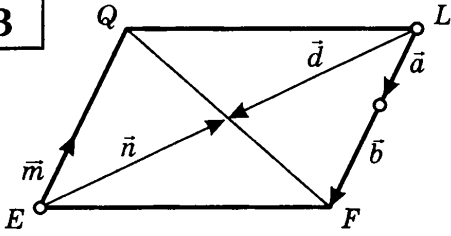
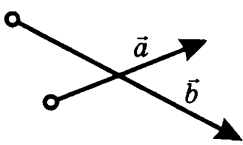
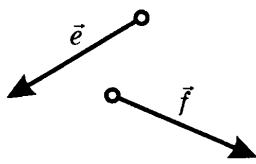
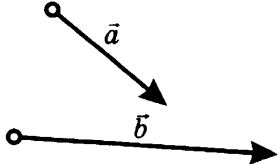
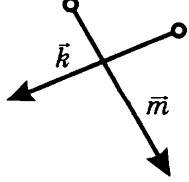
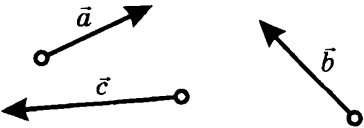


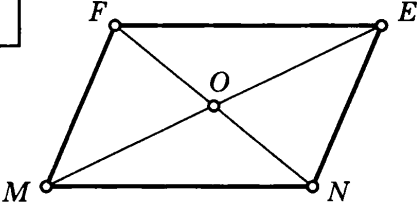
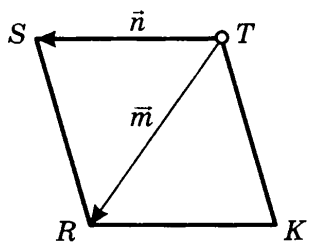
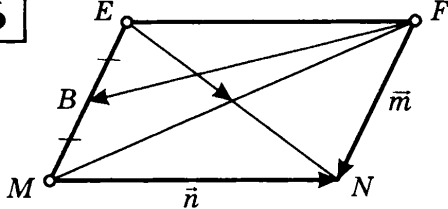
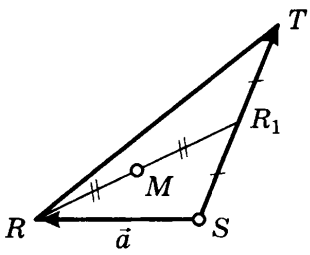
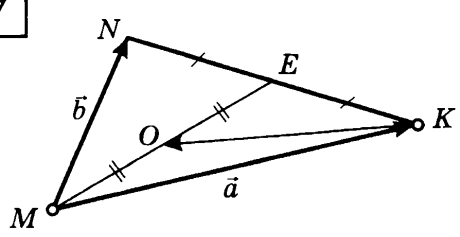
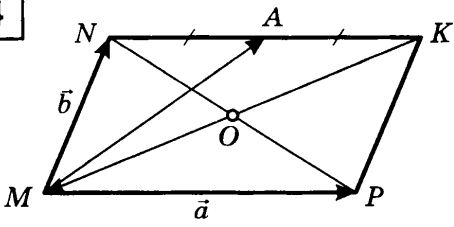
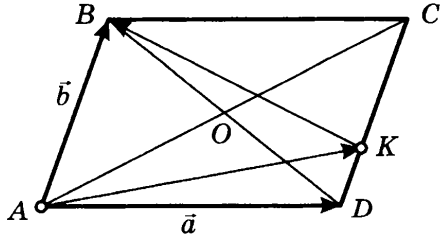
85 OK — ? 	86 AB — ? 
---	--

ВЕКТОРЫ

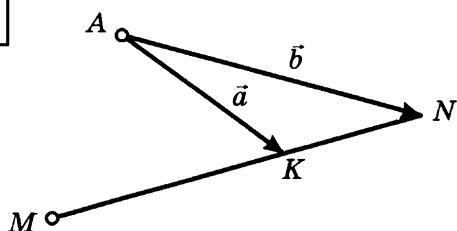
Таблица 24

1  Укажите векторы: а) сонаправленные с вектором $\vec{m}$; б) сонаправленные с вектором $\vec{n}$; в) противоположно направленные с $\vec{m}$ и $\vec{n}$	2  $MNKP$ — параллелограмм Укажите векторы: а) коллинеарные; б) сонаправленные; в) противоположные; г) равные
--	--

3  $EFQL$ — параллелограмм Укажите векторы: а) коллинеарные; б) сонаправленные; в) противоположные; г) равные	7  Постройте вектор $\vec{b} - \vec{a}$
4  Постройте вектор $\vec{e} + \vec{f}$ двумя способами	8 A, B, C, D, E — произвольные точки. Найдите сумму $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EA} + \overline{BC} + \overline{DE}$
5  Постройте вектор $\vec{a} + \vec{b}$ двумя способами	9 M, N, E, F, K — произвольные точки. Доказать, что $\overline{ME} + \overline{KN} + \overline{EK} + \overline{NF} = \overline{MN} + \overline{EF} + \overline{NE}$
6  Постройте вектор $\vec{k} - \vec{m}$	10  Постройте вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

11  $MFEN$ — параллелограмм Доказать, что $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{EN} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FM}$	15  $RSTK$ — параллелограмм Выразите векторы $\overrightarrow{RK}$, $\overrightarrow{KT}$, $\overrightarrow{SR}$ через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$
12 Найдите $\vec{X}$, если $\overrightarrow{CD} + \vec{X} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AE}$	16  $MNFE$ — параллелограмм Выразите векторы $\overrightarrow{EA}$ и $\overrightarrow{FB}$ через векторы $\overrightarrow{FN} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{MN} = \vec{n}$
13  Выразите вектор $\overrightarrow{SM}$ через $\overrightarrow{SR} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{ST} = \vec{b}$	17  Выразите вектор $\overrightarrow{KO}$ через векторы $\overrightarrow{MK} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{MN} = \vec{b}$
14  $MNKP$ — параллелограмм Выразите векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{MA}$ через векторы $\overrightarrow{MP} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{MN} = \vec{b}$	18  $ABCD$ — параллелограмм $DK : KC = 1 : 3$ Выразите векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{KB}$ через векторы $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$

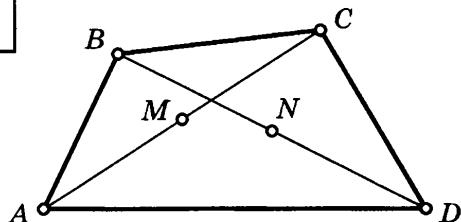
19



$$MK : KN = 3 : 2$$

Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AK}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$

23

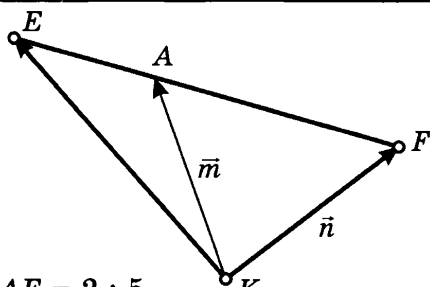


M — середина BD

N — середина AC

Доказать, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$

20



$$EA : AF = 2 : 5$$

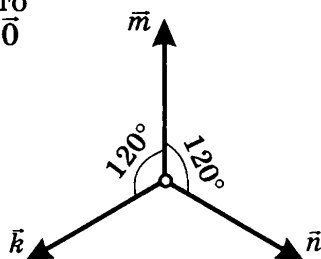
Выразите вектор $\overrightarrow{KE}$ через векторы $\vec{m} = \overrightarrow{KA}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{KF}$

24

$$|\vec{m}| = |\vec{n}| = |\vec{k}|$$

Доказать, что

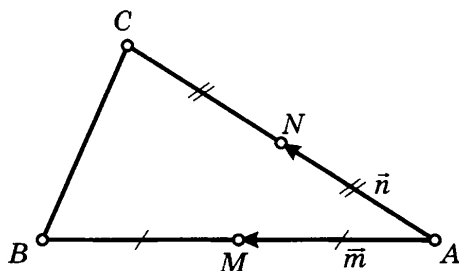
$$\vec{m} + \vec{n} + \vec{k} = \vec{0}$$



21

$$\overrightarrow{AM} = \vec{m}, \overrightarrow{AN} = \vec{n}$$

$$\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{NC}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BN} \text{ — ?}$$



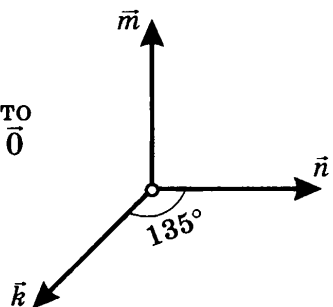
25

$$|\vec{n}| = |\vec{k}| = 1$$

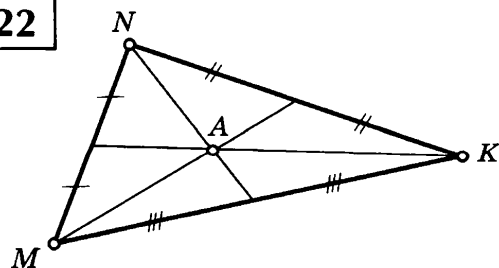
$$|\vec{m}| = \sqrt{2}$$

Доказать, что

$$\vec{m} + \vec{n} + \vec{k} = \vec{0}$$



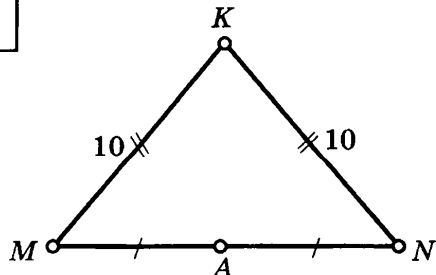
22



Доказать, что

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AK} = \vec{0}$$

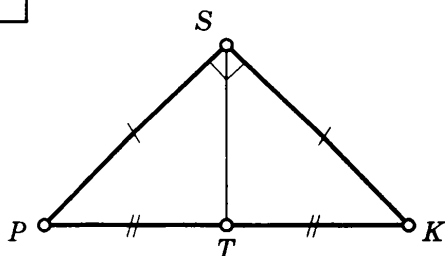
26



$$KA = 8$$

Найдите $|\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{KM}|$

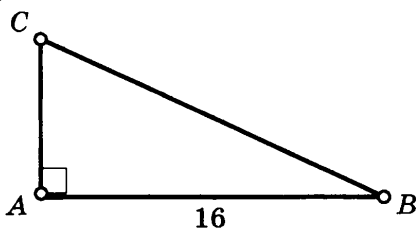
27



$$KP = 12$$

Найдите $|\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KS} + \overrightarrow{PT}|$

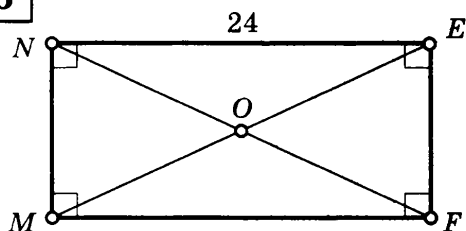
31



$$\vec{p} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$$

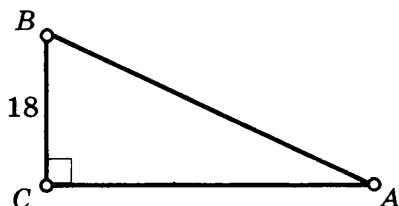
$|\vec{p}| = ?$

28



Найдите $|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NE} - \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{OF}|$

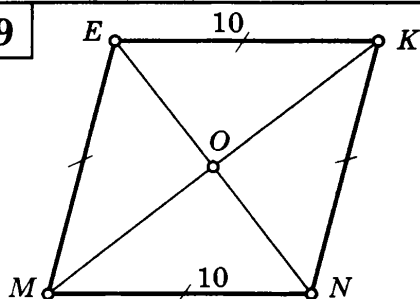
32



$$\vec{k} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}$$

$|\vec{k}| = ?$

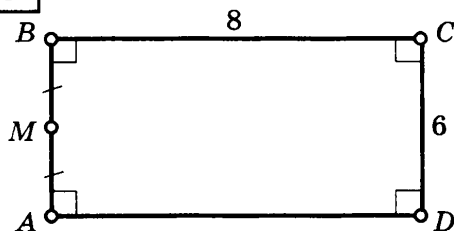
29



$$EN = 12$$

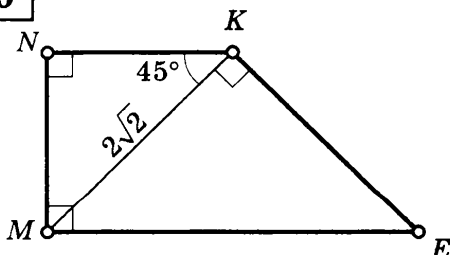
Найдите $|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ME} - \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{OE}|$

33



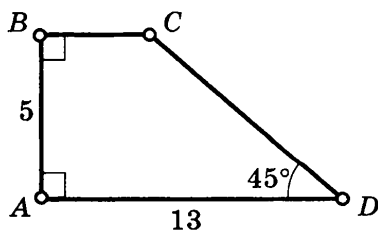
Найдите: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$, $|\overrightarrow{DC}|$, $|\overrightarrow{MC}|$

30



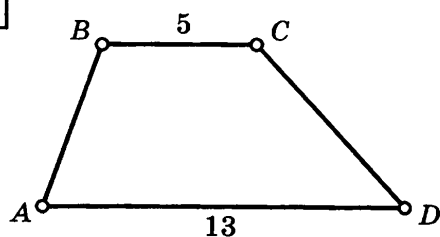
Найдите $|\overrightarrow{KE} - \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KN}|$

34



Найдите: $|\overrightarrow{BD}|$, $|\overrightarrow{CD}|$, $|\overrightarrow{AC}|$

35

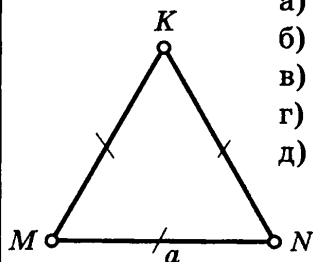


$ABCD$ — трапеция

$$\vec{a} = \vec{CD} - \vec{BC} + \vec{AB}$$

Найдите: $|\vec{a}|$

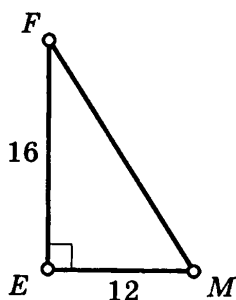
36



Найдите:

- а) $|\vec{MK} + \vec{MN}|$,
- б) $|\vec{MK} + \vec{KN}|$,
- в) $|\vec{MK} + \vec{NK}|$,
- г) $|\vec{KM} - \vec{KN}|$,
- д) $|\vec{MK} - \vec{MN}|$

37

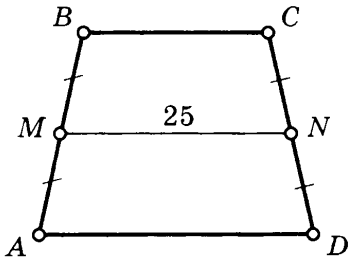
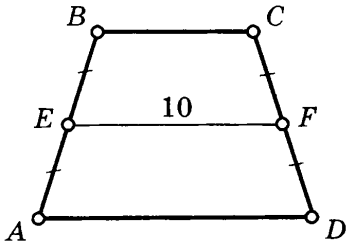
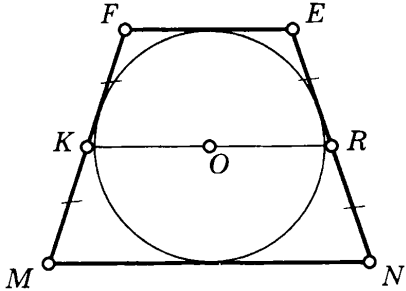
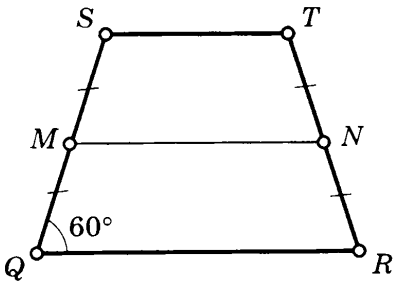
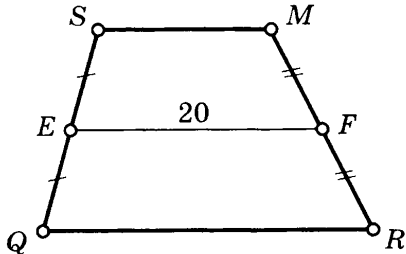
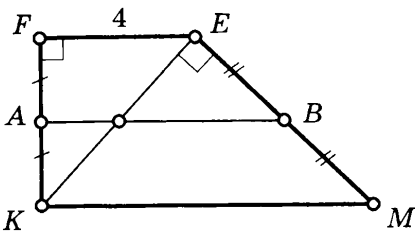
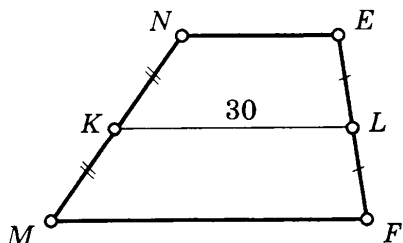
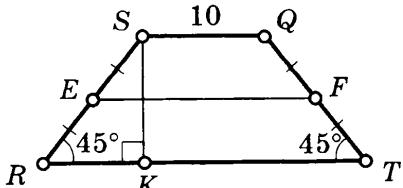


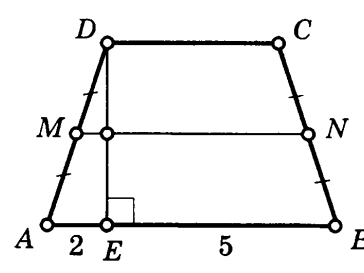
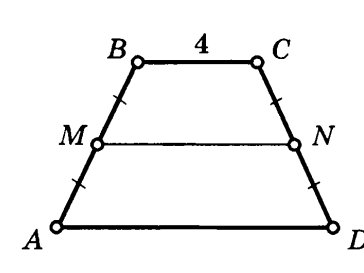
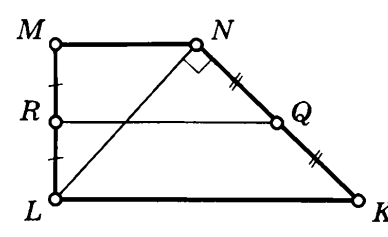
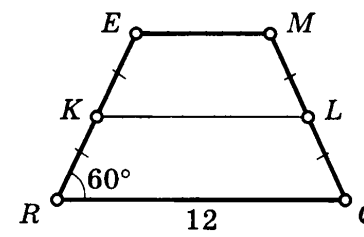
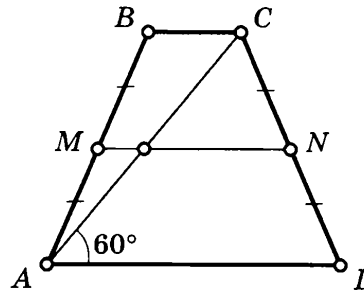
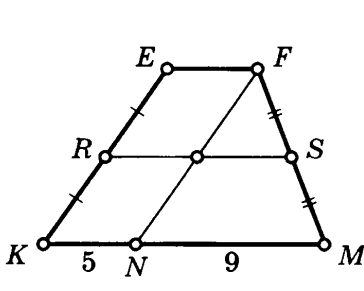
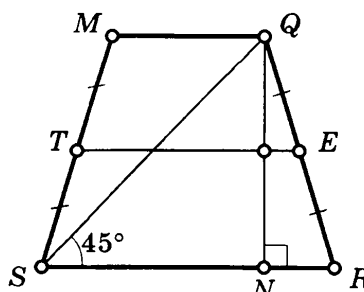
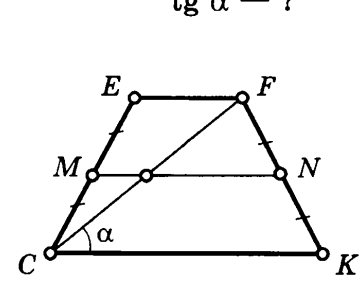
Найдите:

- 1) $|\vec{EM}| - |\vec{EF}|$,
- 2) $|\vec{EM} - \vec{EF}|$,
- 3) $|\vec{EM}| + |\vec{EF}|$,
- 4) $|\vec{EM} + \vec{EF}|$,
- 5) $|\vec{ME}| + |\vec{EF}|$,
- 6) $|\vec{ME} + \vec{EF}|$,
- 7) $|\vec{ME}| - |\vec{EF}|$,
- 8) $|\vec{ME} - \vec{EF}|$

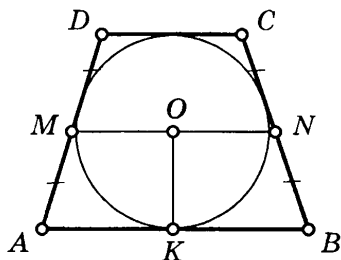
СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРАПЕЦИИ

Таблица 25

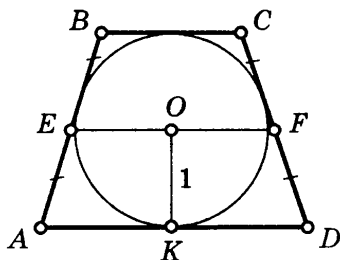
1 $AB = CD = 15$, $P_{ABCD} = ?$ 	5 $P_{ABCD} = 36$, $AB = ?$ 
2 $P_{MNEF} = 30$, $KR = ?$ 	6 $SQ = TR = 20$, ST, $MN = ?$ 
3 $QR - SM = 8$, SM, $QR = ?$ 	7 $\angle FEM = 150^\circ$, $AB = ?$ 
4 $MF = 2NE$, NE, $MF = ?$ 	8 $SK = 8$, RT, $EF = ?$ 

9 MN, DC — ? 	13 $AD - BC = 4, MN$ — ? 
10 $ML = 4, \angle MNK = 135^\circ$ RQ — ? 	14 $RE = EM = MQ, KL$ — ? 
11 $AC = 16, MN$ — ? 	15 $KE \parallel NF, RS$ — ? 
12 $QN = 4, TE$ — ? 	16 $MN = 4, S_{CEFK} = 8$ $\operatorname{tg} \alpha$ — ? 

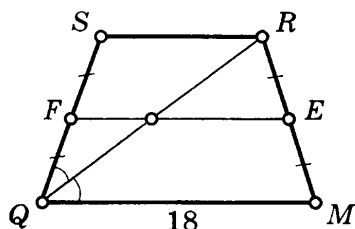
17

 $MN = 68, AB - DC = 64$
 $OK - ?$


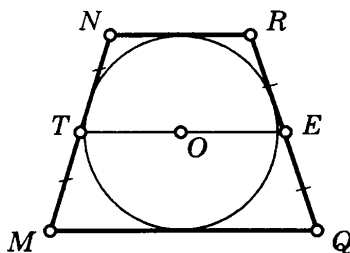
21

 $AD = 2 BC, EF - ?$


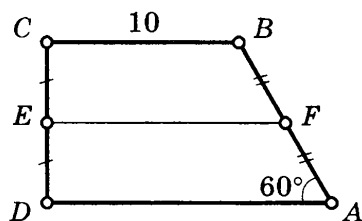
18

 $P_{QSRM} = 48, EF - ?$


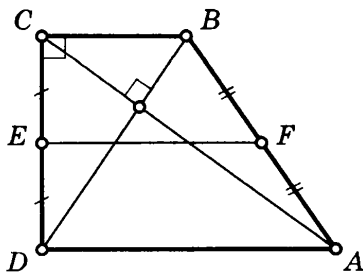
22

 $S_{MNRQ} = 20, \sin \angle M = 0,8$
 $TE - ?$


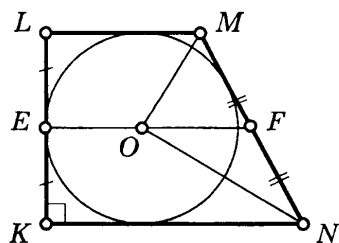
19

 $AB = 8, EF - ?$


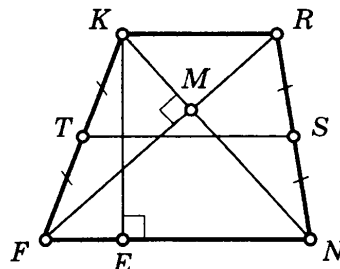
23

 $BC : CD = 1 : 2, EF = 20$
 $BC - ?$


20

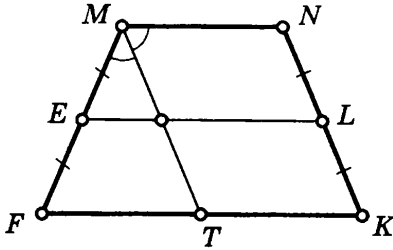
 $OM = 6, ON = 8, EF - ?$


24

 $KF = RN, KE = 10$
 $TS - ?$


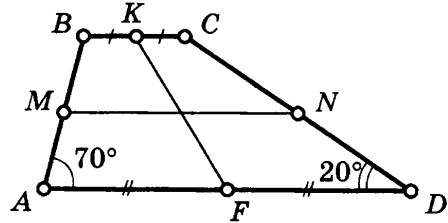
25

$P_{FMNK} = 71,8$, $EL = 21,4$
 $MT \parallel NK$, MN — ?



26

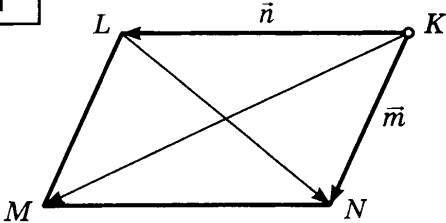
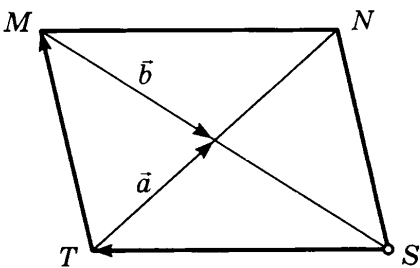
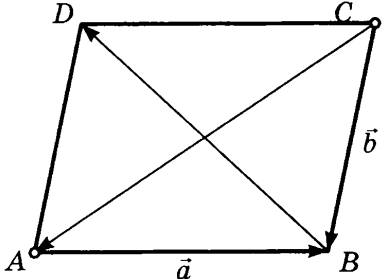
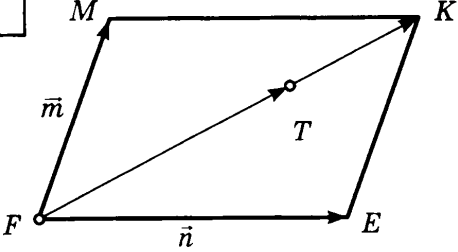
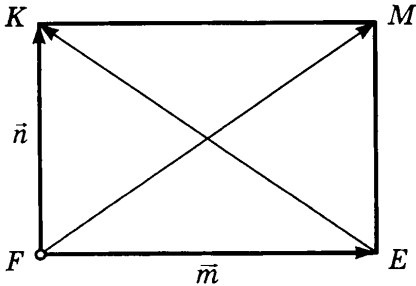
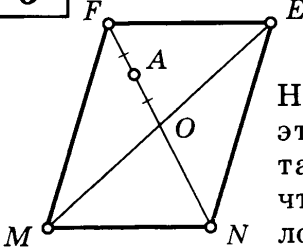
$KF = 2$, $MN = 4$
 MN — средняя линия
 BC , AD — ?



IX класс

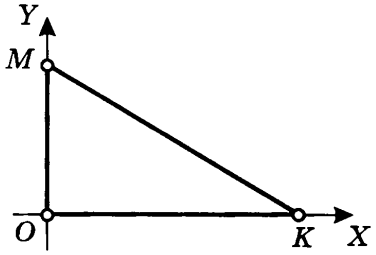
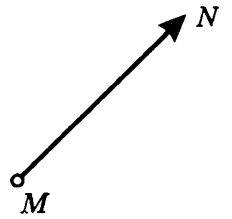
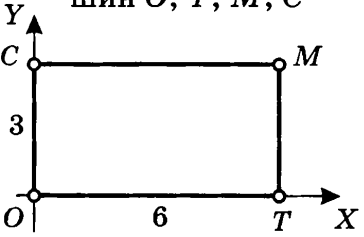
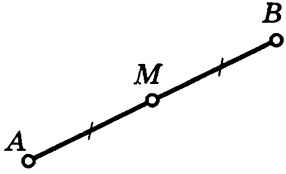
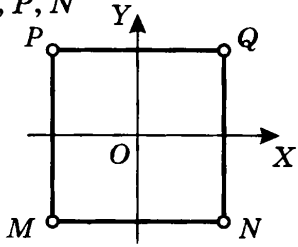
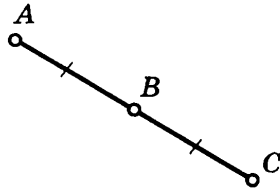
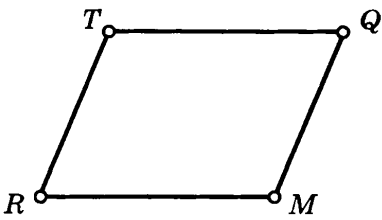
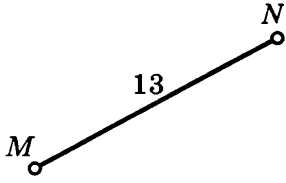
КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

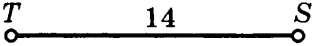
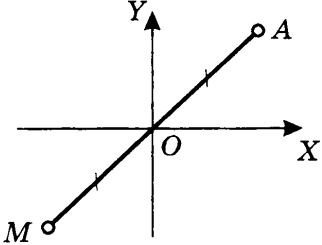
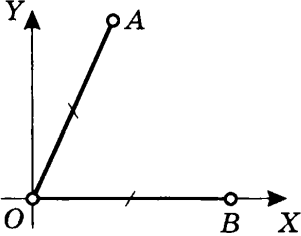
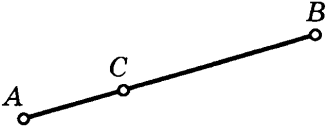
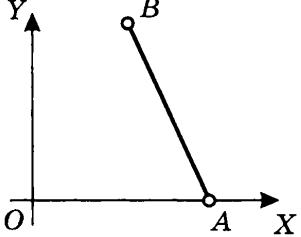
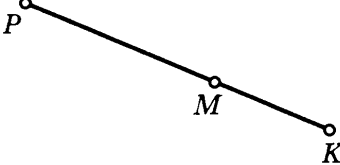
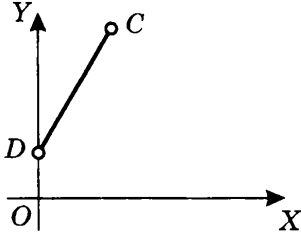
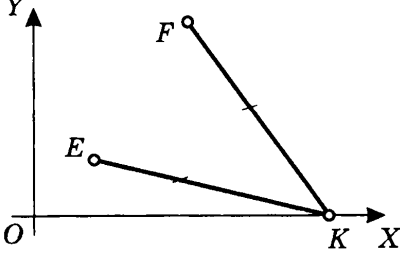
Таблица 1

1  $MNKL$ — параллелограмм Выразите векторы $\overrightarrow{LN}$ и $\overrightarrow{KM}$ через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$	4  $TMNS$ — параллелограмм Выразите векторы $\overrightarrow{TM}$ и $\overrightarrow{ST}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$
2  $ABCD$ — параллелограмм Выразите векторы $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{CA}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$	5  $MKEF$ — параллелограмм $FT : TK = 3 : 1$ Разложите вектор $\overrightarrow{FT}$ по векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$
3  $FKME$ — прямоугольник Выразите векторы $\overrightarrow{EK}$ и $\overrightarrow{FM}$ через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$	6  $FENM$ — параллелограмм Найдите (если это возможно) такое число k, чтобы выполнялось равенство: а) $\overrightarrow{FN} = k \cdot \overrightarrow{FO}$; е) $\overrightarrow{FA} = k \cdot \overrightarrow{NF}$; б) $\overrightarrow{MO} = k \cdot \overrightarrow{ME}$; ж) $\overrightarrow{AN} = k \cdot \overrightarrow{FA}$; в) $\overrightarrow{ON} = k \cdot \overrightarrow{NF}$; з) $\overrightarrow{FN} = k \cdot \overrightarrow{NA}$; г) $\overrightarrow{FM} = k \cdot \overrightarrow{NE}$; и) $\overrightarrow{NE} = k \cdot \overrightarrow{EF}$; д) $\overrightarrow{MN} = k \cdot \overrightarrow{EF}$; к) $\overrightarrow{FO} = k \cdot \overrightarrow{ME}$

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ В КООРДИНАТАХ

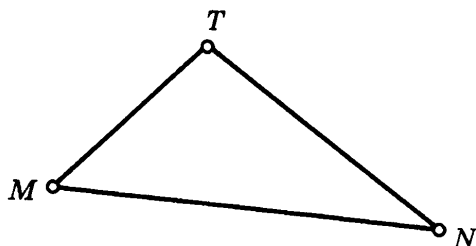
Таблица 2

1 Дано: $OK = 3$, $OM = 2$ Найдите координаты вершин $\triangle MOK$ 	5 Дано: $M(3; 5)$, $N(-2; 4)$ Найдите координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ 
2 Дано: $TOSM$ — прямоугольник Найдите координаты вершин O, T, M, C 	6 Дано: $A(2; 6)$, $B(6; 2)$ Найдите координаты точки M 
3 Дано: $MQPN$ — квадрат $M(-2; -2)$ Найдите координаты вершин Q, P, N 	7 Дано: $A(2; 4)$, $B(0; 18)$ Найдите координаты точки C 
4 Дано: $TQMR$ — параллелограмм $R(0; 0)$, $M(10; 0)$, $Q(24; 6)$ Найдите координату вершины T 	8 Дано: $M(4; 6)$, $N(x; 1)$ Найдите: x 

9	Дано: $S(2x; -2)$, $T(6; 4x)$ Найдите: x 	13 Дано: $A(3; 3)$ Найдите координаты точки M 
10	Дано: $A(1; 2)$, $B(x; 0)$ Найдите: x 	14 Дано: $A(1; 2)$, $B(7; 10)$ $AC : CB = 1 : 3$ Найдите координаты точки C 
11	Дано: $A(3; 0)$, $B(2; 5)$ Найдите: AB 	15 Дано: $P(6; 3)$, $M(14; 9)$ $PM : MK = 2 : 1$ Найдите координаты точки K 
12	Дано: $C(1; 4)$, $D(0; 3)$ Найдите: CD 	16 Дано: $E(2; 2)$, $F(6; 10)$, $K(x; 0)$ Найдите: x 

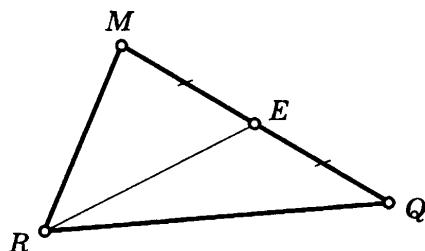
17

Дано: $\triangle MTN$
 $M(8; 0)$, $N(6; -1)$, $T(3; -4)$
 Найдите: $P_{\triangle MTN}$



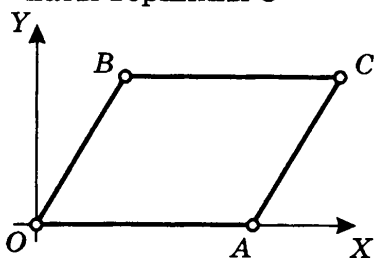
19

Дано: $\triangle MQR$
 $M(6; 3)$, $Q(0; 2)$, $R(1; -5)$
 Найдите: RE



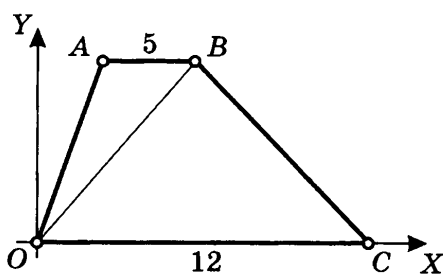
18

Дано: $OBCA$ — параллелограмм
 $B(3; 2)$, $OA = 6$
 Найдите: AC , OC и координаты вершины C



20

Дано: $OABC$ — трапеция
 $AB = 5$, $OC = 12$, $A(2; 4)$
 Найдите: BC , OB

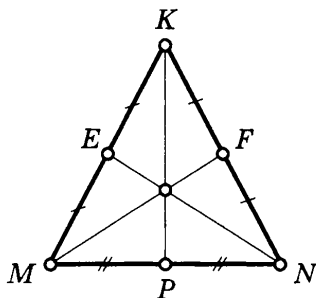


ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КООРДИНАТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Таблица 3

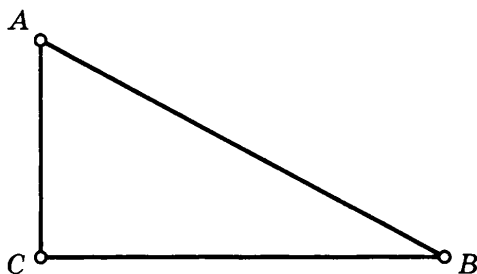
1

Дано: $\triangle MKN$
 $KP = 80$, $MN = 40$
 Найдите: MF и NE



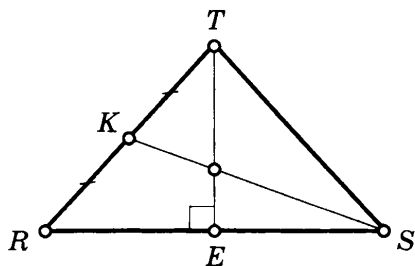
4

Дано: $\triangle ABC$
 $B(0; 0)$, $C(6; 2\sqrt{3})$, $A(4; 4\sqrt{3})$
 Найдите: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$



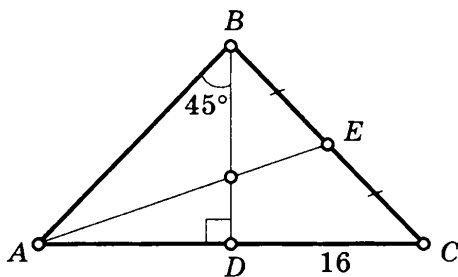
2

Дано: $\triangle TRS$
 $RT = TS$
 $TE = 8$, $RS = 24$
 Найдите: SK



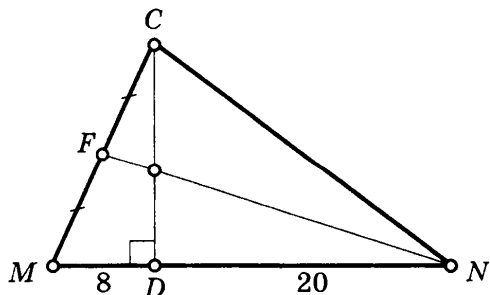
5

Дано: $\triangle ABC$
 $BD = 12$
 Найдите: AE



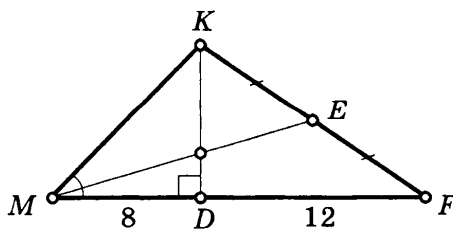
3

Дано: $\triangle MCN$
 $CD = 20$
 Найдите: NF



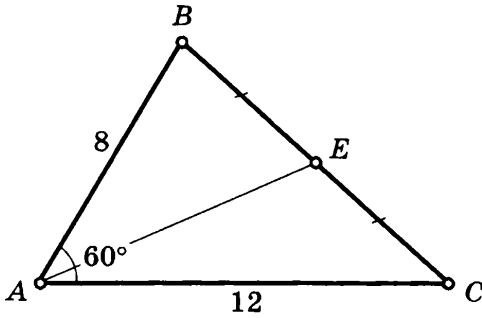
6

Дано: $\triangle MKF$
 $\angle KMF = 45^\circ$
 Найдите: ME



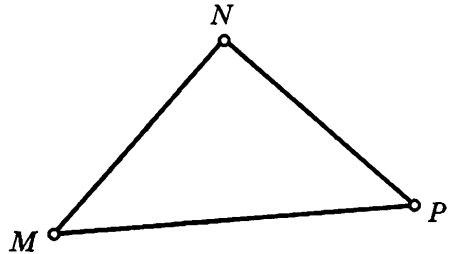
7

Дано: $\triangle ABC$
Найдите: AE



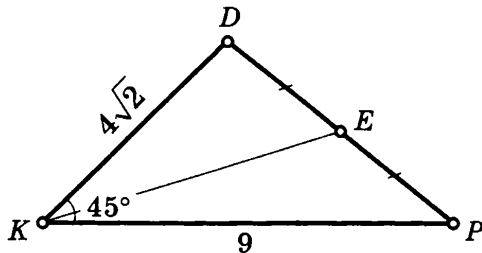
8

Дано: $\triangle MNP$
 $M(4; 8), N(8; 2), P(14; 6)$
Найдите: $\angle M, \angle N, \angle P$



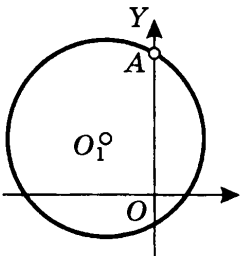
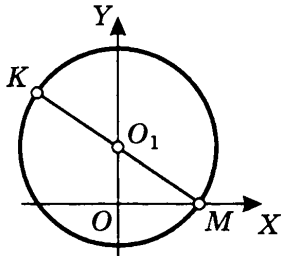
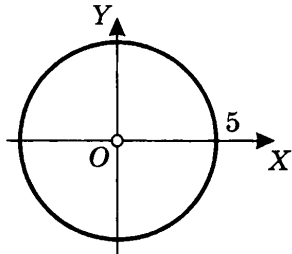
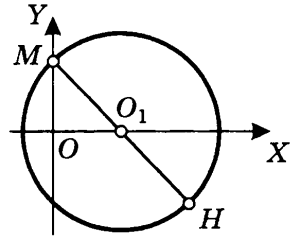
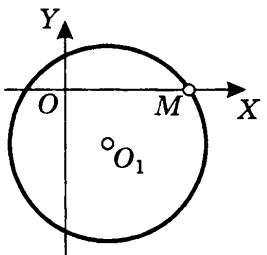
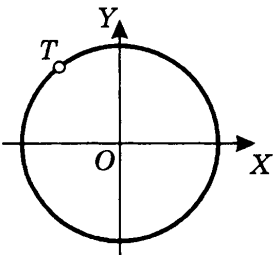
9

Дано: $\triangle KDP$
Найдите: KE

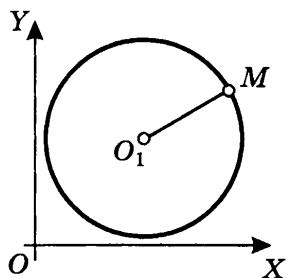


УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

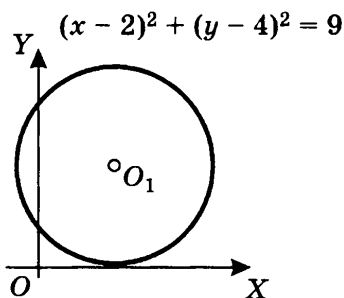
Таблица 4

1 Дано: $O_1 (-4; 2)$, $A (0; 5)$ Составьте уравнение окружности 	4 Дано: $K (-2; 6)$, $M (2; 0)$ Составьте уравнение окружности 
2 Какие из точек $A (0; 4)$, $B (5; 0)$, $C (3; -4)$, $D (4; -3)$ принадлежат окружности? 	5 Дано: $M (0; 2)$, $H (6; -2)$ Составьте уравнение окружности 
3 Дано: $O_1 (2; -4)$, $M (5; 0)$ Составьте уравнение окружности 	6 Дано: $T (-2; 3)$ Составьте уравнение окружности 

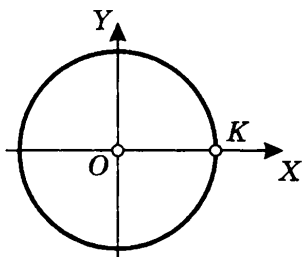
- 7** Дано: $O_1(4; 5)$, $O_1M = 3$
Составьте уравнение окружности



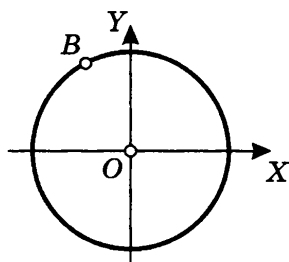
- 10** На окружности найдите точки:
а) с абсциссой $x = 2$;
б) с ординатой $y = 4$



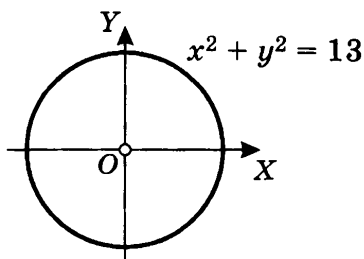
- 8** Дано: $OK = 5$, $A(4; -3)$,
 $B(3; 4)$
Докажите, что AB — хорда окружности



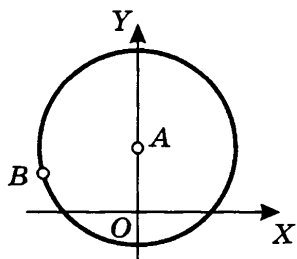
- 11** Дано: $B(-2; 6)$
Составьте уравнение окружности, проходящей через точку B



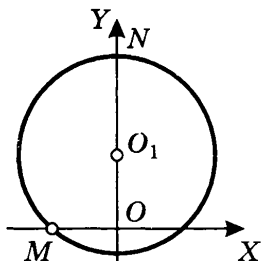
- 9** Найдите точки:
а) с абсциссой $x = 2$;
б) с ординатой $y = 3$



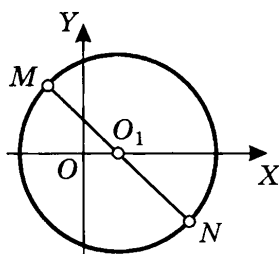
- 12** Дано: $A(0; 2)$, $B(-3; 1)$
Составьте уравнение окружности, проходящей через точку B



- 13** Дано: $M(-3; 0)$, $N(0; 9)$, $O_1(0; y_0)$
Составьте уравнение окружности, проходящей через точки M и N



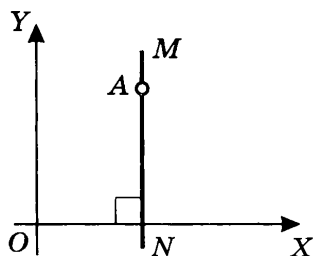
- 14** Дано: $M(-2; 3)$, $N(4; -3)$, MN — диаметр
Составьте уравнение окружности, проходящей через точки M и N



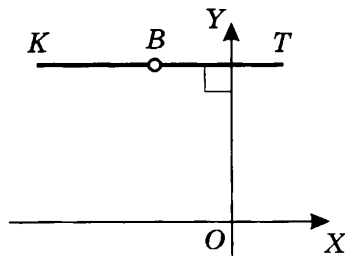
УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Таблица 5

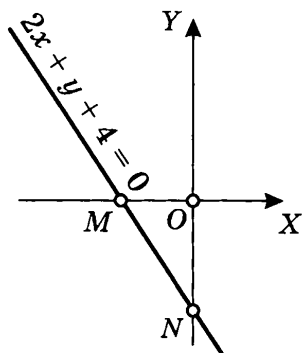
- 1** Дано: $A(3; 9)$
Составьте уравнение прямой MN



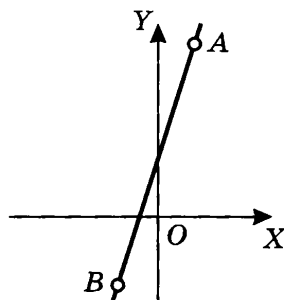
- 2** Дано: $B(-3; 10)$
Составьте уравнение прямой KT



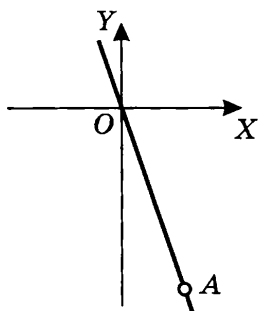
3 Найдите: $S_{\Delta MON}$



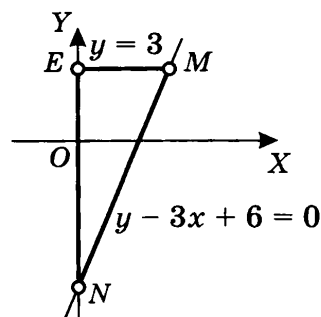
6 Дано: $A(1; 10)$, $B(-1; -4)$
Составьте уравнение прямой AB



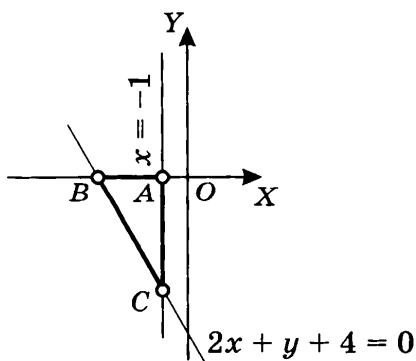
4 Дано: $A(2; -10)$
Составьте уравнение прямой, проходящей через точки O и A



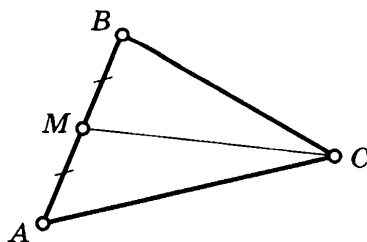
7 Найдите: $S_{\Delta MEN}$



5 Найдите: $S_{\Delta BAC}$

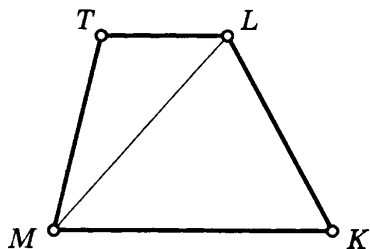


8 Дано: ΔABC
 $A(8; 12)$, $B(-8; 0)$, $C(-2; -8)$
Составьте уравнение медианы CM



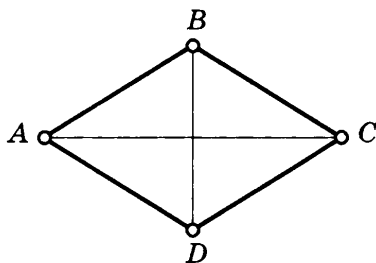
9

Дано: $MTLK$ — трапеция
 $M(-4; -4)$, $T(-6; 2)$,
 $L(14; 14)$, $K(6; 2)$
 Составьте уравнение диагонали ML



10

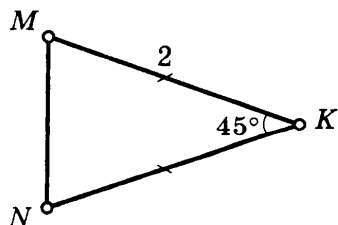
Дано: $ABCD$ — ромб
 $AC = 20$, $BD = 8$
 Составьте уравнение прямых, содержащих стороны ромба



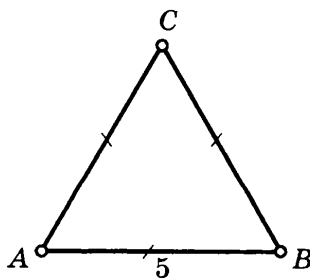
РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Таблица 6

1

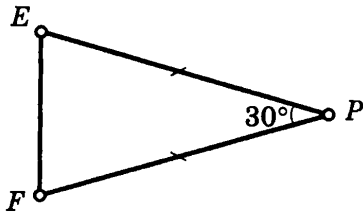
Найдите: $S_{\triangle MNK}$ 

2

Найдите: $S_{\triangle ABC}$ 

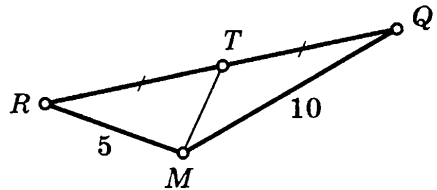
3

Дано: $S_{\triangle EPF} = 20$
Найдите: EP



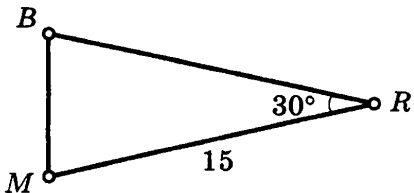
6

Дано: $\angle RMQ = 135^\circ$
Найдите: $S_{\triangle TMQ}$



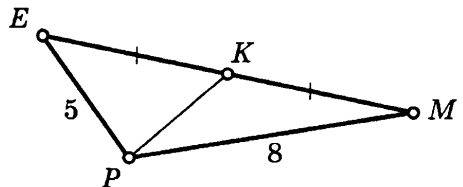
4

Дано: $S_{\triangle MBR} = 90$
Найдите: BR



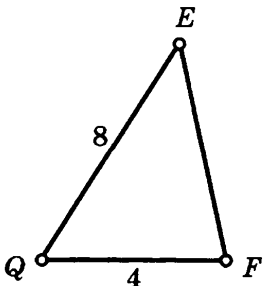
7

Дано: $\angle EPM = 120^\circ$
Найдите: $S_{\triangle EKP}$



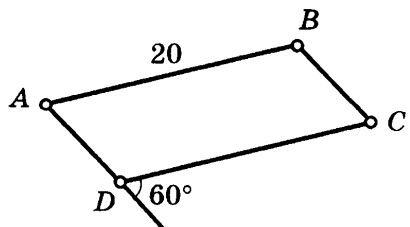
5

Дано: $S_{\triangle EFQ} = 8\sqrt{3}$
Найдите: $\angle EQF$

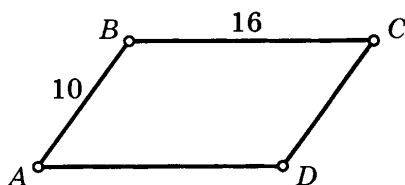
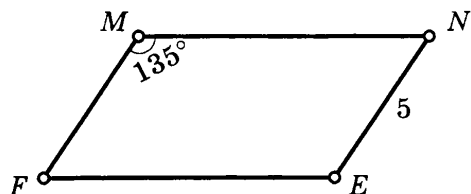


8

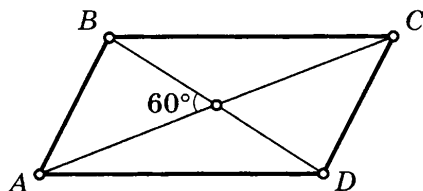
Дано: $ABCD$ — параллелограмм
 $S_{ABCD} = 50\sqrt{3}$
Найдите: P_{ABCD}



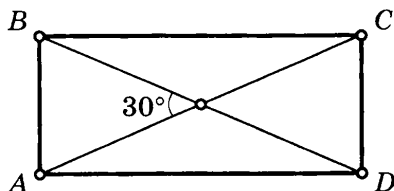
- 9** Дано: $MNEF$ — параллелограмм
 $S_{MNEF} = 25\sqrt{2}$
Найдите: P_{MNEF}
- 12** Дано: $ABCD$ — параллелограмм
 $\cos \angle B = -0,6$
Найдите: S_{ABCD}



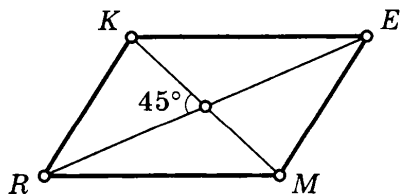
- 10** Дано: $ABCD$ — параллелограмм
 $BD = 16$, $AC = 20$
Найдите: S_{ABCD}



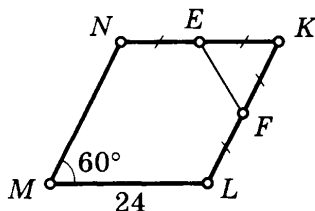
- 13** Дано: $ABCD$ — прямоугольник
 $AC = 26$
Найдите: S_{ABCD}



- 11** Дано: $KEMR$ — параллелограмм
 $KM = 12$, $RE = 20$
Найдите: S_{KEMR}

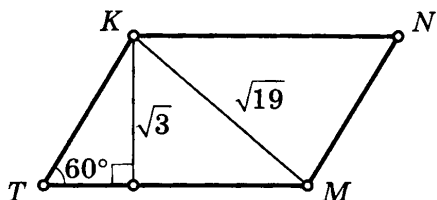


- 14** Дано: $MNKL$ — параллелограмм
Найдите: $S_{\triangle EKF}$ — ?



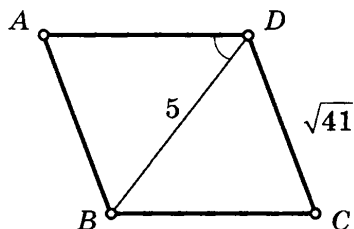
15

Дано: $TKNM$ — параллелограмм
Найдите: S_{TKNM}



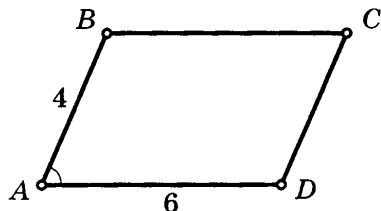
17

Дано: $ABCD$ — параллелограмм
 $\sin \angle ADB = 4/5$
Найдите: S_{ABCD}



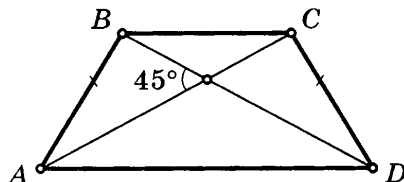
16

Дано: $ABCD$ — параллелограмм
 $\cos \angle A = 1/3$
Найдите: S_{ABCD}



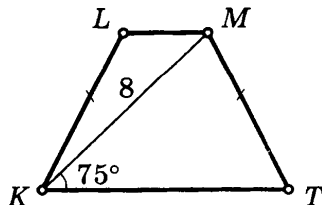
18

Дано: $ABCD$ — трапеция
 $AC = 8$
Найдите: S_{ABCD}



19

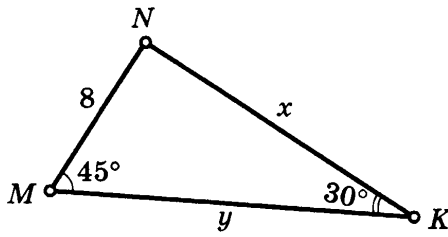
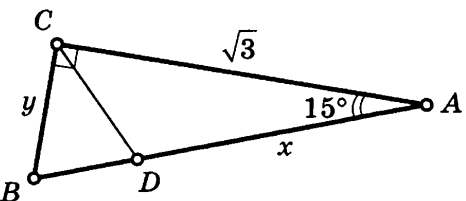
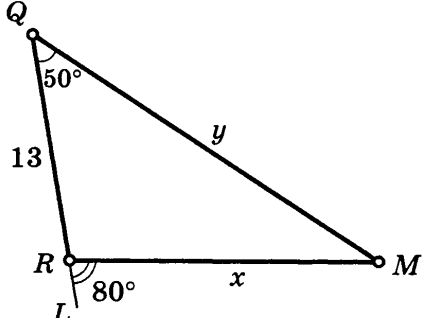
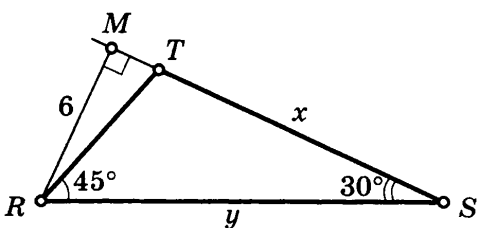
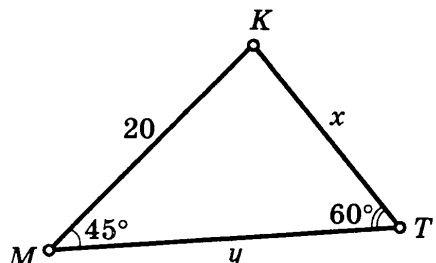
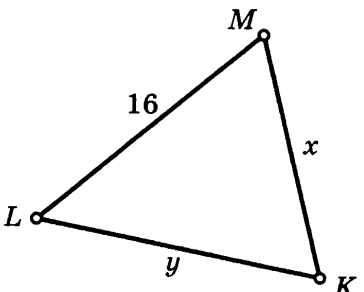
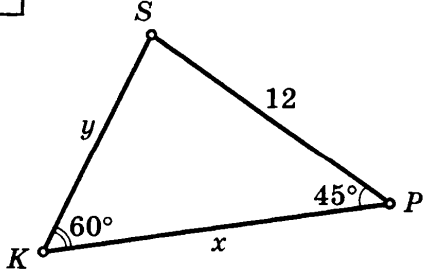
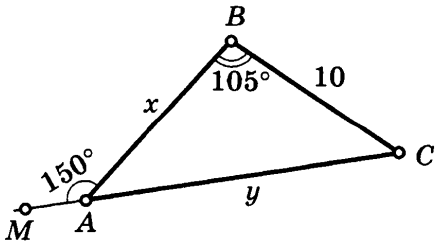
Дано: $KLMT$ — трапеция
Найдите: S_{KLMT}



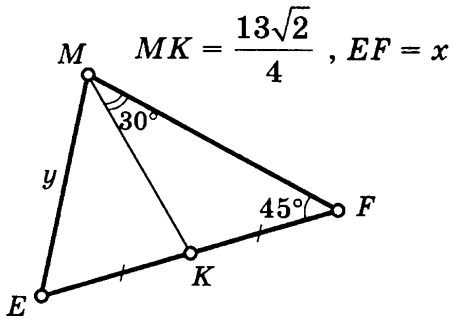
РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Таблица 7

Найдите x , y .

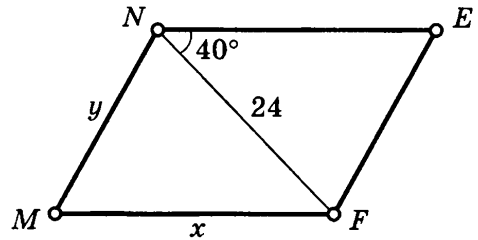
1 	5 CD — биссектриса 
2 	6 
3 	7 $\angle K : \angle L : \angle M = 4 : 2 : 3$ 
4 	8 

9

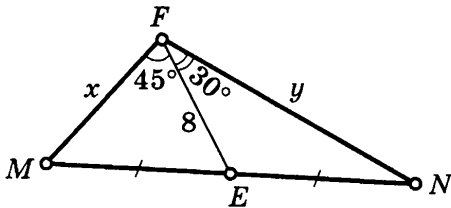


13

$MNEF$ — параллелограмм
 $\angle MFE = 120^\circ$

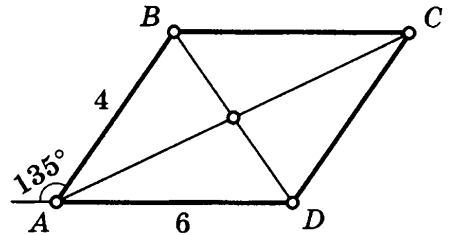


10

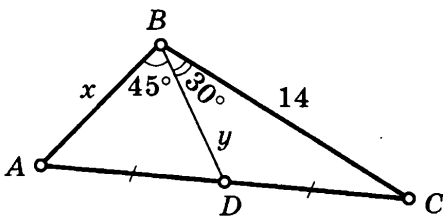


14

$ABCD$ — параллелограмм
 $BD = x$, $AC = y$

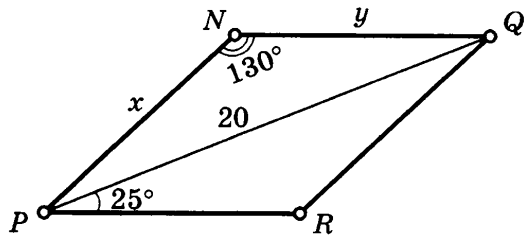


11



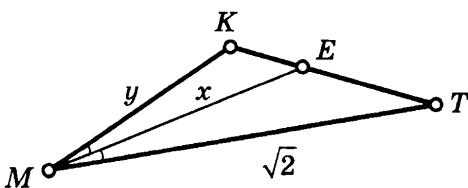
15

$PNQR$ — параллелограмм
 $PQ = 20$



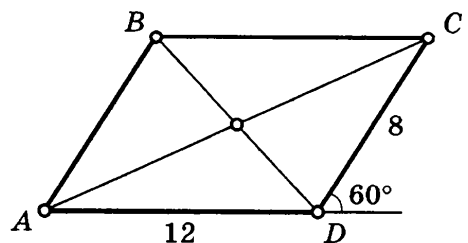
12

ME — биссектриса
 $\angle M = 30^\circ$
 $MK = KT = y$



16

$ABCD$ — параллелограмм
 $AC = x$, $BD = y$



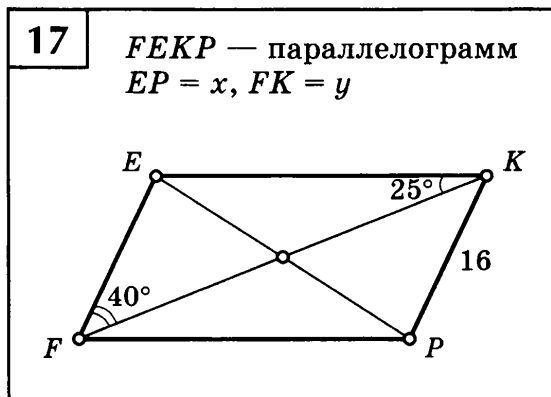
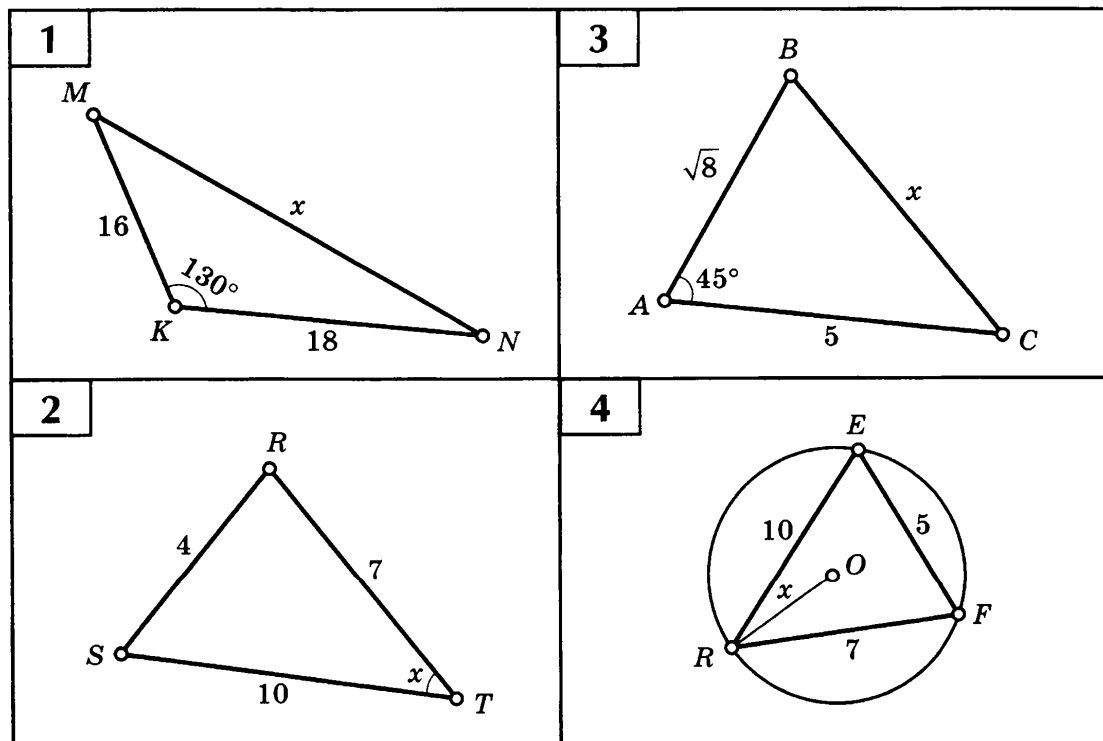
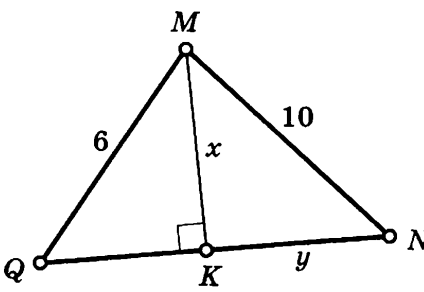
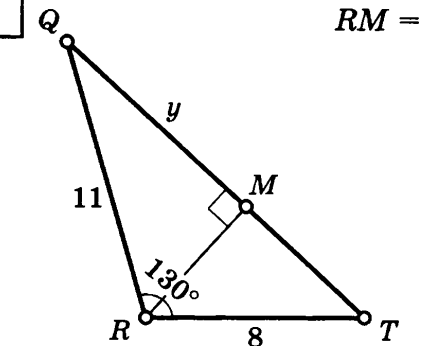
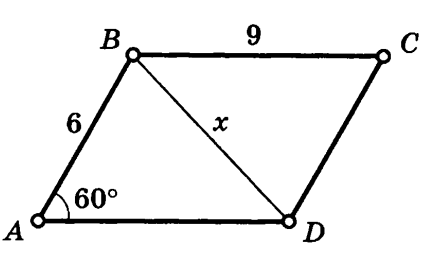
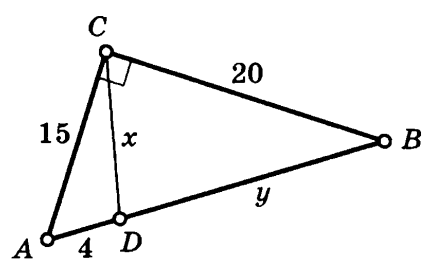
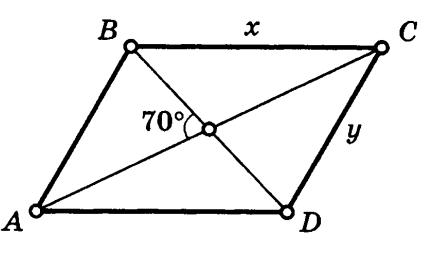
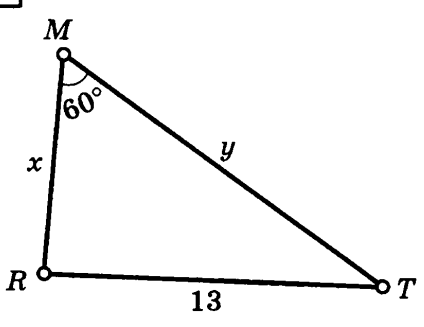
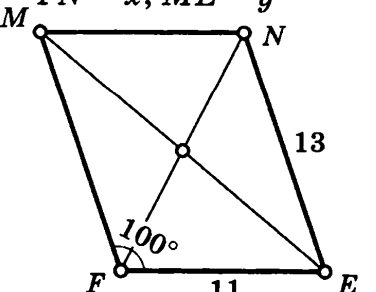
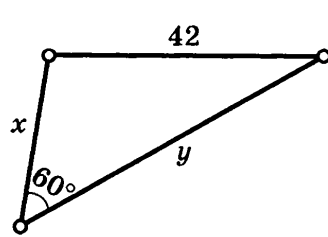
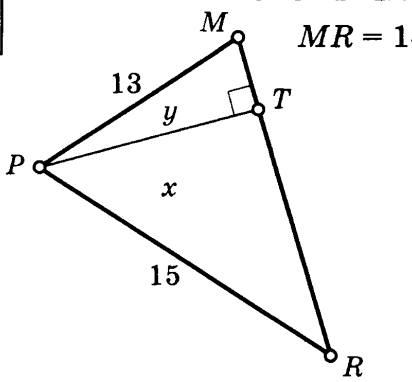
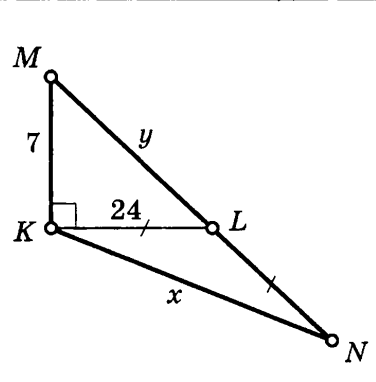
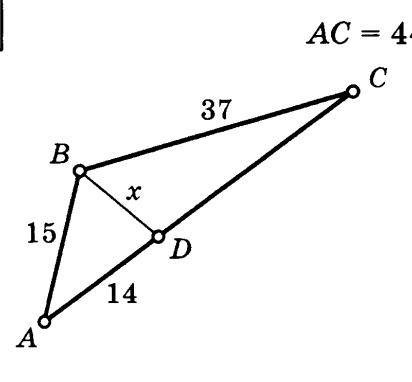
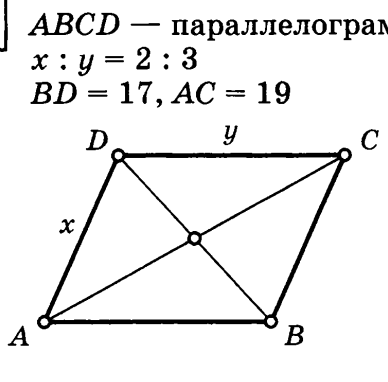
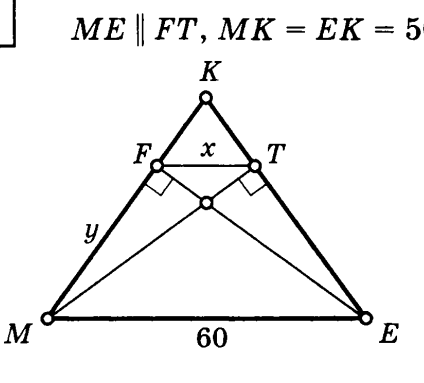
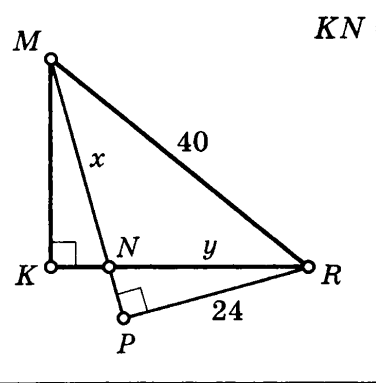
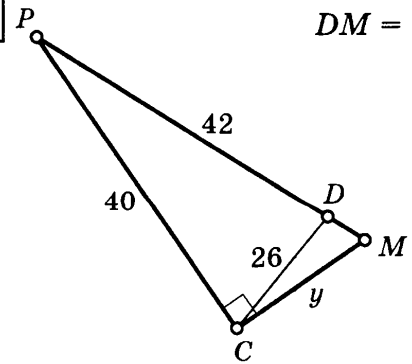
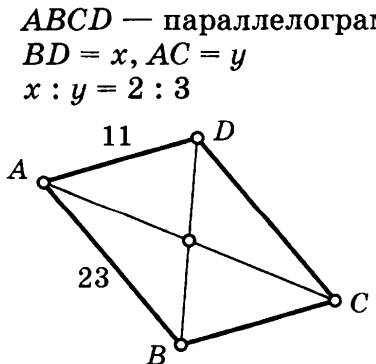

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

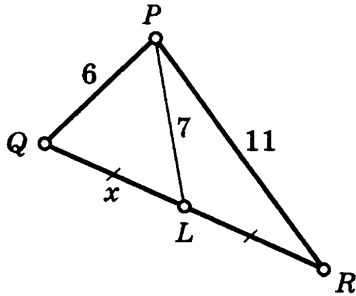
Таблица 8

Найдите x , y .


5 $QN = 12$ 	9 $RM = x$ 
6 $ABCD$ — параллелограмм 	10 
7 $ABCD$ — параллелограмм $AC = 8$, $BD = 6$ 	11 
8 $MNEF$ — параллелограмм $FN = x$, $ME = y$ 	12 $x : y = 3 : 8$ 

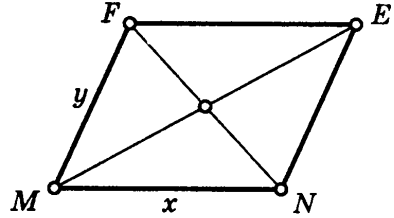
13 	17 
14 	18 $ABCD$ — параллелограмм $x : y = 2 : 3$ $BD = 17, AC = 19$ 
15 $ME \parallel FT, MK = EK = 50$ 	19 $KN = 7$ 
16 $DM = x$ 	20 $ABCD$ — параллелограмм $BD = x, AC = y$ $x : y = 2 : 3$ 

21

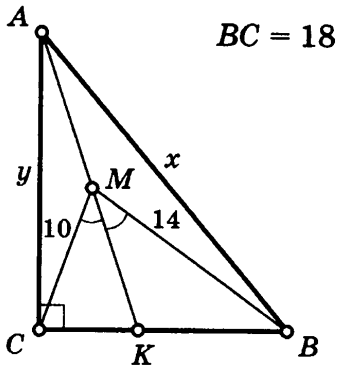


23

$MFEN$ — параллелограмм
 $ME = 14$, $FN = 12$
 $x - y = 4$

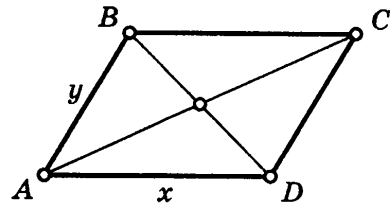


22



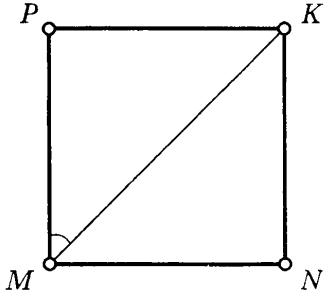
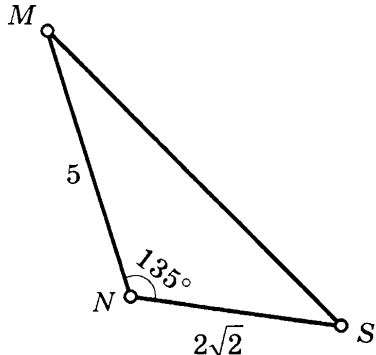
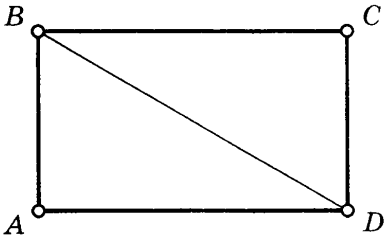
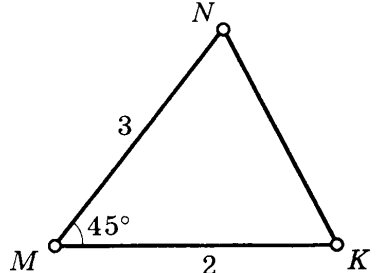
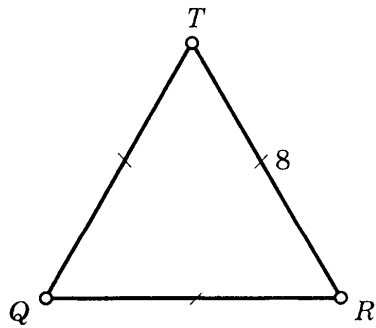
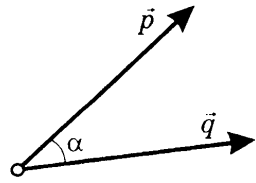
24

$ABCD$ — параллелограмм
 $AD = BD = x$, $AB = y$
 $x - y = 11$, $AC - BD = 2$



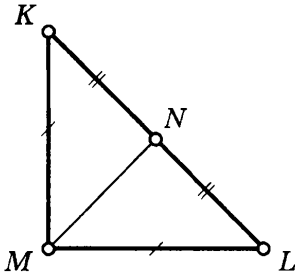
СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Таблица 9

1 $MNKP$ — квадрат Найдите: $\widehat{MP, MK}$ 	4 Найдите: $\vec{NM} \cdot \vec{NS}$ 
2 $ABCD$ — прямоугольник $\vec{BA} = 6$, $\vec{BC} = 8$ Найдите: $\vec{BD}$ 	5 Найдите: $\vec{MN} \cdot \vec{MK}$ 
3 Найдите: $\vec{QR} \cdot \vec{RT}$ 	6 $\vec{p} \{3; -4\}$, $\vec{q} \{15; 8\}$ Найдите: $\cos \alpha$ 

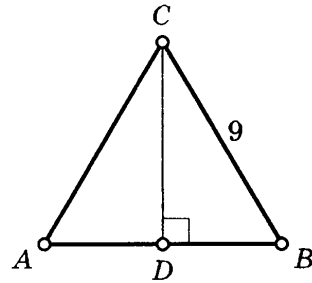
7

$\angle KML = 90^\circ$, $KL = 2\sqrt{2}$
Найдите: $\overline{MN} \cdot \overline{KL}$



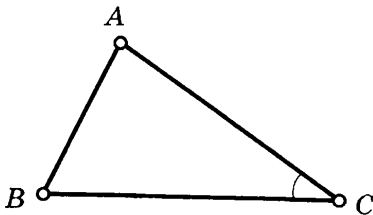
10

$\triangle ABC$
 $AB = AC = BC$
Найдите: $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$



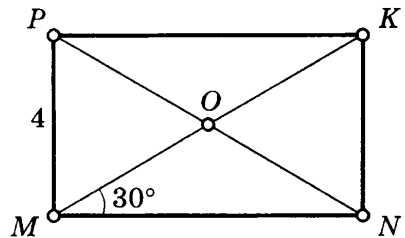
8

$A(-4; 8)$, $B(2; 14)$, $C(4; 0)$
Найдите: $\cos \angle C$



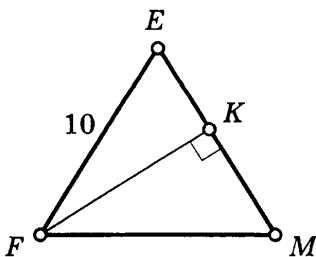
11

$MNKP$ — прямоугольник
Найдите: $\overline{OP} \cdot \overline{OM}$



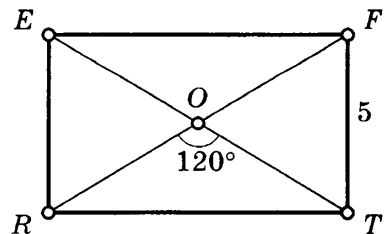
9

$\triangle FEM$
 $FE = EM = FM$
Найдите: $\overline{EF} \cdot \overline{EM}$



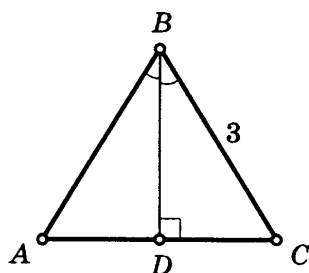
12

$REFT$ — прямоугольник
Найдите: $\overline{OF} \cdot \overline{FT}$



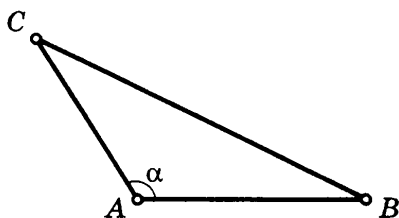
13

$\triangle ABC$ — равносторонний
Найдите: $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$



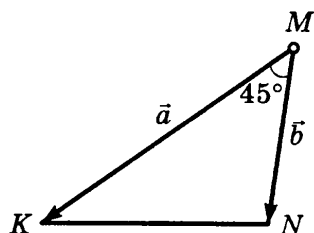
16

$A(2; 4), B(2; 8), C(6; 4)$
Найдите: $\angle CAB$



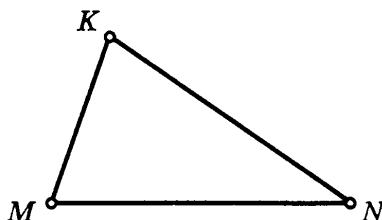
14

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$
Найдите: $S_{\triangle MKN}$



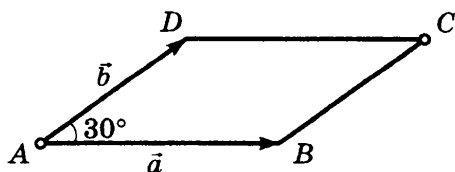
17

$M(-1; \sqrt{3}), N(1; -\sqrt{3})$
 $K(0,5; \sqrt{3})$
Найдите: $\angle M$



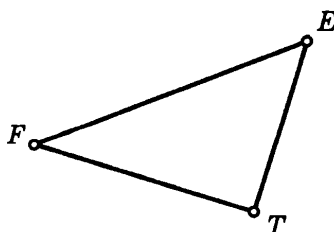
15

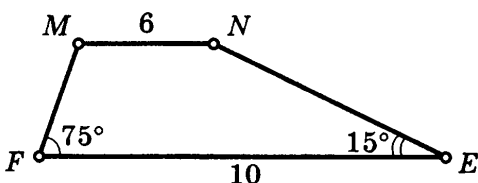
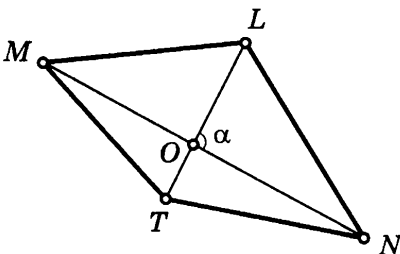
$ABCD$ — параллелограмм
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}$
Найдите: S_{ABCD}



18

$E(-1; 5), F(2; 8), T(3; 1)$
Найдите: $\cos \angle E$

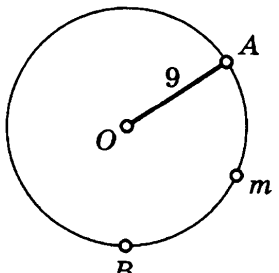
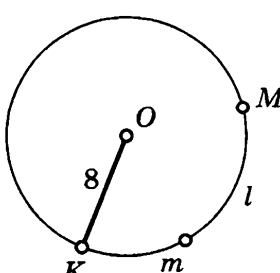


19 $FMNE$ — трапеция Найдите: $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{NM}$ 	20 $T(3; 3), L(4,5; 5,5)$ $M(1; 5), N(6; 2)$ Найдите: $\angle LON$ 
--	--

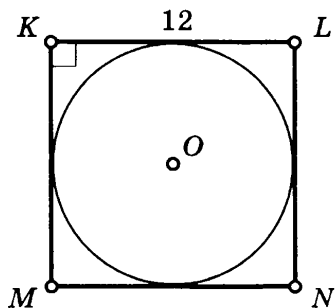
ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ. ДЛИНА ДУГИ

Таблица 10

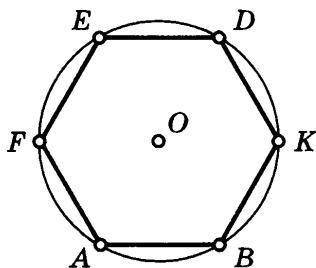
C — длина окружности, l — длина дуги.

1 $\angle AmB = 120^\circ$ Найдите: l 	2 $l = 3\pi$ Найдите: $\angle KtM$ 
---	---

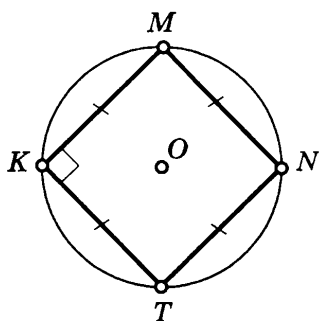
3 Найдите: C



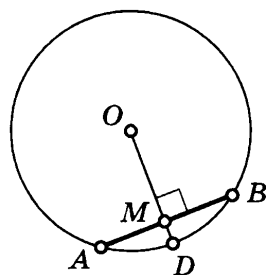
6 $S_{\triangle ABKDEF} = 72\sqrt{3}$
Найдите: C



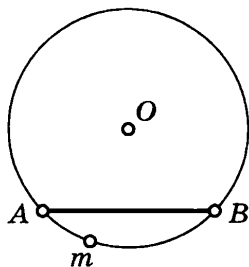
4 $C = 4\pi$
Найдите: S_{KMNT}



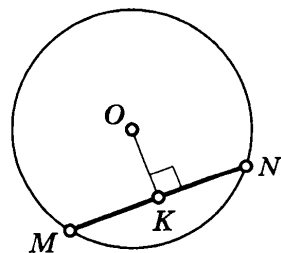
7 $OM = 12, AB = 10$
Найдите: C



5 $\angle AmB = 120^\circ, C = 8\pi\sqrt{3}$
Найдите: AB



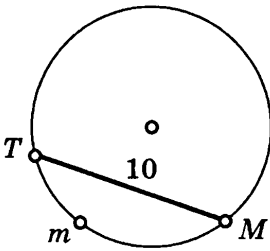
8 $MN = 48, OK = 10$
Найдите: C



9

$$\angle TmM = 120^\circ$$

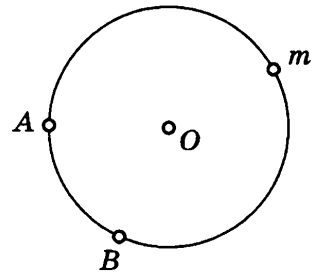
Найдите: l



12

$$\angle AmB - \angle BA = 90^\circ$$

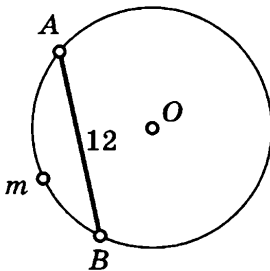
Найдите: $\angle AmB$, $\angle BA$



10

$$C = 24\pi$$

Найдите: $\angle AmB$

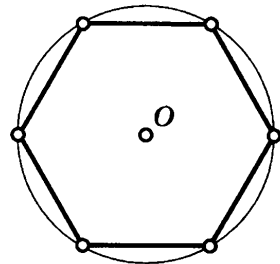


13

P — периметр

$$C - P = 7$$

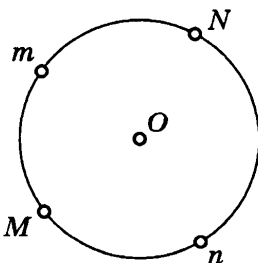
Найдите: C



11

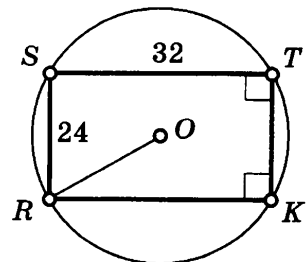
$$\angle MmN : \angle NnM = 2 : 3$$

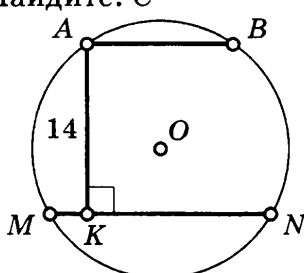
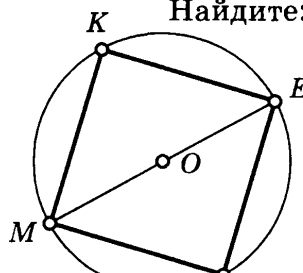
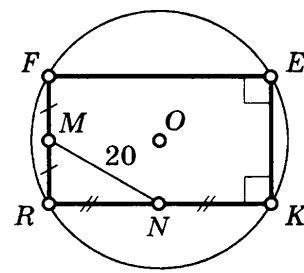
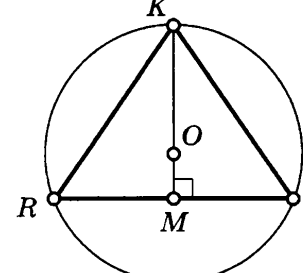
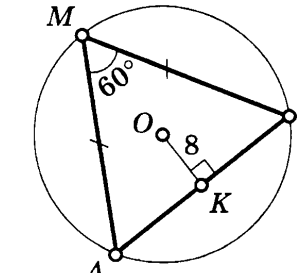
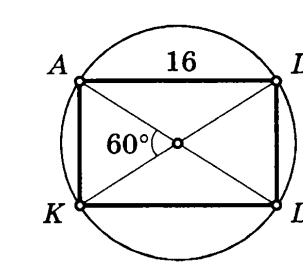
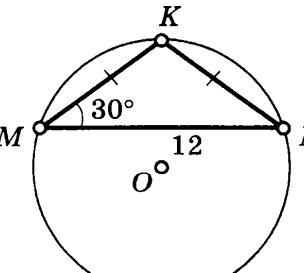
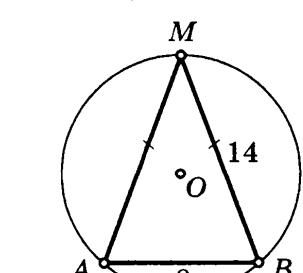
Найдите: $\angle MmN$, $\angle NnM$



14

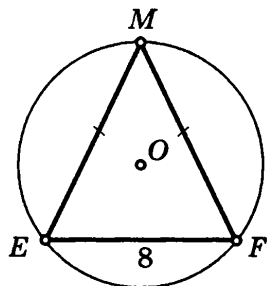
Найдите: C



15 $AB \parallel MN$, $MN = 16$, $AB = 12$ Найдите: C 	19 $ME = 7\sqrt{5}$ Найдите: C 
16 Найдите: C 	20 $KM = 6$, $RT = 14$ Найдите: C 
17 Найдите: C 	21 Найдите: C 
18 Найдите: C 	22 Найдите: C 

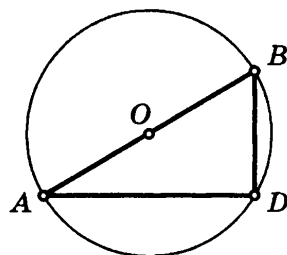
23

Найдите: C



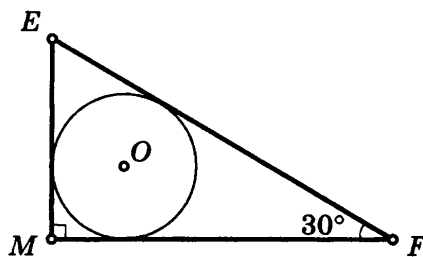
25

$BD = 12, AD = 16$
Найдите: C



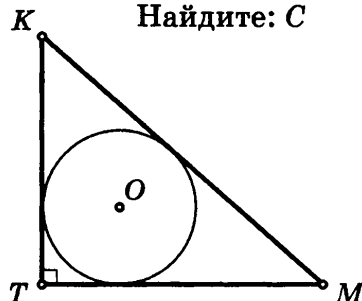
24

$EF = 16$
Найдите: C



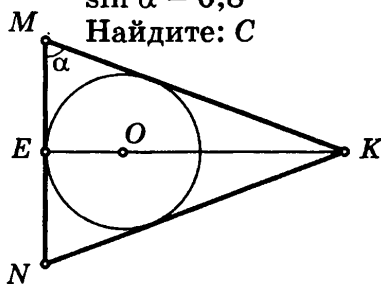
26

$KM = 6, KT = TM$
Найдите: C



27

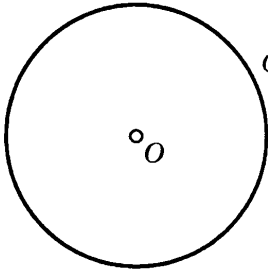
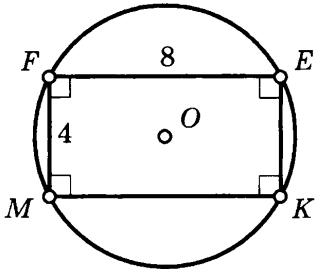
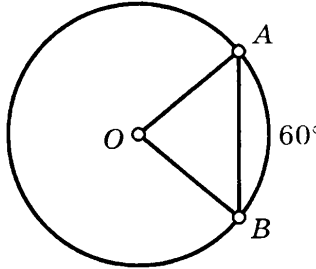
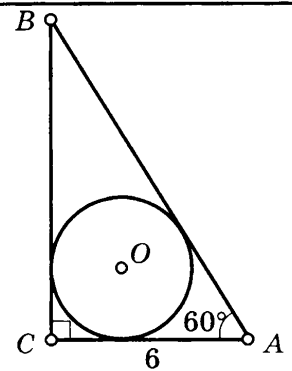
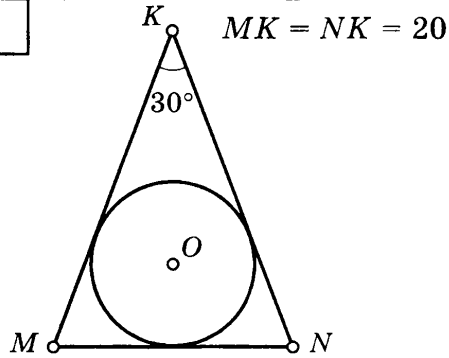
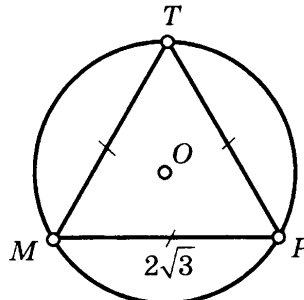
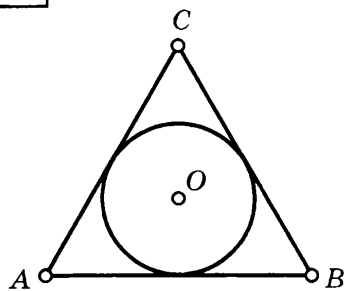
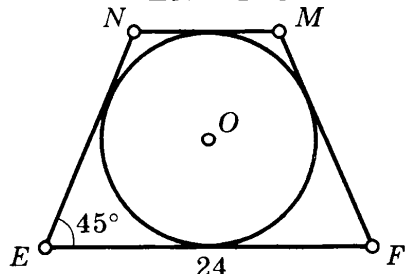
$KE = 20, KM = KN = 25$
 $\sin \alpha = 0,8$
Найдите: C



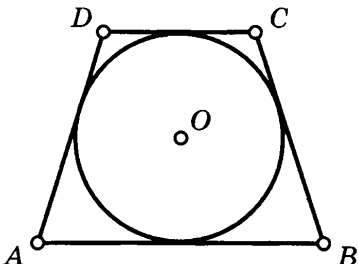
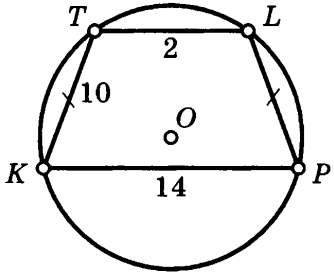
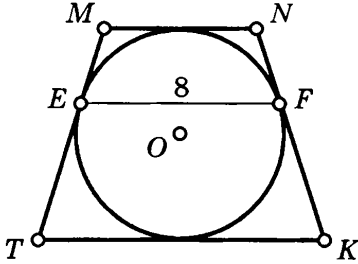
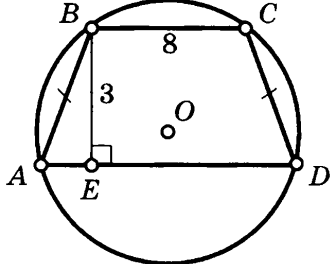
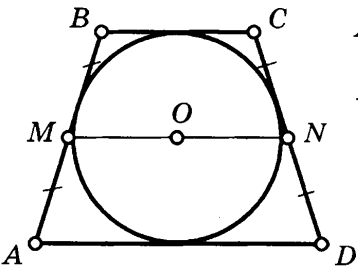
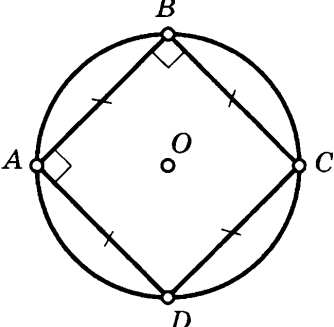
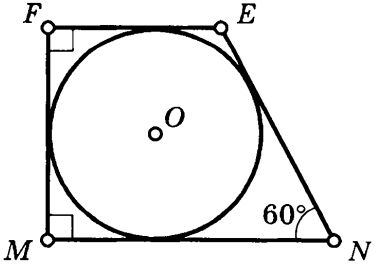
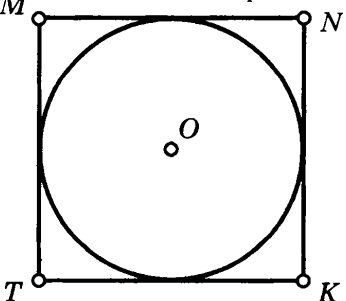
ПЛОЩАДЬ КРУГА

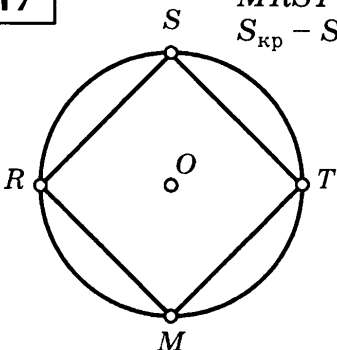
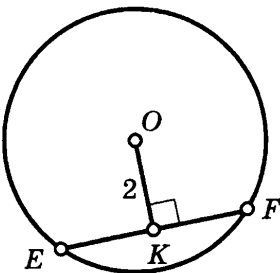
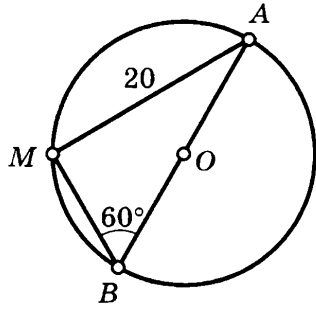
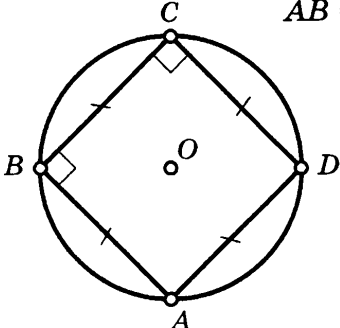
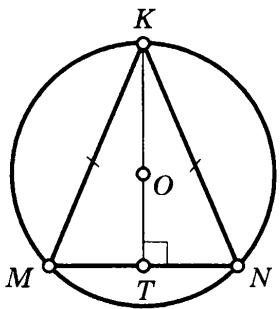
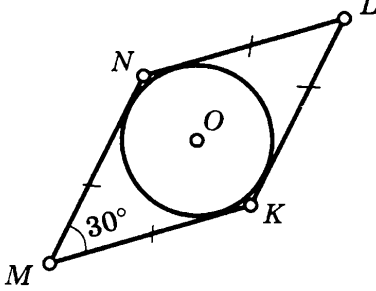
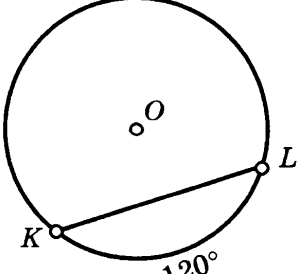
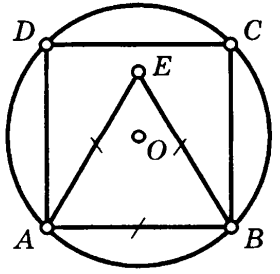
Таблица 11

C — длина окружности, l — длина дуги. Найдите $S_{кр}$.

1 $C = 4\sqrt{\pi}$ 	5 
2 $AB = 8$ 	6 
3 $MK = NK = 20$ 	7 
4 $AB = BC = AC = 12$ 	8 $ENMF$ — трапеция $EN = FM$ 

Продолжение табл. 11

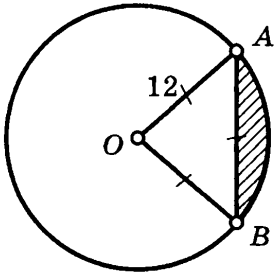
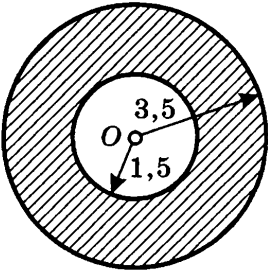
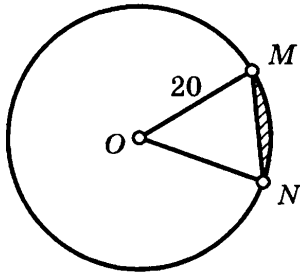
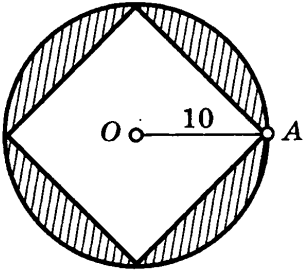
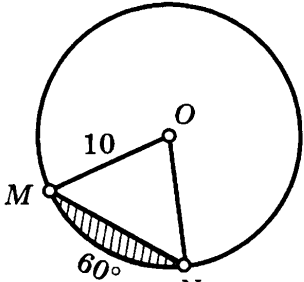
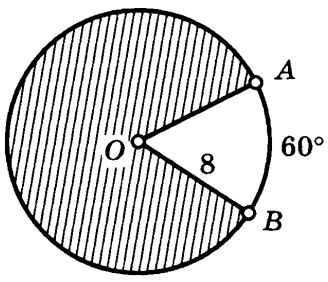
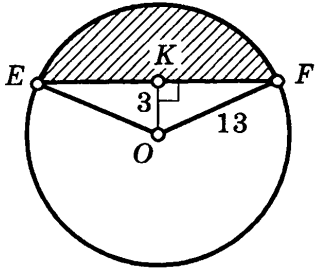
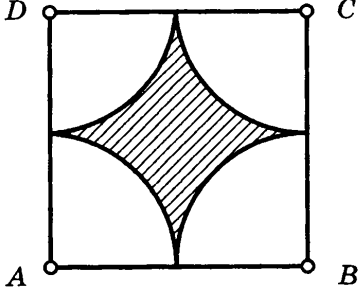
9 $ABCD$ — трапеция $AD = BC = 6, S = 12$ 	13 $KTLP$ — трапеция 
10 $TMNK$ — трапеция $TM = KN, S_{TMNK} = 125$ 	14 $ABCD$ — трапеция $AD = 10$ 
11 $ABCD$ — трапеция $AB = CD,$ $AD = 2 BC,$ $MN = \frac{3}{\sqrt{2}}$ 	15 $S_{ABCD} = 121$ 
12 $S_{MFEN} = 2 + \frac{4}{\sqrt{3}}$ 	16 $MNKT$ — квадрат $S_{\text{кв}} - S_{\text{кр}} = 86$ 

17 $MRST$ — квадрат $S_{кр} - S_{кв} = 456$ 	21 $EF = 3$ 
18 	22 $AB = \frac{4}{\sqrt{\pi}}$ 
19 $MN = 14, KT = 24$ 	23 $S_{MKLN} = 40$ 
20 $KL = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ 	24 $ABCD$ — квадрат $S_{\triangle ABE} = 16\sqrt{3}$ 

ПЛОЩАДЬ КРУГА

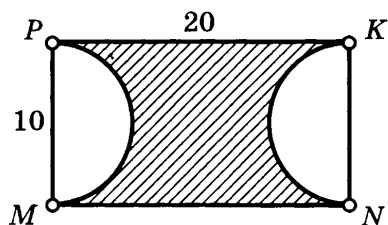
Таблица 12

Найдите площадь заштрихованной фигуры.

1 	5 
2 $MN = 12$ 	6 
3 	7 
4 	8 $ABCD$ — квадрат, $AB = 8$ 

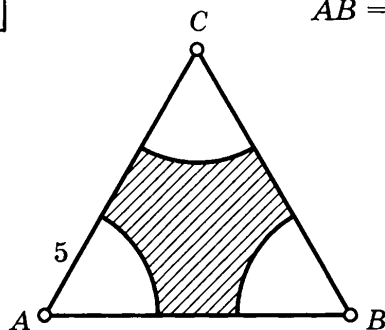
9

$$\angle MP = \angle NK = 180^\circ$$

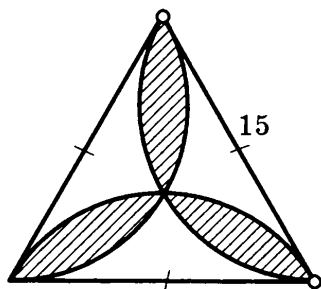


11

$$AB = 16$$

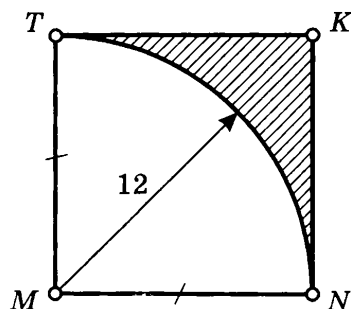


10



12

$MNKT$ — квадрат



Раздел III

РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ

.....

VII класс

К таблице 1

8. Пусть $\angle POS = \angle SOT = x$, $\angle TOQ = \angle QOR = y$. Так как $\angle POR = 180^\circ$, то $x + x + y + y = 180$, или $x + y = 90$. Значит, $\angle SOQ = x + y = 90^\circ$.

Ответ: 90° .

11. $\angle MSK + \angle PSN = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Так как $\angle MSP = \angle NSK$ (по условию), то $\angle MSK = \angle PSN = 90^\circ : 2 = 45^\circ$, тогда $\angle MSP = \angle MSK + \angle KSP = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$.

Ответ: 135° .

К таблице 2

5. Пусть $\angle 1 = \angle 3 = x$, $\angle 2 = \angle 4 = y$ (по свойству вертикальных углов), тогда получим $2 \cdot (x + x) = y + y$, откуда $y = 2x$; $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (по свойству смежных углов). Значит, $x + y = 180$. Так как $y = 2x$, то $x + 2x = 180$, $3x = 180$, $x = 60$, $y = 120$. Итак, $\angle 1 = \angle 3 = 60^\circ$, $\angle 2 = \angle 4 = 120^\circ$.

Ответ: $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$.

11. Пусть $\angle 2 = \angle 3 = x$, тогда $\angle 1 = 180^\circ - (\angle 2 + \angle 3) = 180 - 2x$. По условию $\angle 1 - \angle 2 = 75^\circ$. Значит, $180 - 2x - x = 75$, откуда $x = 35$, т. е. $\angle 2 = \angle 3 = 35^\circ$, $\angle 1 = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

Ответ: $110^\circ, 35^\circ, 35^\circ$.

К таблице 3

17. Так как $AC = BD$, $BC = AD$ (по условию) и AB — общая сторона, то $\triangle ACB = \triangle ADB$ (по III признаку).

Из равенства этих треугольников следует, что $\angle C = \angle D$ и так как $BC = AD$, $AO = BO$, то $CO = OD$. Кроме того, $\angle AOC = \angle BOD$ (как вертикальные). Значит, $\triangle AOC = \triangle BOD$ (по II признаку).

Замечание. $\triangle ACB = \triangle ADB$ по I признаку, так как $AC = BD$, $\angle CAB = \angle ABD$ и AB — общая сторона.

32. 1) $\triangle DOE = \triangle COF$ (по I признаку), тогда $DE = CF$.

2) $\triangle DEF = \triangle CFE$ (по III признаку), так как EF — общая сторона, $DE = CF$ (по доказанному), $DF = CE$ по условию ($DO = OC$ и $OE = OF$), тогда $\angle DFE = \angle CEF$.

3) $\triangle DAF = \triangle CBE$ (по I признаку), так как $DF = CE$, $AF = BE$ ($AE = BF$ по условию), EF — общая часть) и $\angle DFA = \angle CEB$ (по доказанному), тогда $AD = BC$.

4) $\triangle AED = \triangle BFC$ (по III признаку).

К таблице 4

$$14. P_1 = MK + KS + MS = 12 + 6 + MS = 18 + MS;$$

$$P_2 = MS + SN + MN = MS + 6 + MN.$$

По условию $P_2 - P_1 = 3$, или $MS + 6 + MN - (18 + MS) = 3$,

$$MN - 12 = 3, MN = 15.$$

Ответ: 15.

К таблице 5

17. В $\triangle AMC$ $AM = MC$ (по условию), медиана MN является биссектрисой, тогда $\angle AMC = 50^\circ \cdot 2 = 100^\circ$, $\angle CMB = \angle CBA = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ ($CB = CM$ по условию).

Ответ: 80° .

К таблице 6

33. Так как $\triangle QNR$ — равнобедренный ($QN = QR$) и $\angle NQR = 30^\circ$, тогда $\angle RNQ = \angle NRQ = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$, тогда $\angle KNQ = 30^\circ + 75^\circ = 105^\circ$. Но $\angle NQM = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$ и, так как $\angle KNQ + \angle NQM = 105^\circ + 75^\circ = 180^\circ$, то $KN \parallel MQ$ (по III признаку параллельности прямых).

К таблице 7

13. I способ. $\angle A = \angle 1 + \angle 2 = 60^\circ$, $\angle C = 25^\circ$, тогда $\angle B = 180^\circ - (60^\circ + 25^\circ) = 95^\circ$, значит, $\angle AEB = 180^\circ - (30^\circ + 95^\circ) = 55^\circ$.

II способ. $\angle AEC = 180^\circ - (\angle 2 + \angle C) = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$, тогда $\angle AEB = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$.

Замечание. Задачу можно решить иначе, используя элементы $\triangle ADE$.

Ответ: 55° .

К таблице 8

10. Так как $RO \perp PS$ и $PO = OS$, то $\triangle PRS$ — равнобедренный, тогда $\angle P = \angle RSP$ (по свойству).

Пусть $\angle TSR = 3x$, $\angle RSP = \angle P = 5x$, тогда $\angle TSP = 3x + 5x = 8x$. Так как $\angle T = 115^\circ$, то получим уравнение $115 + 5x + 8x = 180$, откуда $x = 5$, т. е. $\angle P = 5x = 25^\circ$, $\angle TSP = 8x = 40^\circ$.

Ответ: $25^\circ, 40^\circ$.

К таблице 9

30. По условию $MK = KS$, значит, $\triangle MKS$ — равнобедренный, тогда $\angle M = \angle MSK = 35^\circ$. Аналогично в $\triangle SPN$ $\angle PSN = 25^\circ$. В $\triangle MSN$ $\angle MSN = 180^\circ - (35^\circ + 25^\circ) = 120^\circ$. Следовательно, $\angle KSP = \angle MSN - (\angle MSK + \angle PSN) = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

К таблице 10

10. $\triangle MKN$ — равносторонний (по условию), тогда $\angle K = 60^\circ$; $RK \perp PR$, значит, $\triangle PRK$ прямоугольный, тогда $\angle RPK = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, т. е. $RK = \frac{1}{2}PK$. Но $PK = \frac{1}{2}MK = \frac{1}{2}MN = 6,5$, т. е. $PK = \frac{13}{4} = 3,25$ и $NR = 13 - 3,25 = 9,75$.

Ответ: 9,75.

21. В $\triangle AME$ $\angle MAE = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$. В $\triangle BCE$ $\angle CEB = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$, $\angle BEM = \angle CBE = 40^\circ$, тогда в $\triangle AEB$ $\angle BEA = 90^\circ + 40^\circ = 130^\circ$, значит, $\angle EBA = 180^\circ - (25^\circ + 130^\circ) = 25^\circ$, т. е. $BE = AE$.

В $\triangle AED$ $\angle DEA = 90^\circ$, $\angle EDA = 45^\circ$, тогда $\angle DAE = 45^\circ$, $AE = DE$. Следовательно, $BE = DE$, значит $\triangle BED$ — равнобедренный, где $\angle BED = 40^\circ$, тогда $\angle BDE = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$.

Ответ: 70° .

К таблице 11

9. Так как $AD = BF$, $DC = CF$ (по условию), то $\triangle ACB$ — равнобедренный, тогда $\angle A = \angle B$ (по свойству). Значит, $\triangle AED = \triangle BMF$ (по гипотенузе и острому углу).

К таблице 12

16. MN — искомое расстояние. По условию $BC = BM = MA = MC = 8$, значит, $\triangle BCM$ — равносторонний, т. е. $\angle CMB = 60^\circ$, тогда $\angle BMA = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, и, так как MN — высота равнобедренного $\triangle AMB$, то MN — биссектриса, т. е. $\angle AMN = 60^\circ$, тогда $\angle A = 30^\circ$, значит $MN = \frac{1}{2}MA = 4$.

Замечание. Можно использовать теорему Фалеса и теорему о средней линии треугольника.

Ответ: 4.

VIII класс

К таблице 2

24. В параллелограмме $ABCD$ $\angle D = \angle B = 90^\circ$, тогда $\angle A = \angle DCB = 90^\circ$, т. е. $ABCD$ — прямоугольник и, так как $DC = CB$, то $ABCD$ — квадрат.

Поскольку $\angle MCB = 60^\circ$ и $\angle B = 90^\circ$, то $\angle CMB = 30^\circ$, тогда $CB = \frac{1}{2}MC = 9$

(по свойству катета, лежащего против угла в 30°).

Следовательно, $P = 9 \cdot 4 = 36$.

Ответ: 36.

К таблице 4

8. Так как $SFTM$ — параллелограмм и $SF = SM$ (по условию), то $SFTM$ — ромб, тогда $ST \perp FM$ и диагонали ST и FM ромба являются биссектрисами его углов. Пусть $\angle 2 = x$, тогда $\angle 1 = 10 + x$, значит, $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$, или $10 + x + x = 90$, $2x = 80$, $x = 40$, т. е. $\angle 2 = 40^\circ$, $\angle 1 = 10^\circ + 40^\circ = 50^\circ$, тогда $\angle FSM = \angle FTM = 80^\circ$, $\angle SFT = \angle SMT = 100^\circ$.

Ответ: $80^\circ; 80^\circ; 100^\circ; 100^\circ$.

К таблице 5

10. В параллелограмме $\angle R = 90^\circ$, значит, $EMKR$ — прямоугольник. Так как $\angle EFM = 45^\circ$ и $\angle R = \angle M = 90^\circ$, то $\triangle EMF$ — равнобедренный и $ME = MF$.

Пусть $FK = x$, тогда $ME = MF = x + 6$ и $MK = 2x + 6$. По условию задачи $P = 36$, тогда имеем уравнение $2((x + 6) + (2x + 6)) = 36$, откуда находим $x = 2$, значит, $ME = KR = x + 6 = 8$, $MK = ER = 2x + 6 = 10$.

Ответ: $8; 8; 10; 10$.

К таблице 6

18. Так как $ABCD$ — трапеция, то $AB \parallel NM$, тогда $\angle ANM = 70^\circ$, $\angle NAB = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

Поскольку NB — биссектриса $\angle ANM$ (по условию), то $\angle ANB = \angle BNM = 35^\circ$. Но $\angle BNM = z = 35^\circ$ — как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и NM и секущей BM , тогда $\angle NMB = z + 45^\circ = 80^\circ$ и $\angle ABM = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

Ответ: $110^\circ; 70^\circ; 100^\circ; 80^\circ$.

К таблице 8

15. По условию $DE = FC = \frac{1}{2}EF$, т. е. $EF = 2DE = 2FC$. В $\triangle EKF$ проведем высоту KM , тогда $EM = MF = DE = FC$. Заметим, что $\triangle ADE = \triangle KME$ ($DE = EM$ и $\angle AED = \angle KEM$; $\angle D = \angle EMK = 90^\circ$) и $\triangle EMK = \triangle FMK$ (по двум катетам). Аналогично $\triangle KMF = \triangle FCB$.

Пусть $DC = 7x$, тогда $AD = 4x$ и $S_{ABCD} = 7x \cdot 4x = 28x^2$. По условию $S_{\triangle EKF} = 28$. Но $EF = DE + FC = \frac{1}{2}DC = \frac{7}{2}x$ и $KM = AD = 4x$, тогда

$$S_{\triangle EKF} = \frac{1}{2}EF \cdot KM, \text{ или } S_{\triangle EKF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2}x \cdot 4x = 28, \text{ или } 7x^2 = 28, x^2 = 4, x = 2,$$

тогда $S_{ABCD} = 28x^2 = 28 \cdot 4 = 112$.

Замечание. Можно показать, что $S_{ABCD} = 4S_{\triangle EKF}$.

Ответ: 112 .

К таблице 9

17. *Указание.* Обозначить $AD = x$, $AB = y$, тогда $2(x + y) = 20$. Пусть S — площадь параллелограмма, тогда $x \cdot 2 \cdot 4 = y \cdot 2 \cdot 6$. Далее решить систему уравнений $x + y = 10$; $2x = 3y$, и т. д.

22. Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагонали $AC = d_1$ и $BD = d_2$, где $AC = 16$, $BD = 12$. Так как $AO = OC$ и $BO = OD$, то $\triangle AOB = \triangle COD$ (по I признаку равенства треугольников) и $\triangle BOC = \triangle AOD$ (по той же причине). Но равные многоугольники имеют равные площади, т. е. $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$ и $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC}$, значит, $S_{ABCD} = 2S_{\triangle AOB} + 2S_{\triangle BOC} = 2(S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC})$.

$$\text{Но } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} d_1 \cdot \frac{1}{2} d_2 \sin 60^\circ = \frac{1}{8} d_1 d_2 \sin 60^\circ;$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin (180^\circ - 60^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} d_2 \cdot \frac{1}{2} d_1 \sin 60^\circ = \frac{1}{8} d_1 d_2 \sin 60^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } S_{ABCD} &= 2 \cdot \left(\frac{1}{8} d_1 d_2 \sin 60^\circ + \frac{1}{8} d_1 d_2 \sin 60^\circ \right) = \\ &= \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin 60^\circ. \end{aligned}$$

Поскольку $d_1 = 16$, $d_2 = 12$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3}.$$

Замечание 1. Фактически мы доказали, что площадь параллелограмма $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$, где d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними.

Замечание 2. Полученная формула верна для любого выпуклого четырехугольника.

Ответ: $48\sqrt{3}$.

К таблице 10

11. Задачу можно решить по формуле Герона. Покажем другое решение, основанное на применении формулы $S = \frac{1}{2} a \cdot h$, которое приводит к относительно более простым вычислениям.

Проведем высоту BD . Пусть $DC = x$. Из $\triangle ADB$ $BD^2 = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{18} - x)^2$; из $\triangle BDC$ $BD^2 = (\sqrt{10})^2 - x^2$. Сравнивая правые части полученных равенств, имеем $5 - (\sqrt{18} - x)^2 = 10 - x^2$, откуда после упрощений находим

$$\begin{aligned} x &= 23/6\sqrt{2}, \text{ тогда } BD^2 = 10 - x^2, \text{ или } BD^2 = \frac{191}{72} = \frac{382}{144}, \text{ откуда } BD = \\ &= \sqrt{382}/12. \text{ Следовательно, } S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \sqrt{191}/4. \end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{191}/4$.

12. Указание. Достроить $\triangle ABC$ до параллелограмма $ABCD$, затем применить свойство $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$, где d_1 и d_2 — диагонали, a и b — смежные стороны параллелограмма.

Замечание. Задачу можно решить и по формуле $S = \frac{1}{2} a \cdot h$ (см. № 11).

19. Указание. $\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{DC \cdot CE}{CB \cdot CA} = \frac{5}{12}$. Далее обозначить $S_{\triangle DEC} = x$,

$S_{\triangle ABC} = y$ и решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{12}, \\ x + y = 51. \end{cases}$

К таблице 11

18. Пусть $BC = x$, тогда $AD = 2x$. Проведем высоту MN . По условию задачи $S_{\triangle AMD} = 120$, или $\frac{1}{2} AD \cdot MN = 120$, или $\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h = 120$, $xh = 120$,

где $h = MN$ — высота $\triangle AMD$ (и трапеции). $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} BM \cdot h \right) +$

$$+ S_{\triangle AMD} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} MC \cdot h \right) = \frac{1}{2} xh + 120.$$

Так как $xh = 120$, то $S_{ABCD} = 180$.

Замечание. Нетрудно заметить, что $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle MCD} = \frac{1}{4} xh$ и $S_{\triangle AMD} = xh$, т. е. $S_{\triangle AMD} = 2(S_{\triangle ABM} + S_{\triangle MCD})$.

20. Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$, где $AD \parallel BC$. Так как $AC \perp BD$ (по условию), то $S = S_{\triangle DAC} + S_{\triangle ABC} =$
 $= \frac{1}{2} AC \cdot OD + \frac{1}{2} AC \cdot OB = \frac{1}{2} AC \cdot (OD + OB) = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

Но $AC = BD = 8$, тогда $S = \frac{1}{2} \cdot 8^2 = 32$.

Замечание. Фактически мы доказали, что «если в трапеции диагонали перпендикулярны, то площадь $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей. В частности, если трапеция равнобедренная, то $d_1 = d_2 = d$, тогда $S = \frac{1}{2} d^2$ ».

26. По условию задачи $S_{\triangle BOC} = 4 \text{ м}^2$ и $S_{\triangle AOD} = 25 \text{ м}^2$. Заметим, что $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$ (доказать самостоятельно).

Тогда $S_{\Delta AOB} : S_{\Delta BOC} = S_{\Delta AOD} : S_{\Delta COD}$, откуда находим $S_{\Delta AOB}^2 = S_{\Delta COD}^2 = S_{\Delta BOC} \cdot S_{\Delta AOD} = 100$, тогда $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD} = 10$ (м²), значит $S = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOD} + 2S_{\Delta AOB} = 4 + 25 + 2 \cdot 10 = 49$.

Ответ: 49.

К таблице 12

42. Пусть $TL = a$, $MT = b$, тогда $P_{MKLT} = 2(a + b) = 40$, или $a + b = 20$. Заметим, что $S_{MKLT} = TL \cdot 2CO = MT \cdot 2BO$, где $BO = x$, значит, $8a = 2bx = 48$, $a = 6$, $b = 20 - 6 = 14$, тогда $2bx = 48$, $x = \frac{12}{7}$.

Ответ: $\frac{12}{7}$.

45. Пусть $LT = a$, $RQ = b$, тогда $MT = \frac{1}{2}(a - b)$. По условию $S_{LRQT} = \frac{a+b}{2} \cdot x$, где $QM = x$ — высота трапеции, $S_{LRQT} = 300$, или $\frac{a+b}{2} \cdot x = 300$,

$$(a + b)x = 600. \quad LM = LT - MT = a - \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{2}(a + b)^2.$$

Но $a + b = \frac{600}{x}$, тогда $LM = \frac{300}{x}$. Из ΔLMQ имеем $\left(\frac{300}{x}\right)^2 + x^2 = 625$,
или $\frac{90000}{x^2} + x^2 = 625$.

Решая полученное биквадратное уравнение, находим $x_1 = 15$; $x_2 = 20$.
Ответ: 15; 20.

50. Указание. Из точки C провести прямую, параллельную диагонали BD до пересечения с продолжением основания AD в точке E . Далее доказать, что ΔACE — прямоугольный.

54. Указание. Провести высоту DE , обозначив $AE = y$, где $y = \frac{1}{2}(20 - x)$.

Для нахождения $DC = x$, составить систему уравнений

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(20 - x), \\ y^2 + h^2 = 13^2, \\ (20 + x)h = 360, \end{cases}$$

в результате чего получится уравнение $(20 + x)^2(6 + x)(46 - x) = 720^2$, а после упрощений решить уравнение $x^4 - 1476x^2 - 27\,040x + 408\,000 = 0$. Далее доказать, что $x = 10$ — единственный корень.

Ответ: 10.

К таблице 13

22. Пусть $QN = a$, $QE = EF = b$, $EM = c$. Так как $QE = EF$, то $\triangle QEF$ — равнобедренный, тогда $\angle FQE = \angle QFE$. Но $EF \perp NM$ и $QN \perp NM$, значит, $QN \parallel EF$, тогда $\angle NQF = \angle EFQ$, т. е. QF — биссектриса $\angle NQM$, следовательно, $\frac{NF}{FM} = \frac{QN}{QM}$, или $\frac{a}{b+c} = \frac{4}{5}$.

Из подобия $\triangle MFE$ и $\triangle MNQ$, имеем $\frac{b+c}{8+10} = \frac{c}{10}$, или $\frac{b+c}{9} = \frac{c}{5}$.

Кроме того, из $\triangle MFE$ $c^2 - b^2 = 100$.

Решая систему $\begin{cases} \frac{b+c}{9} = \frac{c}{5}, \\ c^2 - b^2 = 100, \end{cases}$ находим $c = \frac{50}{3}$, $b = \frac{40}{3}$; так как

$\frac{a}{b+c} = \frac{4}{5}$, то $a = 24$. Значит, $P_{\triangle MNQ} = x = a + b + c + 18 = 72$.

Ответ: 72.

36. Пусть $AD = a$, $DC = b$. По условию $AC = BC = a + b$, $AC - AB = 4,8$ и $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$.

По свойству биссектрисы $\frac{a}{b} = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{a+b}$ и $(a+b) - AB = 4,8$, откуда $AB = (a+b) - 4,8$, тогда $\frac{a}{b} = \frac{AB}{a+b} = \frac{3}{5}$, $AB = \frac{3}{5}(a+b)$, значит, $\frac{3}{5}(a+b) = (a+b) - \frac{24}{5}$, или $a+b = 12$.

Так как $P_{\triangle ABC} = x$, то $x = AB + 2AC = \frac{a}{b}(a+b) + 2(a+b) = \frac{3}{5} \cdot 12 + 2 \cdot 12 = 12 \cdot \left(\frac{3}{5} + 2\right) = \frac{156}{5} = 31,2$.

Ответ: 31,2.

К таблице 14

24. Пусть $\angle E = \angle 4$, тогда в $\triangle MEL$ $\angle 1 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$; $\angle MLF = \angle 5$, тогда $\angle 5 = \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ - \angle 3$; $\angle F = 180^\circ - (\angle 2 + \angle 5) = 180^\circ - (\angle 2 + 180^\circ - \angle 3) = \angle 3 - \angle 2$.

Так как $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$ (по условию), то $\angle F = \angle 1$, значит, $\triangle EML \sim \triangle MEF$ (по I признаку), тогда $EL : EM = EM : EF$, или $x^2 = 8 \cdot 18$, $x = 12$.

Ответ: 12.

28. Поскольку $BC \parallel AD$, то $ABCD$ — трапеция, тогда $\triangle BOC \sim \triangle AOD$ (по I признаку). Следовательно, $\frac{x}{y} = k$, где k — коэффициент подобия. По

условию $S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOD} = 1 : 9$, или $k^2 = \frac{1}{9}$; $k = \frac{1}{3}$. Значит, $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$, откуда

$y = 3x$. Но $x + y = 9,6$, тогда $3x + x = 9,6$, $x = 2,4$; $y = 2,4 \cdot 3 = 7,2$.

Ответ: $x = 2,4$; $y = 7,2$.

К таблице 17

15. Через вершину N проведем прямую $NA \parallel ME$ до пересечения с продолжением TK в точке A . Заметим, что $\triangle TNA$ — прямоугольный. Кроме того, $S_{\triangle TNA} = S_{TMNA}$ (доказать самостоятельно).

Пусть $MN = x$, $TE = y$. Из $\triangle MEK$ $EK = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$;

$$S_{TMNA} = \frac{1}{2}(x + y + 12) \cdot 9.$$

С другой стороны, $S_{TMNA} = S_{\triangle TNA} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot TN$, где $TN^2 = 81 + (x + y)^2$.

Значит, $\frac{15}{2}TN = \frac{9}{2}(x + y + 12)$, откуда $TN = \frac{3}{5}(x + y + 12)$, тогда

$$\frac{9}{25}(x + y + 12)^2 = 81 + (x + y)^2, \text{ или, после упрощений имеем } 16(x + y)^2 -$$

$$- 216(x + y) + 729 = 0, \text{ или } (4(x + y) - 27)^2 = 0, \text{ откуда находим } x + y = \frac{27}{4},$$

$$\text{тогда } S_{TMNK} = \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{27}{4} + 12 \right) = \frac{675}{8} = 84,375.$$

Ответ: 84,375.

К таблице 18

13. Указание. Из вершины B опустить высоту на сторону AC .

К таблице 19

17. Указание. Учесть, что $AD = BD = CD = R$, где R — радиус описанной окружности с центром в точке D .

21. Так как CF — медиана $\triangle ABC$ и $\angle ACB = 90^\circ$, то $FA = FC = FB = 6$ — радиус описанной окружности. Из $\triangle CEF$ $CE = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{3})^2} = 3$; из $\triangle AEC$

$$\text{находим } AC = \sqrt{AE^2 + CE^2}, \text{ или } AC = \sqrt{36\sqrt{3} + 72} = 6\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

$$\text{Тогда } \sin \angle A = \frac{CE}{AC} = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}, \quad \cos \angle A = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{3}}).$$

Замечание. Можно показать, что $2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)^2$, тогда

$$\sin \angle A = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1) \text{ и } \cos \angle A = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1).$$

К таблице 20

19. Пусть E — точка касания касательной AB к окружности, тогда $NA = AE$ и $BE = BK$. По условию $P_{\triangle MAB} = 48$, или $MA + MB + AB = 48$, где $AB = AE + EB = AN + BK$, тогда $MA + MB + AN + BK = (MA + AN) + (MB + BK) = MN + MK = 48$. Но $MN = MK$, тогда $MN = MK = 24$.

Ответ: $MN = MK = 24$.

К таблице 21

9. *Указание.* Предварительно доказать, что $\angle EAF = \frac{1}{2}(\cup EF - \cup BC)$.

45. *Указание.* Учесть, что $\angle BMC = \frac{1}{2}(\cup BC + \cup AD)$.

54. *Указание.* Пусть $\cup AB = 10k$, тогда $\cup CA = 12k$. Далее решить уравнение $10k + 12k + 140 = 360$.

К таблице 22

13. *Указание.* Продолжить RK до пересечения с основанием MN в точке P . Далее учесть, что по свойству медиан $RK = 2KP$.

17. Из прямоугольного $\triangle MDC$, где $MC = 26$, $MD = \frac{1}{2}MN = 10$, имеем:

$$CD = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24.$$

По условию O_1 — точка пересечения медиан $\triangle CMN$. Пусть $O_1D = x$, тогда $O_1C = 2x$, тогда $x + 2x = 24$, откуда $x = 8$, $O_1C = 2x = 16$.

Пусть $OD = y$, получим $OO_1 = DC - (2x + y) = 24 - (16 + y) = 8 - y$.

Заметим, что $S_{\triangle MNC} = \frac{1}{2}MN \cdot DC = \frac{1}{2}MC \cdot NB$, или $20 \cdot 24 = 26 \cdot NB$, от-

куда находим $NB = \frac{240}{13}$.

Ответ: $\frac{240}{13}$.

К таблице 23

11. Так как $\triangle ABC$ — прямоугольный, то $AB = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$. Пусть $OD = r$ — радиус вписанной окружности. Заметим, что $BM = BN$, $AN = AD$ и $MC = CD = OD = r$. Пусть N — точка касания AB и окружности, тогда $AB = BN + AN = BM + AD = (BC - r) + (AC - r) = AC + BC - 2r$, откуда находим $r = \frac{1}{2}(AC + BC - AB) = 4$.

Ответ: 4.

21. $RT = 13 + 5 = 18$. $S_{\triangle REF} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot EF = 9EF$. Пусть $RE = RF = x$, $ET = TF = y$, тогда $S_{\triangle REF} = 18y$. Из $\triangle ERT$ $x^2 - y^2 = 18^2$. Кроме того, $S_{\triangle REF} = \frac{abc}{4R}$, где $a = b = RE = x$, $c = EF = 2y$, $R = 13$ — радиус описанной окружности. Значит, $S_{\triangle REF} = \frac{x^2 \cdot 2y}{4 \cdot 13} = 18y$, откуда $x^2 = 26 \cdot 18$.

Но $x^2 - y^2 = 18^2$, тогда $y^2 = 18 \cdot (26 - 18) = 144$, $y = 12$, тогда $S_{\triangle REF} = 18 \cdot 12 = 216$.

Ответ: 216.

36. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $r = 4$, тогда $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ (см.

№ 11), или $\frac{1}{2}(a + b - 20) = 4$, где $c = AM + MB = 20$. Значит, $a + b = 28$.

Кроме того, $a^2 + b^2 = 400$. Имеем систему уравнений $\begin{cases} a^2 + b^2 = 400, \\ a + b = 28, \end{cases}$

$(a + b)^2 = 400 + 2ab$, или $400 + 2ab = 784$, откуда $ab = 192$.

Значит, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = 96$.

Ответ: 96.

42. Поскольку $QP = 4$, $QM = 2$ и $QM \perp PM$, то $\angle P = 30^\circ \Rightarrow \angle QOR = 60^\circ$, значит, $\angle O = 60^\circ$. Так как $QO = OR$, то $\angle OQR = \angle ORQ = 60^\circ$, т. е. $\triangle QOR$ — равносторонний, тогда $OR = 6$.

Ответ: 6.

44. I способ.

В равнобедренном $\triangle ABC$ $AC = BC = 10$, OM — радиус вписанной окружности, тогда $OM \perp AB$. Проведем высоту MC , тогда в $\triangle AMC$ $\cos \angle A = \frac{AM}{AC} = 0,6$, значит, $AM = 10 \cdot 0,6 = 6$, тогда $AB = 12$. По теореме Пифа-

гора $MC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot MC$, а с другой стороны, $S_{\triangle ABC} = p \cdot r = \frac{1}{2}(AC + BC + AB) \cdot OM$, тогда $12 \cdot 8 = (10 + 10 + 12) \cdot OM$, откуда $OM = 96 : 32 = 3$.

Ответ: 3.

II способ.

Пусть K — точка касания окружности и касательной AC . Заметим, что $\triangle AMC \sim \triangle CKO$ (как прямоугольные, имеющие общий острый $\angle ACM$). Из подобия имеем: $\frac{AM}{MC} = \frac{KO}{KC}$, где $AM = 6$, $MC = 8$. Кроме того,

$KC = 10 - AK = 10 - AM = 4$, значит, $KO = \frac{6 \cdot 4}{8} = 3$. Но $KO = OM$, т. е.

$OM = 3$.

Ответ: 3.

48. Проведем высоту KM на основание EF , тогда в равнобедренном $\triangle KEF$ ($KE = KF$), высота KM является и медианой, т. е. $EM = MF = 24$.

$S_{\triangle KEF} = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot KM = 24KM$; с другой стороны, $S_{\triangle KEF} = \frac{abc}{4R}$, где $a = EK$, $b = KF$, $c = EF$, $R = EO = 25$, тогда имеем: $24 \cdot KM = \frac{KE \cdot KF \cdot 12}{25}$.

Пусть $KM = h$, $KE = KF = x$, тогда $24 \cdot h = \frac{12x^2}{25}$, или $x^2 = 50h$.

Из $\triangle KME$ $x^2 = h^2 + 24^2$, тогда получим $50h = h^2 + 576$, или $h^2 - 50h + 576 = 0$, откуда находим $h_1 = 18$, $h_2 = 32$. Значит, $x^2 = 50 \cdot 18 = 900$, откуда $x = 30$, или $x^2 = 32 \cdot 50 = 1600$, $x = 40$. Следовательно, $EK = 30$, или $EK = 40$.

Ответ: 30, или 40.

59. *I способ.*

Проведем высоту трапеции BE . Так как $\angle A = 60^\circ$, то $\angle ABE = 30^\circ$. Точка O — центр вписанной окружности, значит, AO — биссектриса угла A , т. е. $\angle OAK = 30^\circ$, тогда $\triangle ABE \sim \triangle AOK$ как прямоугольные, имеющие равные острые углы.

Пусть $AD = 2x$, $BC = 2y$, $MN = 20$, тогда $(2x + 2y) : 2 = 20$, или $2x + 2y = 40$.

Но $AB + CD = BC + AD$ (по свойству описанного четырехугольника), или $2AB = 2x + 2y = 40$, $AB = 20$. Следовательно, $AB : BE = AO : AK$, или $10 : OK = AO : x$. Из $\triangle AOK$, где $\angle OAK = 30^\circ \Rightarrow OK = \frac{1}{2}AO$, тогда $AO = 2 \cdot OK$, т. е. $10 : OK = 2 \cdot OK : x^2$.

Но $\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{x}{OK} \Rightarrow x = OK \sqrt{3}$, тогда $\frac{10}{OK} = \frac{2 \cdot OK}{OK \sqrt{3}}$, или $\frac{5}{OK} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $OK = 5\sqrt{3}$.

II способ.

$MN = 20$, $x + y = 10$, $2AB = 40$, $AB = 20$ (см. I способ).

Из $\triangle BEA$ $\cos 30^\circ = \frac{BE}{AB} = \frac{2 \cdot OK}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $OK = 5\sqrt{3}$.

Ответ: $5\sqrt{3}$.

63. По условию $MNRK$ — прямоугольная трапеция. Заметим, что $\angle N + \angle R = 180^\circ$ (как сумма односторонних углов). Но точка O — центр вписанной окружности, OR и ON — соответственно биссектрисы углов R и N , тогда $\angle ORN + \angle ONR = 90^\circ$, т. е. $\triangle RON$ — прямоугольный, значит $RN = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Высота $\triangle RON$ равна радиусу вписанной в трапецию окружности, тогда высота трапеции равна диаметру этой окружности. Пусть OT — высота $\triangle ORN$, тогда $S_{\triangle RON} = \frac{1}{2} OR \cdot ON = \frac{1}{2} RN \cdot OT$, или $6 \cdot 8 = 10 \cdot OT$, откуда $OT = 4,8$, значит, $RE = 2 \cdot OT = 9,6$, где RE — высота трапеции, опущенная на основание MN .

Но $MN + KR = KM + RN$ (по свойству описанного четырехугольника), значит, $KM + RN = RE + RN = 19,6$, тогда $S_{MNRK} = \frac{1}{2} (MN + KR) \cdot RE = \frac{1}{2} (KM + RN) \cdot RE = \frac{19,6}{2} \cdot 9,6 = 94,08$.

Ответ: 94,08.

67. Проведем высоты EF и QK на основание MT . Так как $EQ \parallel MT$, то $MTQE$ — трапеция (равнобедренная). По условию MQ — биссектриса $\angle M$.

Заметим, что $\angle QMT = \angle MQE = 30^\circ$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых MT и EQ и секущей MQ). Тогда $\angle EMQ = \angle MQE = 30^\circ$, т. е. $\triangle MQE$ — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника). Пусть $EQ = 2x$, $MT = 2y$, $ME = EQ = 2x$.

Из $\triangle MEF$ $MF = \frac{1}{2} ME = x$, $EF = \sqrt{4x^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$.

Из $\triangle MQK$ $MQ = 2 \cdot QK = 2 \cdot EF = 2x\sqrt{3}$.

$S_{\triangle MQT} = \frac{1}{2} MT \cdot QK = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot x\sqrt{3} = xy\sqrt{3}$; с другой стороны,

$$S_{\Delta MQT} = \frac{MQ \cdot QT \cdot MT}{4 \cdot QO}, \text{ или } S_{\Delta MQT} = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 y, \text{ значит, } xy\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 y,$$

откуда $x = 4$.

$$\text{Следовательно, } S_{MTQE} = \frac{1}{2} (MT + QE) \cdot EF = (x + y) \cdot x\sqrt{3}.$$

Но $MT = 2MF + FK = 2MF + EQ = 4x$, или $2y = 4x$, $y = 8$, значит,
 $S_{MTQE} = (4 + 8) \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$.

Ответ: $48\sqrt{3}$.

76. Так как $EF \parallel TR$, то $TRFE$ — трапеция. По свойству описанного четырехугольника $TR + EF = ET + FR$, или $TR + EF = 28$. Но $TR - EF = 14$. Пусть $TR = x$, $EF = y$, где $x > 0$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 28, \\ x - y = 14; \end{cases} \begin{cases} 2x = 42, \\ 2y = 14; \end{cases} \begin{cases} x = 21, \\ y = 7. \end{cases}$$

Итак, $TR = 21$, $EF = 7$.

Проведем высоты AE и FB трапеции. Пусть $TA = z$, тогда $AB = EF = 7$,
 $BR = 21 - (z + 7) = 14 - z$.

Из $\triangle TAE$ $EA^2 = 13^2 - z^2$; из $\triangle FBR$ $FB^2 = 15^2 - (14 - z)^2$. Так как $EA = FB$, то $13^2 - z^2 = 15^2 - (14 - z)^2$, или $(14 - z)^2 - z^2 = 15^2 - 13^2$, откуда находим $z = 5$, тогда $EA^2 = 13^2 - 5^2$, $EA = 12$.

$$\text{Значит, } S_{TRFE} = \frac{1}{2} (TR + EF) \cdot EA = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 12 = 168.$$

Ответ: 168.

83. $ABCD$ — ромб (по условию). Пусть $AB = x$, тогда $P = 4AB = 4x = 80$, откуда $x = 20$. Так как $AC = 32$, то $AO = 16$. Из $\triangle AOE$ $AO^2 = AE^2 + OE^2$, или $AE^2 + OE^2 = 256$. Так как $AC \perp BD$ (по свойству ромба), то $\triangle AOB$ — прямоугольный и, так как $OE \perp AB$, то $AO^2 = AB \cdot AE$, или $16^2 = 20 \cdot AE$, откуда $AE = 64/5$.

$$\text{Значит, } \left(\frac{64}{5}\right)^2 + OE^2 = 16^2, \text{ или } OE^2 = \left(16 - \frac{64}{5}\right)\left(16 + \frac{64}{5}\right), \text{ или } OE^2 =$$

$$= \frac{16}{5} \cdot \frac{144}{5}, \text{ откуда } OE = \frac{4 \cdot 12}{5} = 9,6.$$

Ответ: 9,6.

86. Угол A правильного шестиугольника равен: $\angle A = 180^\circ \cdot (6 - 2) : 6 = 120^\circ$; AO — биссектриса $\angle A$, т. е. $\angle OAM = 60^\circ$, где M — точка касания

с окружностью. Из $\triangle AOM$ $OM = AO \cdot \sin 60^\circ = 5\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2}$.

Но $OM = \frac{1}{2} AB$, тогда $AB = 15$.

Ответ: 15.

К таблице 24

20. Пусть $EA = 2x$, $AF = 5x$, тогда $EF = 7x$. По правилу треугольника $\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{KF}$, или $\overrightarrow{KE} + 7\vec{x} = \vec{n}$.

Аналогично $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{KF}$, или $\vec{m} + 5\vec{x} = \vec{n}$; $\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{KA}$, или $\overrightarrow{KE} + 2\vec{x} = \vec{m}$, откуда $\overrightarrow{KE} = \vec{m} - 2\vec{x}$. Так как $\overrightarrow{KE} + 7\vec{x} = \vec{n}$, то $\vec{m} - 2\vec{x} + 7\vec{x} = \vec{n}$, или $5\vec{x} = \vec{n} - \vec{m}$, откуда $\vec{x} = -\frac{1}{5}\vec{m} + \frac{1}{5}\vec{n}$, значит, $\overrightarrow{KE} = \vec{m} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\vec{m} + \frac{1}{5}\vec{n}\right) =$
 $= \frac{7}{5}\vec{m} - \frac{2}{5}\vec{n}$.

Ответ: $\overrightarrow{KE} = \frac{7}{5}\vec{m} - \frac{2}{5}\vec{n}$.

23. Поскольку M — середина AC , то $AM = MC$; аналогично $BN = ND$.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} =$
 $= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} =$
 $= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$, что и требовалось доказать.

30. По условию $MNKE$ — прямоугольная трапеция, где $MK = 2\sqrt{2}$, $\angle MKN = 45^\circ$ и $\angle MKE = 90^\circ$.

Проведем высоту KF к основанию ME . Заметим, что $\angle MKN = \angle KME = 45^\circ$, как внутренние накрестлежащие углы при параллельных прямых NK и ME и секущей MK . Но тогда $\angle E = 45^\circ$, т. е. $\triangle MKE$ — равнобедренный, и $MK = KE$. Кроме того, $NM = KF$ (как высоты трапеции) и $NM \parallel KF$, значит, $|\overrightarrow{KE} - \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KN}| = |\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KN}| = |\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{MN}| =$
 $= |\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{FK}| = |\overrightarrow{FE}|$.

Из $\triangle MKE$, где $\angle MKE = 90^\circ$, $MK = KE = 2\sqrt{2}$, $ME^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 16$, откуда $ME = 4$. Тогда $FE = 2$, значит, $|\overrightarrow{FE}| = 2$.

Ответ: 2.

35. Из точки C проведем $CF \parallel AB$ и соединим точки B и F . Из точки C проведем $CE \parallel BF$, тогда $AF = FE = BC = 5$ (по построению) и $ED = AD - (AF + FE) = 3$.

Действительно, $\vec{a} = \overline{CD} - \overline{BC} + \overline{AB} = \overline{FA} + \overline{CD} + \overline{AB} = \overline{CD} + \overline{FB} =$
 $= \overline{CD} + \overline{FC} + \overline{CB} = \overline{CB} + (\overline{FC} + \overline{CD}) = \overline{CB} + \overline{FD} = \overline{FA} + \overline{FD} = \overline{FA} + (\overline{FE} + \overline{ED}) =$
 $= \overline{FA} - \overline{FA} + \overline{ED} = \overline{ED}$. Значит, $|\vec{a}| = |\overline{ED}| = 3$.

Ответ: 3.

К таблице 25

11. Проведем высоту CE трапеции $ABCD$, где $AB = CD$, $AC = 16$, тогда
 $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Пусть $DE = x$, $BC = y$, тогда $MN = \frac{1}{2}(2x + 2y) = x + y$.

Так как $\angle CAD = 60^\circ$, то $\angle ACE = 30^\circ \Rightarrow AE = \frac{1}{2}AC = 8$. Но $AE = x + y$,
 значит, $x + y = 8$ и $MN = AE = 8$.

Ответ: 8.

16. Проведем высоту FT трапеции $CEFK$, где $CE = FK$, $MN = 4$,
 $S_{CEFK} = 8$. $S_{CEFK} = \frac{1}{2}(CK + EF) \cdot FT = 8$, или $MN \cdot FT = 8$, где $MN =$
 $= \frac{1}{2}(CK + EF) = 4$, значит, $4FT = 8$, $FT = 2$.

Пусть $EF = x$, $CK = y$, тогда $TK = \frac{1}{2}(y - x)$, $CT = CK - TK =$
 $= y - \frac{1}{2}(y - x) = \frac{1}{2}(x + y) = MN = 4$.

Из $\triangle CFT$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{FT}{CT} = \frac{2}{4} = 0,5$.

Ответ: 0,5.

20. Поскольку O — центр вписанной окружности, то MO и NO — биссектрисы углов KNM и LMN , тогда

$$\angle OMN + \angle ONM = \frac{1}{2}(\angle KNM + \angle LMN) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ, \text{ т. е.}$$

$\angle MON = 90^\circ$, тогда $MN = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$. Заметим, что высота OA $\triangle OMN$ является одновременно и радиусом вписанной окружности.

Тогда $S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} OA \cdot MN = \frac{1}{2} OM \cdot ON$, откуда $OA = 4,8$ (OA — высота $\triangle OMN$, опущенная на MN). Значит, $KL = 2 \cdot OA = 9,6$, так как $KL = 2r$ — диаметр вписанной окружности. По свойству описанного четырехугольника $KN + LM = KL + MN = 10 + 9,6 = 19,6$, тогда

$$EF = \frac{1}{2}(KN + LM) = 9,8.$$

Ответ: 9,8.

23. Пусть $BC = x$, $CD = 2x$, $AD = y$. Так как EF — средняя линия трапеция $ABCD$, то $\frac{x+y}{2} = 20$, или $x + y = 40$. Из $\triangle ADC$, где $\angle ADC = 90^\circ$,

$$\text{имеем: } AC = \sqrt{4x^2 + y^2}.$$

Проведем высоту BM , тогда из $\triangle DMB$ $DB = \sqrt{BM^2 + DM^2}$, где $BM = CD = 2x$; $DM = x$, тогда $DB = \sqrt{4x^2 + x^2} = \sqrt{5x^2} = x\sqrt{5}$.

Так как $AC \perp BD$, то $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ (см. № 478 «Геометрия 7–9»

Л.С. Атанасян и др.). $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \sqrt{4x^2 + y^2} \cdot x\sqrt{5}$. С другой стороны, S_{ABCD}

$$= \frac{1}{2}(x + y) \cdot 2x, \text{ тогда получим } \frac{1}{2} \sqrt{4x^2 + y^2} \cdot x\sqrt{5} = \frac{1}{2}(x + y) \cdot 2x, \text{ или}$$

$$\sqrt{5(4x^2 + y^2)} = 2(x + y), x \neq 0.$$

Но $x + y = 40$, тогда $\sqrt{5(4x^2 + y^2)} = 80$, или $4x^2 + y^2 = 1280$.

$$\text{Имеем систему уравнений } \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1280, \\ x + y = 40; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2 + (40 - x)^2 = 1280, \\ y = 40 - x. \end{cases}$$

Упрощая первое уравнение системы, получим $x^2 - 16x + 64 = 0$, или $(x - 8)^2 = 0$, откуда $x = 8$. Значит, $BC = x = 8$.

Ответ: 8.

26. Предварительно докажем, что «если в трапеции сумма углов при основании равна 90° , то отрезок, соединяющий середины оснований, равен их полуразности».

Пусть точки K и F — середины оснований AD и BC . Пусть $AD = 2x$ и $BC = 2y$. Проведем $KE \parallel AB$ и $KL \parallel CD$. Заметим, что $\angle KEF = \angle A = 70^\circ$ и $\angle KLF = \angle D = 20^\circ$, тогда $\angle EKL = 90^\circ$, т. е. $\triangle EKL$ — прямоугольный и

$$KF \text{ — медиана } \triangle EKL \text{ и, значит, } KE = KF = FL = \frac{1}{2} EL = \frac{1}{2}(AD - BC), \text{ что}$$

и требовалось доказать.

Следовательно, $\frac{1}{2}(2x - 2y) = 2$, или $x - y = 2$.

Кроме того, $MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = 4$, или $x + y = 4$.

Решая систему уравнений $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2 \end{cases}$ способом сложения, находим

$2x = 6$, $2y = 2$, т. е. $AD = 6$, $BC = 2$.

Ответ: $BC = 2$, $AD = 6$.

IX класс

К таблице 1

6. а) Так как векторы $\overrightarrow{FN}$ и $\overrightarrow{FO}$ сонаправлены, то $k \geq 0$, значит,

$$k = \frac{|\overrightarrow{FN}|}{|\overrightarrow{FO}|} = \frac{|\overrightarrow{FN}|}{\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{FN}\right|} = \frac{FN}{\frac{1}{2}FN} = 2.$$

б) Аналогично имеем: $k \geq 0$, $k = \frac{|\overrightarrow{MO}|}{|\overrightarrow{ME}|} = \frac{\frac{1}{2}ME}{ME} = \frac{1}{2}$.

в) Векторы $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{NF}$ противоположно направлены, значит, $k < 0$,

$$\text{тогда } k = -\frac{|\overrightarrow{ON}|}{|\overrightarrow{NF}|} = -\frac{\frac{1}{2}NF}{NF} = -\frac{1}{2}.$$

г) $k < 0$, $FM = NE$, $k = -\frac{|\overrightarrow{FM}|}{|\overrightarrow{NE}|} = -\frac{FM}{NE} = -1$.

д) $k < 0$, $MN = EF$, $k = -\frac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{EF}|} = -\frac{MN}{EF} = -1$.

е) $k < 0$, $FA = AO = \frac{1}{2}FO = \frac{1}{4}FN$; $k = -\frac{|\overrightarrow{FA}|}{|\overrightarrow{NF}|} = -\frac{\frac{1}{4}FN}{FN} = -\frac{1}{4}$.

$$\text{ж) } k \geq 0, FA = \frac{1}{4}FN, AN = 3FA = \frac{3}{4}FN, k = \frac{|\overline{AN}|}{|\overline{FA}|} = \frac{\frac{3}{4}FN}{\frac{1}{4}FN} = 3.$$

$$\text{з) } k < 0, NA = FN - FA = FN - \frac{1}{4}FN = \frac{3}{4}FN, k = -\frac{|\overline{FN}|}{|\overline{NA}|} = -\frac{FN}{\frac{3}{4}FN} = -\frac{4}{3}.$$

и) Так как стороны NE и EF параллелограмма не параллельны, то векторы $\overline{NE}$ и $\overline{EF}$ не коллинеарны, т. е. число k не существует.

к) Аналогично и) число k не существует.

Ответ: а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) -1; д) -1; е) $-\frac{1}{4}$; ж) 3; з) $-\frac{4}{3}$; и), к) число k не существует.

К таблице 2

14. Пусть D — середина отрезка AB , тогда

$$x_D = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{1}{2}(1 + 7) = 4; y_D = \frac{1}{2}(2 + 10) = 6.$$

Значит, $D(4; 6)$. Но точка C — середина отрезка AD , тогда

$$x_C = \frac{1}{2}(1 + 4) = 2,5; y_C = \frac{1}{2}(2 + 6) = 4, \text{ т. е. } C(2,5; 4).$$

Ответ: (2,5; 4).

16. По условию $EK = KF$. Но $EK = \sqrt{(x-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + 4}$;

$$KF = \sqrt{(6-x)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{(6-x)^2 + 100}.$$

Значит, $\sqrt{(x-2)^2 + 4} = \sqrt{(6-x)^2 + 100}$, или $(x-2)^2 + 4 = (6-x)^2 + 100$, откуда находим $x = 16$.

18. Координаты вершин параллелограмма $OACB$: $O(0; 0)$, $A(6; 0)$, $C(x; y)$, $B(3; 2)$.

Так как противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны, то $\overline{OB} = \overline{AC}$.

$$\overline{OB} \{3 - 0; 2 - 0\} = \overline{AC} \{x - 6; y - 0\}; \overline{OB} \{3; 2\} = \overline{AC} \{x - 6; y\}.$$

Так как $\overline{OB} = \overline{AC}$, то $3 = x - 6$; $2 = y$, т. е. $x = 9$; $y = 2$.

Значит, координаты точки $C(9; 2)$.

$$\text{Тогда } AC = \sqrt{(9-6)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{13}; \quad OC = \sqrt{9^2 + 2^2} = \sqrt{85}.$$

$$\text{Ответ: } AC = \sqrt{13}; \quad OC = \sqrt{85}; \quad C(9; 2).$$

20. Координаты вершин трапеции $OABC$: $O(0; 0)$, $A(2; 4)$, $B(x; y)$, $C(12; 0)$. Так как $AB \parallel Ox$, то $\overline{AB} \{5; 0\}$. С другой стороны, $\overline{AB} \{x-2; y-4\}$, тогда имеем: $x-2=5$; $y-4=0$, т. е. $x=7$; $y=4$. Значит, точка B имеет координаты $(7; 4)$. Следовательно, $CB = \sqrt{(7-12)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{41}$; $OB = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$.

$$\text{Ответ: } BC = \sqrt{41}, \quad OB = \sqrt{65}.$$

К таблице 3

5. Введем прямоугольную систему координат так, чтобы AC совпало с осью Ox , BD — с осью Oy , а точка D — с началом координат. Найдем координаты точки E — середины отрезка BC :

$$x_E = \frac{1}{2}(x_B + x_C) = \frac{1}{2}(0 + 16) = 8; \quad y_E = \frac{1}{2}(12 + 0) = 6. \quad \text{Значит, } E(8; 6).$$

Так как $\angle ABD = 45^\circ$ и $\angle ADB = 90^\circ$, то $\angle BAD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, т. е. $AD = BD = 12$, т. е. $A(-12; 0)$.

$$\begin{aligned} \text{Теперь находим } AE: \quad AE &= \sqrt{(8+12)^2 + (6-0)^2} = \\ &= \sqrt{400 + 36} = \sqrt{436} = 2\sqrt{109}. \end{aligned}$$

9. Введем прямоугольную систему координат так, чтобы основание KP совпало с осью Ox , а ось Oy прошла через вершину D перпендикулярно KP . Пусть O — начало координат. В $\triangle KOD$, где $\angle K = 45^\circ$, $KD = 4\sqrt{2}$, $\angle KOD = 90^\circ$, находим: $KD^2 = KO^2 + OD^2$. Так как $\angle KDO = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$,

$$\text{то } DO = KO, \text{ т. е. } 2 \cdot KO^2 = KD^2, \text{ откуда } KO = DO = \frac{KD}{\sqrt{2}} = 4.$$

Значит, $D(0; 4)$, $K(-4; 0)$, $P(5; 0)$ (так как $OP = KP - KO = 5$).

$$\text{По условию } E \text{ — середина } DP, \text{ тогда } x_E = \frac{1}{2}(x_D + x_P) = \frac{1}{2}(0 + 5) = 2,5;$$

$$y_E = \frac{1}{2}(4 + 0) = 2, \text{ т. е. } E(2,5; 2).$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } KE &= \sqrt{(2,5+4)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{42,25 + 4} = \sqrt{46,25} = \\ &= \sqrt{185/4} = \sqrt{185}/2. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{185}/2.$$

К таблице 4

13. Уравнение окружности с центром в точке $O_1(0; y_0)$ имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Так как точки $M(-3; 0)$ и $N(0; 9)$ принадлежат окружности, то имеем: $9 + (0 - y_0)^2 = r^2$, или $9 + y_0^2 = r^2$ и $(0 - 0)^2 + (9 - y_0)^2 = r^2$, или $(9 - y_0)^2 = r^2$. Сравнивая левые части полученных равенств, получим $9 + y_0^2 = (9 - y_0)^2$, или $9 + y_0^2 = 81 - 18y_0 + y_0^2$, $18y_0 = 72$, $y_0 = 4$, тогда $r^2 = 9 + 4^2 = 25$. Значит, уравнение окружности имеет вид $x^2 + (y - 4)^2 = 25$.

Ответ: $x^2 + (y - 4)^2 = 25$.

14. Центр окружности расположен на оси Ox , значит $O_1(x_0; 0)$, тогда $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$. MN — диаметр окружности, тогда O_1 — середина MN ,

$$\text{т. е. } x_0 = \frac{1}{2}(x_M + x_N) = \frac{1}{2}(-2 + 4) = 1.$$

Имеем: $(x - 1)^2 + y^2 = r^2$.

Точки $M(-2; 3)$ и $N(4; -3)$ принадлежат окружности, тогда получим: $(-2 - 1)^2 + 3^2 = r^2$, или $r^2 = 18$.

Значит, уравнение окружности запишется в виде $(x - 1)^2 + y^2 = 18$.

Ответ: $(x - 1)^2 + y^2 = 18$.

К таблице 5

3. Прямая $2x + y + 4 = 0$ пересекает оси координат в точках M и N . Так как точка M принадлежит оси Ox , то $y = 0$, тогда $2x + 0 + 4 = 0$; $x = -2$, т. е. $M(-2; 0)$. Аналогично, $x = 0$, тогда $2 \cdot 0 + y + 4 = 0$, $y = -4$, т. е. $N(0; -4)$.

В $\triangle MON$ $\angle MON = 90^\circ$, $MO = 2$ и $NO = 4$, тогда $S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} MO \cdot ON = 4$.

Ответ: 4.

8. Найдем координаты точки M — середины отрезка AB :

$$x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{1}{2}(8 + (-8)) = 0, \quad y_M = \frac{1}{2}(12 + 0) = 6.$$

Значит, $M(0; 6)$.

Уравнение медианы (прямой) CM имеет вид $ax + by + c = 0$. Так как точки C и M принадлежат прямой CM , то их координаты удовлетворяют уравнению прямой: $a \cdot (-2) + b \cdot (-8) + c = 0$, или $-2a - 8b + c = 0$ и

$a \cdot 0 + b \cdot 6 + c = 0$, или $6b + c = 0$, откуда $b = -\frac{1}{6}c$, тогда

$$-2a - 8 \cdot \left(-\frac{1}{6}c\right) + c = 0, \text{ т. е. } a = \frac{7}{6}c.$$

Подставляя значения a и b в уравнение прямой, получим:

$$\frac{7}{6}c \cdot x + \left(-\frac{1}{6}c\right) \cdot y + c = 0, \text{ где } c \neq 0, \text{ или } \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}y + 1 = 0, \text{ т. е.}$$

$7x - y + 6 = 0$ — уравнение медианы CM .

Ответ: $7x - y + 6 = 0$.

10. Введем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox прошла через AC , а диагональ BD оказалась на оси Oy , где O — начало координат (точка пересечения диагоналей AC и BD).

Запишем координаты вершин ромба: $A(-10; 0)$, $B(0; 4)$, $C(10; 0)$, $D(0; -4)$.

Уравнение прямой AB имеет вид $ax + by + c = 0$. Так как точки A и B принадлежат прямой AB , то

$$\begin{cases} a \cdot (-10) + b \cdot 0 + c = 0, \\ a \cdot 0 + b \cdot 4 + c = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -10a + c = 0, \\ 4b + c = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0,1c, \\ b = -0,25c. \end{cases}$$

Подставляя значения a и b в уравнение прямой, имеем:

$0,1c \cdot x + (-0,25c) \cdot y + c = 0$; $c \neq 0$, или $0,1x - 0,25y + 1 = 0$, или, умножив обе части полученного уравнения на 20, получим $2x - 5y + 20 = 0$.

$$\text{Для прямой } BC \text{ имеем: } \begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 4 + c = 0, \\ a \cdot 10 + b \cdot 0 + c = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4b + c = 0, \\ 10a + c = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{1}{4}c, \\ a = -\frac{1}{10}c. \end{cases}$$

Значит, уравнение BC примет вид $-\frac{1}{10}cx - \frac{1}{4}cy + c = 0$, $c \neq 0$, или $2x + 5y - 20 = 0$.

Аналогично для прямых DC и AD получим соответственно (решить самостоятельно): $2x - 5y - 20 = 0$ и $2x + 5y + 20 = 0$.

Замечание. Относительно осей Ox и Oy ромб может иметь и другое расположение, что равносильно замене оси Ox на Oy и, наоборот. Тогда придется заменить x на y и y на x .

Ответ: $2x - 5y + 20 = 0$, $2x - 5y - 20 = 0$, $2x + 5y - 20 = 0$, $2x + 5y + 20 = 0$.

К таблице 6

10. Предварительно докажем, что $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$, где $\alpha = \angle AOB$. Поскольку $ABCD$ — параллелограмм, то $AO = OC$ и $BO = OD$ (по свойству), тогда $S_{ABCD} = 2S_{\triangle AOB} + 2S_{\triangle BOC} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}AO \cdot BO \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2}OB \cdot OC \cdot \sin(180^\circ - \alpha) \right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BO \cdot (AO \sin \alpha + OC \sin \alpha) = BO \sin \alpha \cdot (AO + OC) = BO \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin \alpha$, ч. т. д.

Следовательно, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 20 \cdot \sin 60^\circ = 160 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 80\sqrt{3}$.

Ответ: $80\sqrt{3}$.

14. Так как $MNKL$ — параллелограмм (по условию) и $\angle M = \angle K = 60^\circ$ (по свойству), то $\triangle KEF$ — равносторонний. Кроме того, $NK = KL = 24$ и $KE = \frac{1}{2}NK = 12$.

Значит, $S_{\triangle KEF} = \frac{1}{2}EK \cdot KF \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$.

Ответ: $36\sqrt{3}$.

17. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то диагональ BD делит его на два равных треугольника ($\triangle ABD = \triangle BDC$ — по III признаку). А равные многоугольники имеют равные площади (по свойству многоугольника).

Значит, $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2}AD \cdot BD \cdot \sin \angle ADB = AD \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 4AD$.

Из $\triangle ABD$ по теореме косинусов имеем

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos \angle ADB, \text{ или}$$

$$41 = AD^2 + 25 - 2 \cdot AD \cdot 5 \cdot \cos \angle ADB.$$

$$\cos \angle ADB = \sqrt{1 - \sin^2 \angle ADB} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5},$$

где $\cos \angle ADB > 0$ ($\angle ADB$ — острый).

Следовательно, $41 = AD^2 + 25 - 10 \cdot AD \cdot \frac{3}{5}$, или $AD^2 - 6 \cdot AD - 16 = 0$,

откуда находим $AD = 8$ или $AD = -2$ (не имеет смысла). Итак, $AD = 8$, тогда $S_{ABCD} = 8 \cdot 4 = 32$.

Ответ: 32.

К таблице 7

12. В $\triangle MKT$ $KM = KT = y$ (по условию), $\angle KMT = \angle KTM = 30^\circ$ (как углы при основании равнобедренного треугольника), тогда $\angle K = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$.

По теореме синусов имеем: $\frac{MT}{\sin \angle MKT} = \frac{KM}{\sin \angle MTK}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sin 120^\circ} = \frac{y}{\sin 30^\circ}$.

Но $\sin 120^\circ = \sin (180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, тогда

$$y = \frac{\sqrt{2} \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Так как ME — биссектриса, то $\angle KME = \angle EMT = 15^\circ$.

В $\triangle KME$ $\frac{x}{\sin 120^\circ} = \frac{y}{\sin \angle KEM}$, где $\angle KEM = 180^\circ - (120^\circ + 15^\circ) = 45^\circ$,

тогда $x = \frac{y \cdot \sin 120^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{6}{3 \cdot 2} = 1$.

Итак, $ME = x = 1$, $KM = KT = y = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Замечание. Если провести высоту KN на сторону MT , то $KM = y$ можно найти из соотношения $y = \frac{\sqrt{2}}{2} : \cos 30^\circ$, где KN — медиана $\triangle MKT$.

Ответ: $x = 1$; $y = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

16. Проведем высоту BE к основанию AD . Заметим, что $\angle BAD = 60^\circ$ (соответственные углы при параллельных прямых AB и CD равны).

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = 8 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3}.$$

С другой стороны, $S_{ABCD} = AD \cdot BE = 12 \cdot BE = 48\sqrt{3}$, откуда $BE = 4\sqrt{3}$.

В $\triangle ABE$ $\angle ABE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow AE = \frac{1}{2}AB = 4$. Значит, $ED = AD - AE = 8$. Из $\triangle BED$, где $BD = y$, имеем:

$$y^2 = BE^2 + ED^2, y = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 8^2} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}.$$

По свойству параллелограмма $AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + DC^2)$, или $x^2 + y^2 = 2 \cdot (12^2 + 8^2)$, $x^2 = 416 - 112$, $x = \sqrt{304} = 4\sqrt{19}$.

Замечание. Задачу можно решить другими способами.

Ответ: $x = 4\sqrt{19}$, $y = 4\sqrt{7}$.

К таблице 8

4. $RO = x$ — радиус описанной окружности. $S_{\triangle REF} = \frac{abc}{4x}$, где a, b, c —

стороны треугольника. $S_{\triangle REF} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot x} = \frac{175}{4x}$; с другой стороны, по фор-

муле Герона $S_{\triangle REF} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{1}{2}(10 + 5 + 7) = 11$,

$$S_{\triangle REF} = \sqrt{11 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 4} = 2\sqrt{66}, \text{ значит, } \frac{175}{2x} = 2\sqrt{66}, \text{ откуда } x = \frac{175}{4\sqrt{66}}.$$

Ответ: $\frac{175}{4\sqrt{66}}$.

12. Указание. Применить теорему косинусов.

Далее решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 1764, \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{8}. \end{cases}$$

Ответ: $x = 18, y = 48$.

14. Указание. Дважды применить теорему косинусов для $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ для угла A .

Ответ: $x = 13$.

15. Так как $ME \parallel FT$, то $\triangle KFT \sim \triangle KME$ (по двум углам), тогда $\frac{FK}{FT} = \frac{KM}{ME}$, или $\frac{50-y}{x} = \frac{50}{60}$; $\frac{50-y}{x} = \frac{5}{6}$. Из $\triangle MFE$ по теореме Пифагора $FE^2 = 60^2 - y^2$, а из $\triangle KFE$ $FE^2 = 50^2 - (50 - y)^2$.

Сравнивая полученные равенства, имеем $60^2 - y^2 = 50^2 - (50 - y)^2$, откуда находим $y = 36$. Поскольку $\frac{50-y}{x} = \frac{5}{6}$ и $y = 36$, то $\frac{14}{x} = \frac{5}{6}$, откуда

$$x = \frac{84}{5} = 16,8.$$

Ответ: $x = 16,8; y = 36$.

19. Пусть $MK = a, NP = b$. Из $\triangle MPR$ $MP = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32$.

Пусть $\angle PMR = \alpha$. Заметим, что $\triangle MKN \sim \triangle NRP$ ($\angle K = \angle P = 90^\circ$ и $\angle KNM = \angle PNR$ как вертикальные), тогда $\cos \alpha = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$. Из $\triangle MNR$ по

теореме косинусов $y^2 = x^2 + 40^2 - 2 \cdot x \cdot 40 \cdot \frac{4}{5}$, или $y^2 = x^2 - 64x + 1600$.

Пусть $\angle KMN = \angle NRP = \beta$, тогда $\cos \beta = \frac{a}{x} = \frac{24}{y}$, откуда $a = \frac{24x}{y}$.

Из $\triangle MKN$ $a^2 = x^2 - 49$, значит, $\left(\frac{24x}{y}\right)^2 = x^2 - 49$, или $\frac{576x^2}{y^2} = x^2 - 49$.

Подставляя значение y^2 , имеем $(x^2 - 64x + 1600)(x^2 - 49) = 576x^2$.

Упрощая полученное уравнение, получим

$$x^4 - 64x^3 + 975x^2 + 3136x - 78\,400 = 0.$$

Можно проверить, что $x = 25$ — корень уравнения, тогда $x^3(x - 25) - 39x^2(x - 25) + 3136(x - 25) = 0$, или $(x - 25)(x^3 - 39x^2 + 3136) = 0$, откуда $x_1 = 25$, тогда $y^2 = 25^2 - 64 \cdot 25 + 1600$, $y^2 = 25^2$, $y = 25$.

Итак, $x = 25, y = 25$ одно из решений задачи. Остается решить уравнение $x^3 - 39x^2 + 3136 = 0$. Можно убедиться, что оно не имеет целых

корней. Запишем его в виде $x^2(39 - x) = 3136$, или $39 - x = \left(\frac{56}{x}\right)^2$.

Графическое решение показывает, что полученное уравнение имеет еще три корня, из которых один отрицательный, что не удовлетворяет условию задачи, так как $x > 0$.

Два других корня можно вычислить приближенно: $x_2 \approx 10,5$, $x_3 \approx 36,7$, тогда $y_2^2 = 10,5^2 - 64 \cdot 10,5 + 1600$, откуда находим $y_2 \approx 32,2$.

Аналогично $y_3^2 = 36,7^2 - 64 \cdot 36,7 + 1600$, $y_3 \approx 24,5$. Как видим, задача оказалась довольно сложной.

Ответ: $x_1 = 25$, $y_1 = 25$; $x_2 \approx 10,5$, $y_2 \approx 32,2$; $x_3 \approx 36,7$, $y_3 \approx 24,5$.

22. Из $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) $x^2 - y^2 = 324$. Пусть $CK = a$, $KB = b$, тогда $a + b = 18$. Так как MK (а значит, и AK) — биссектриса $\angle CMB$, то $\frac{a}{b} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$, откуда $a = \frac{5}{7}b$. Так как $a + b = 18$, то $\frac{5}{7}b + b = 18$, $\frac{12}{7}b = 18$, откуда $b = \frac{21}{2}$, тогда $a = \frac{5}{7} \cdot \frac{21}{2} = \frac{15}{2}$.

Пусть $\angle CAK = \angle KAB = \alpha$. Из $\triangle ABC$ $\cos 2\alpha = \frac{y}{x}$, а из $\triangle ACK$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{y} = \frac{15}{2y}$.

Известно, что $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$, следовательно, $\frac{1 - \left(\frac{15}{2y}\right)^2}{1 + \left(\frac{15}{2y}\right)^2} = \frac{y}{x}$,

или $\frac{4y^2 - 225}{4y^2 + 225} = \frac{y}{x}$, или $\left(\frac{4y^2 - 225}{4y^2 + 225}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2}$.

Но $x^2 - y^2 = 324$, $x^2 = y^2 + 324$, тогда получим $\left(\frac{4y^2 - 225}{4y^2 + 225}\right)^2 = \frac{y^2}{y^2 + 324}$.

Пусть $y^2 = t$, где $t > 0$, тогда уравнение примет вид $\left(\frac{4t - 225}{4t + 225}\right)^2 = \frac{t}{t + 324}$,

или $(4t - 225)^2(t + 324) = t(4t + 225)^2$. После преобразований получим уравнение $1584t^2 - 583\,200t + 16\,402\,500 = 0$, или $44t^2 - 16\,200t + 455\,625 = 0$, откуда находим $t_1 = \frac{1350}{4}$, $t_2 = \frac{1350}{44}$.

1) Если $t = \frac{1350}{4}$, то $y^2 = \frac{1350}{4}$, $y = \frac{15\sqrt{6}}{2}$, тогда $x^2 = y^2 + 324 = \frac{2646}{4}$,

$x = \frac{21\sqrt{6}}{2}$. Оба значения подходят, так как $y < x$ (по смыслу задачи).

2) Если $t = \frac{1350}{44}$, то $y^2 = \frac{1350}{44}$, $y = \frac{15}{2} \sqrt{\frac{6}{11}} = \frac{15\sqrt{66}}{22}$, тогда

$$x^2 = \frac{675}{22} + 324 = \frac{15 \cdot 606}{44}, \text{ откуда } x = \frac{51}{2} \sqrt{\frac{6}{11}} = \frac{51\sqrt{66}}{22}, \text{ где условие } y < x$$

также выполняется.

Ответ: 1) $x = \frac{21\sqrt{6}}{2}$, $y = \frac{15\sqrt{6}}{2}$; 2) $x = \frac{51\sqrt{66}}{22}$, $y = \frac{15\sqrt{66}}{22}$.

24. По свойству параллелограмма $2 \cdot (AD^2 + AB^2) = AC^2 + BD^2$, где $AD = x$, $AB = y$, $AD = BD = x$, тогда $2(x^2 + y^2) = AC^2 + x^2$, откуда $x^2 + 2y^2 = AC^2$.

По условию $AC - BD = 2$, или $AC = x + 2$, тогда $x^2 + 2y^2 = (x + 2)^2$, откуда $y^2 = 2x + 2$. Кроме того, $x - y = 11$. Следовательно, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 = 2x + 2, \\ x - y = 11; \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 11)^2 = 2x + 2, \\ y = x - 11. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем $x^2 - 22x + 121 - 2x - 2 = 0$, или $x^2 - 24x + 119 = 0$, откуда $x_1 = 17$, $x_2 = 7$, тогда $y_1 = 6$, $y_2 = 7 - 11 = -4$ (не имеет смысла). Поскольку $x - y = 11$, т. е. $x > y$, то $x = 17$, $y = 6$.

Ответ: $x = 17$, $y = 6$.

К таблице 9

8. $\cos \angle C = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{|\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}|}$. Найдем координаты векторов $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$;

$$\overline{CA} \{-4 - 4; 8 - 0\} = \{-8; 8\}, \quad \overline{CB} \{2 - 4; 14 - 0\} = \{-2; 14\}, \text{ тогда}$$

$$|\overline{CA}| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}, \quad |\overline{CB}| = \sqrt{(-2)^2 + 14^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}. \quad \overline{CA} \cdot \overline{CB} =$$

$$= -8 \cdot (-2) + 8 \cdot 14 = -16 + 112 = 96.$$

$$\text{Следовательно, } \cos \angle C = \frac{96}{8\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2}} = \frac{12}{2 \cdot 10} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

16. $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cdot \cos \alpha$, где $\alpha = \angle CAB$. По условию $A(2; 4)$,

$B(2; 8)$, $C(6; 4)$, тогда $\overline{AB} \{2 - 2; 8 - 4\} = \{0; 4\}$, $\overline{AC} = \{6 - 2; 4 - 4\} = \{4; 0\}$.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4; \quad |\overline{AC}| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4. \quad \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \cdot 4 + 4 \cdot 0 = 0, \quad \cos \alpha =$$

$$= \frac{0}{4 \cdot 4} = 0, \text{ т. е. } \angle CAB = 90^\circ.$$

Ответ: 90° .

20. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{LT}$: $\overrightarrow{MN} \{6 - 1; 2 - 5\} = \{5; -3\}$, $\overrightarrow{LT} \{3 - 4,5; 3 - 5,5\} = \{-1,5; -2,5\}$. Тогда $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{LT} = 5 \cdot (-1,5) + (-3) \cdot (-2,5) = -7,5 + 7,5 = 0$. Следовательно, $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{LT}$, т. е. $\angle LON = 90^\circ$.
Ответ: 90° .

К таблице 10

5. По условию $C = 8\pi\sqrt{3}$. Но $C = 2\pi R$, тогда $2\pi R = 8\pi\sqrt{3}$, $R = 4\sqrt{3}$.

Так как $\cup AmB = 120^\circ$, то $\angle AOB = 120^\circ$, где $AO = OB = R = 4\sqrt{3}$.

Из центра O окружности опустим перпендикуляр OC на хорду AB . OC — медиана равнобедренного $\triangle AOB$, где $\angle OAB = \angle OBA = 30^\circ$.

Из $\triangle AOC$ $AC = AO \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$. Значит, $AB = 2 \cdot AC = 12$.

Ответ: 12.

9. Так как $\cup TmM = 120^\circ$, то $\angle TOM = 120^\circ$. В равнобедренном $\triangle TOM$ ($TO = MO = R$); $\angle OTM = \angle OMT = 30^\circ$.

Проведем высоту OK , тогда из $\triangle OTK$, где $TK = 5$, $OT = \frac{5}{\cos 30^\circ} = \frac{10}{\sqrt{3}}$,

следовательно, $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 10}{180 \cdot \sqrt{3}} \cdot 120 = \frac{20\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{20\pi\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $\frac{20\pi\sqrt{3}}{9}$.

15. I способ.

$\cup AM = \cup BN$ — как дуги окружности, заключенные между параллельными хордами AB и MN ($AB \parallel MN$ — по условию).

Но тогда $AM = BN$, т. е. $ABNM$ — равнобедренная трапеция.

Проведем диагональ AN . Так как $MN = 16$, $AB = 12$, то

$$MK = \frac{1}{2}(16 - 12) = 2.$$

Из $\triangle AMK$ $AM = \sqrt{2^2 + 14^2} = 10\sqrt{2}$. $KN = MN - MK = 14$.

Из $\triangle AKN$, где $AK = KN = 14$, $AN = 14\sqrt{2}$.

Известно, что $S_\Delta = \frac{abc}{4R}$, где a, b, c — стороны, R — радиус описанной

окружности. Но $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 14 = \frac{10\sqrt{2} \cdot 16 \cdot 14\sqrt{2}}{4R}$, откуда $R = 10$.

Тогда $C = 2\pi R = 20\pi$.

II способ.

Соединим точки B и N с центром окружности, тогда $OB = ON = R$. Проведем диаметр EF , перпендикулярный данным хордам. Пусть L и T соответственно точки пересечения хорд AB и MN с диаметром EF , тогда

$$LT = AK = 14, LB = \frac{1}{2}AB = 6 \text{ и } TN = \frac{1}{2}MN = 8. \text{ Пусть } OT = x, \text{ тогда}$$

$$OL = 14 - x. \text{ Из } \triangle OLB \text{ и } \triangle OTN \text{ имеем: } \begin{cases} 6^2 + (14 - x)^2 = R^2, \\ 8^2 + x^2 = R^2. \end{cases}$$

Сравнивая левые части системы, получим: $36 + 196 - 28x + x^2 = 64 + x^2$, $28x = 168$, откуда $x = 6$. Значит, $R^2 = 64 + 36 = 100$, $R = 10$ и $C = 2\pi R = 20\pi$.

III способ.

Пусть $EL = x$, $TF = y$, тогда получим систему:

$$\begin{cases} TN^2 = ET \cdot TF, & \begin{cases} y(14 + x) = 64, \\ BL^2 = EL \cdot LF; & \begin{cases} x(14 + y) = 36. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Вычитая из I уравнения II, получим $14(y - x) = 28$, $y - x = 2$, $y = x + 2$. Подставим значение y в одно из уравнений системы $(x + 2)(14 + x) = 64$, или $x^2 + 16x - 36 = 0$, откуда $x_1 = 2$, $x_2 = -18$ (не имеем смысла). Если $x = 2$, то $y = 4$, тогда $EF = 2R = x + y + LT = 20$, откуда $R = 10$, значит, $C = 2\pi R = 20\pi$.

Ответ: 20π .

22. I способ.

По условию $AM = BM = 14$, т. е. $\triangle AMB$ — равнобедренный. Проведем высоту ME , тогда ME — медиана $\triangle MAB$; $AE = BE = 4$.

$$S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2}AB \cdot ME = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot ME = 4ME. \text{ Из } \triangle AME \text{ } ME^2 = AM^2 - AE^2,$$

$$ME = \sqrt{14^2 - 4^2} = 6\sqrt{5}. S_{\triangle AMB} = 24\sqrt{5}.$$

С другой стороны, $S_{\triangle AMB} = \frac{abc}{4R}$, где a, b, c — стороны $\triangle AMB$, R — радиус описанной окружности.

$$\text{Значит, } \frac{14 \cdot 14 \cdot 8}{4R} = 24\sqrt{5}, \text{ откуда } R = \frac{49}{3\sqrt{5}}, \text{ тогда}$$

$$C = 2\pi R = 2\pi \cdot \frac{49}{3\sqrt{5}} = \frac{98\pi\sqrt{5}}{15}.$$

II способ.

Соединим точку A с центром O окружности. $ME = 6\sqrt{5}$ (см. I способ), $AO = MO = R$. Из $\triangle AOE$ $AO^2 - OE^2 = AE^2$, или $R^2 - (6\sqrt{5} - R)^2 = 16$, откуда

$$\text{находим } R = \frac{49}{3\sqrt{5}}, \text{ и т. д. (см. I способ).}$$

К таблице 11

8. Проведем высоту NK . Пусть $EK = x$. Так как $\angle E = 45^\circ$, то $\angle ENK = 45^\circ$, т. е. $NK = EK = x$. Пусть $MN = y$, тогда $EF = 2x + y = 24$. По условию $EN = FM$, тогда по свойству описанного четырехугольника, имеем: $2EN = EF + NM = 2x + 2y$, или $EN = x + y$. Из $\triangle ENK$ $EN^2 = EK^2 + NK^2$, или $(x + y)^2 = 2x^2$, $x + y = x\sqrt{2}$. Так как $2x + y = 24$, то $y = 24 - 2x$, значит, $x + 24 - 2x = x\sqrt{2}$, $x(\sqrt{2} + 1) = 24$, откуда $x = \frac{24}{\sqrt{2} + 1} = 24(\sqrt{2} - 1)$.

Но $x = 2r$, тогда $r = 12(\sqrt{2} - 1)$.

Следовательно, $S_{кр.} = \pi r^2 = 144\pi(3 - 2\sqrt{2})$.

Ответ: $144\pi(3 - 2\sqrt{2})$.

10. Проведем диаметр окружности $AB \perp MN$ и $AB \perp TK$, проходящий через центр O окружности. По условию $TM = KN$, $S_{TMNK} = 125$ и $EF = 8$ — расстояние между точками касания ее боковых сторон.

Пусть $EM = MA = m$, $TE = TB = b$, $EO = r$ — радиус вписанной окружности; $AB = 2r$, $EC = \frac{1}{2}EF = 4$, где C — точка пересечения EF и AB .

Из $\triangle EOC$ $OC = \sqrt{r^2 - 16}$, тогда $AC = AO - OC = r - \sqrt{r^2 - 16}$, $BC = BO + OC = r + \sqrt{r^2 - 16}$; следовательно, $ME : ET = AC : BC$, или $m : n = (r - \sqrt{r^2 - 16}) : (r + \sqrt{r^2 - 16})$. Из $\triangle MOT$, где $\angle MOT = 90^\circ$ (MO и TO — биссектрисы углов TMN и MTK , где $\angle TMN + \angle MTK = 180^\circ$), имеем: $OE^2 = ME \cdot ET$, или $mn = r^2$.

По условию $S_{TMNK} = 125$, или $\frac{1}{2}(MN + TK) \cdot AB = 125$.

Но $2MT = MN + TK$ (по свойству описанного четырехугольника), тогда $2(m + n) = MN + TK$, или $(m + n) \cdot 2r = 125$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} m : n = (r - \sqrt{r^2 - 16}) : (r + \sqrt{r^2 - 16}), \\ mn = r^2, \\ 2(m + n)r = 125. \end{cases}$$

Пусть для краткости $r - \sqrt{r^2 - 16} = \alpha$, $r + \sqrt{r^2 - 16} = \beta$, тогда $m = \frac{\alpha}{\beta} \cdot n$ и

II уравнение системы примет вид $\frac{\alpha}{\beta} \cdot n^2 = r^2$, следовательно, III уравнение преобразуется к виду $2 \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot n + n \right) \cdot r = 125$, или $2nr \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) = 125$.

Но $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot n = r$, $n = \frac{r}{\sqrt{\alpha/\beta}}$, значит, $2r^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) = 125 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

Преобразуем выражения $\frac{\alpha}{\beta} + 1$ и $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} + 1 &= \frac{r - \sqrt{r^2 - 16}}{r + \sqrt{r^2 - 16}} + 1 = \frac{2r}{r + \sqrt{r^2 - 16}}; \quad \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta} = \frac{\sqrt{r^2 - r^2 + 16}}{r + \sqrt{r^2 - 16}} = \\ &= \frac{4}{r + \sqrt{r^2 - 16}}. \end{aligned}$$

Следовательно, $2r^2 \cdot \frac{2r}{r + \sqrt{r^2 - 16}} = 125 \cdot \frac{4}{r + \sqrt{r^2 - 16}}$, или $r^3 = 125$, $r = 5$.

Тогда $S_{\text{кр.}} = \pi r^2 = 25\pi$.

Ответ: 25π .

19. Соединим точку M с центром окружности, тогда $MO = NO = KO = R$ — радиус описанной окружности. Пусть $OT = x$. По условию $\triangle MKN$ — равнобедренный, где высота KT — медиана и биссектриса.

Тогда $MT = 7$, $KT = 24$ (по условию).

Из $\triangle MKT$ $MK = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$. Заметим, что $KT = R + x = 24$, а из $\triangle MOT$ $R^2 - x^2 = 49$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} R + x = 24, \\ R^2 - x^2 = 49; \end{cases} \quad \begin{cases} R + x = 24, \\ (R - x)(R + x) = 49; \end{cases} \quad \begin{cases} R + x = 24, \\ 24(R - x) = 49; \end{cases} \quad \begin{cases} R + x = 24, \\ R - x = \frac{49}{24}. \end{cases}$$

Складывая почленно уравнения полученной системы, имеем:

$$2R = 24 + \frac{49}{24}; \quad 2R = \frac{625}{24}, \quad R = \frac{625}{48}.$$

Следовательно, $S_{\text{кр.}} = \pi R^2 = \pi \left(\frac{625}{48}\right)^2$.

Ответ: $\pi \left(\frac{625}{48}\right)^2$.

К таблице 12

1. $\triangle AOB$ — равносторонний (по условию), где $OA = 12$, тогда

$$S_{\Delta} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad (\text{площадь правильного треугольника со стороной } a).$$

$$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha, \quad \text{где } R = OA = 12, \alpha = 60^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } S_{\text{ф.}} &= S_{\text{сект.}} - S_{\triangle AOB} = \frac{\pi \cdot 12^2}{360} \cdot 60 - \frac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \\ &= \frac{\pi \cdot 12^2}{6} - \frac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 24\pi - 36\sqrt{3} = 12(2\pi - 3\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Ответ: $12(2\pi - 3\sqrt{3})$.

6. $S_{\text{ф.}} = S_{\text{кр.}} - S_{\text{кв.}} = \pi \cdot OA^2 - S_{\text{кв.}}$, $R = OA = 10$, $a = R\sqrt{2}$, где a — сторона квадрата, R — радиус описанной окружности, тогда $S_{\text{кв.}} = a^2 = (R\sqrt{2})^2 = 200$, значит, $S_{\text{кр.}} = \pi \cdot 100 - 200 = 100(\pi - 2)$.

Ответ: $100(\pi - 2)$.

10. Пусть $a = 15$ — сторона правильного треугольника, тогда

$$\begin{aligned} S_{\text{ф.}} &= \frac{\pi a^2}{3} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}, \text{ или } S_{\text{ф.}} = \frac{\pi \cdot 15^2}{3} - \frac{15^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{15^2}{6} (2\pi - 3\sqrt{3}) = \\ &= 37,5 \cdot (2\pi - 3\sqrt{3}) = 75(\pi - 1,5\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Ответ: $75(\pi - 1,5\sqrt{3})$.

$$\mathbf{12.} \quad S_{\text{ф.}} = S_{MNKT} - \frac{1}{4} S_{\text{кр.}}.$$

$$\begin{aligned} S_{MNKT} &= a^2 = 12^2 = 144; \quad S_{\text{кр.}} = \pi R^2 = \pi \cdot 12^2 = 144\pi, \text{ тогда} \\ \frac{1}{4} S_{\text{кр.}} &= \frac{1}{4} \cdot 144\pi = 36\pi. \text{ Значит, } S_{\text{ф.}} = 144 - 36\pi = 36(4 - \pi). \end{aligned}$$

Ответ: $36(4 - \pi)$.

ОТВЕТЫ

7 класс

Таблица 1

1. $\angle ac = 77^\circ 30'$; $\angle cb = 102^\circ 30'$. 2. $\angle mk = 160^\circ$; $\angle kn = 20^\circ$. 3. $\angle ADC = 80^\circ$; $\angle CDB = 100^\circ$. 4. $\angle MPK = 130^\circ$; $\angle KPN = 50^\circ$. 5. $\angle PLR = 100^\circ$; $\angle RLS = 80^\circ$. 6. 160° . 7. 150° . 8. 90° . 9. 160° . 10. 105° . 11. 135° . 12. $\angle AMN = \angle BMN = 90^\circ$.

Таблица 2

1. $\angle a_1 b_1 = 120^\circ$; $\angle ab_1 = 60^\circ$. 2. 145° ; 145° . 3. 120° . 4. $\angle 3 = 150^\circ$; $\angle 4 = 30^\circ$. 5. $\angle 1 = \angle 3 = 60^\circ$; $\angle 2 = \angle 4 = 120^\circ$. 6. 60° . 7. $\angle 1 = 120^\circ$; $\angle 2 = \angle 3 = 60^\circ$. 8. 135° . 9. $\angle 2 = 50^\circ$; $\angle 3 = 40^\circ$; $\angle 4 = 140^\circ$. 10. $\angle 2 = \angle 3 = 55^\circ$; $\angle 4 = 35^\circ$. 11. $\angle 1 = 110^\circ$; $\angle 2 = \angle 3 = 35^\circ$. 12. 180° . 13. 110° .

Таблица 4

1. $AC = BC = 8$; $AB = 4$. 2. $MK = KN = 12$; $MN = 2$. 3. 0,6; 0,6. 4. $QR = RE = 2,8$; $QE = 0,8$. 5. $EF = 15$; $EM = MF = 10$. 6. 0,8. 7. 4,9. 8. 50. 9. 10. 10. $RT = TS = 12$, $RS = 21$. 11. 10; 10. 12. 6; 6. 13. 9. 14. 15.

Таблица 5

1. 75° . 2. 140° . 3. 30° . 4. 135° . 5. 50° . 6. 120° . 7. 90° . 8. 40° . 9. 60° . 10. 30° . 11. 40° . 12. 20° . 13. 60° . 14. 60° . 15. 60° . 16. 110° . 17. 80° . 18. 50° .

Таблица 7

1. $\angle 1 = 106^\circ$; $\angle 2 = 74^\circ$. 2. $\angle 1 = 108^\circ$; $\angle 2 = 72^\circ$. 3. $\angle 1 = 130^\circ$; $\angle 2 = 50^\circ$. 4. $\angle 1 = 100^\circ$; $\angle 2 = 80^\circ$. 5. $\angle 1 = 67^\circ 30'$; $\angle 2 = 112^\circ 30'$. 6. $\angle N = 60^\circ$; $\angle M = 30^\circ$. 7. $\angle A = 60^\circ$; $\angle ABC = 30^\circ$. 8. 43° . 9. 68° . 10. 65° . 11. 30° ; 30° . 12. 74° . 13. 55° .

Таблица 8

1. $\angle R = 45^\circ$; $\angle P = 105^\circ$; $\angle Q = 30^\circ$. 2. $\angle M = 80^\circ$; $\angle N = 60^\circ$; $\angle K = 40^\circ$. 3. $\angle P = \angle R = 67^\circ 30'$; $\angle S = 45^\circ$. 4. $\angle Q = \angle M = 40^\circ$; $\angle L = 100^\circ$. 5. $\angle A = 40^\circ$; $\angle C = 100^\circ$. 6. $\angle M = 60^\circ$; $\angle Q = 80^\circ$; $\angle QPM = 40^\circ$. 7. $\angle S = 70^\circ$; $\angle STR = 40^\circ$. 8. $\angle BAC = \angle B = 72^\circ$; $\angle C = 36^\circ$. 9. $\angle M = 75^\circ$; $\angle MNP = 70^\circ$; $\angle P = 35^\circ$. 10. $\angle P = 25^\circ$; $\angle TSP = 40^\circ$.

Таблица 9

1. 120° . 2. 80° . 3. $\angle T = 90^\circ$; $\angle S = 60^\circ$. 4. $\angle B = 70^\circ$; $\angle C = 40^\circ$. 5. 60° ; 60° ; 60° . 6. $\angle E = 90^\circ$; $\angle P = 30^\circ$. 7. 40° ; 40° . 8. $\angle A = 50^\circ$; $\angle C = 70^\circ$. 9. $\angle M = \angle K = 50^\circ$; $\angle N = 80^\circ$. 10. $\angle D = 60^\circ$; $\angle E = 40^\circ$. 11. $\angle A = 30^\circ$; $\angle B = 60^\circ$; $\angle C = 90^\circ$. 12. $\angle A = \angle B = 45^\circ$; $\angle D = 90^\circ$. 13. 60° ; 60° . 14. $\angle S = \angle P = 65^\circ$; $\angle SKP = 50^\circ$. 15. $\angle P = \angle R = 45^\circ$; $\angle PQR = 90^\circ$. 16. $\angle D = \angle F = 45^\circ$; $\angle DEF = 90^\circ$. 17. $\angle BAC = 60^\circ$; $\angle ABC = 30^\circ$; $\angle C = 90^\circ$. 18. $\angle L = 65^\circ$; $\angle MKN = \angle KNL = 45^\circ$; $\angle NKL = 70^\circ$. 19. $\angle COB = \angle AOD = 90^\circ$; $\angle B = 65^\circ$; $\angle D = 25^\circ$. 20. $\angle QOC = \angle MOR = 55^\circ$; $\angle M = 45^\circ$; $\angle R = 80^\circ$. 21. $\angle KMN = 70^\circ$; $\angle KML = \angle LMN = 35^\circ$; $\angle MLK = 105^\circ$; $\angle MLN = 75^\circ$. 22. $\angle PMA = 50^\circ$; $\angle APM = 60^\circ$; $\angle A = 70^\circ$. 23. $\angle MSL = 70^\circ$; $\angle L = 40^\circ$. 24. $\angle MPL = \angle MLP = 60^\circ$; $\angle PNL = \angle MNL = 90^\circ$; $\angle PKM = \angle PKL = 90^\circ$. 25. $\angle C = 90^\circ$; $\angle B = 50^\circ$; $\angle A = 40^\circ$. 26. $\angle P = 40^\circ$; $\angle PTS = 60^\circ$. 27. $\angle T = 40^\circ$; $\angle MRK = 10^\circ$; $\angle KPT = 50^\circ$; $\angle RKT = 90^\circ$. 28. $\angle ABD = 70^\circ$; $\angle D = 30^\circ$; $\angle ABC = 40^\circ$; $\angle CBD = 30^\circ$; $\angle BCD = 120^\circ$. 29. $\angle P = 30^\circ$; $\angle KMP = 50^\circ$; $\angle NMP = 30^\circ$; $\angle MNP = 120^\circ$. 30. $\angle MSN = 120^\circ$; $\angle MSK = 35^\circ$; $\angle PSN = 25^\circ$; $\angle MKS = 110^\circ$; $\angle SPN = 130^\circ$; $\angle SKP = 70^\circ$; $\angle SPK = 50^\circ$; $\angle KSP = 60^\circ$. 31. 165° . 32. 125° .

Таблица 10

1. $AB = 8$; $BC = 4$. 2. 15. 3. $MP = 27$; $PN = 9$. 4. 54. 5. 18. 6. 26. 7. 110° . 8. 15° . 9. $AB = 24$; $BC = 12$. 10. 9,75. 11. 14. 12. $\angle A = \angle B = 30^\circ$; $\angle ACB = 120^\circ$. 13. $\angle T = 50^\circ$; $\angle TPS = \angle TSP = 65^\circ$. 14. 115° . 15. $\angle KNM = 90^\circ$; $\angle NKM = 36^\circ$; $\angle KNM = 54^\circ$. 16. $CB = 27$; $CD = 9$. 17. $SQ = 15,6$; $\angle RQT = 150^\circ$. 18. 6. 19. 44. 20. 45° . 21. 70° .

Таблица 12

1. 13. 2. 15. 3. 10. 4. 6. 5. 4. 6. 7,5. 7. 6. 8. 5. 9. 14. 10. 7. 11. 8. 12. 10. 13. 13. 14. 13. 15. 7. 16. 4.

8 класс

Таблица 2

1. 20. 2. 10. 3. 14. 4. 16. 5. 22. 6. 28. 7. 22. 8. 24. 9. 22. 10. 32. 11. 40. 12. 52. 13. 60. 14. 32. 15. 48. 16. 48. 17. 64. 18. 16. 19. 20. 20. 112. 21. 72. 22. 28. 23. 60. 24. 36.

Таблица 3

1. $\angle M = \angle P = 70^\circ$; $\angle MNP = \angle MKP = 110^\circ$. 2. $\angle A = \angle C = 70^\circ$; $\angle B = \angle ADC = 110^\circ$. 3. $\angle L = \angle S = \angle K = \angle R = 90^\circ$. 4. $\angle M = \angle E = \angle MFE =$

$= \angle MDE = 90^\circ$. 5. $\angle P = \angle M = 60^\circ$; $\angle PNM = \angle PLM = 120^\circ$. 6. $\angle E = \angle M = 120^\circ$; $\angle EFM = \angle EKM = 60^\circ$. 7. $\angle D = \angle B = \angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$. 8. $\angle P = \angle N = 65^\circ$; $\angle PMN = \angle PKN = 115^\circ$. 9. $\angle KFE = \angle KNE = \angle FKN = \angle FEN = 90^\circ$. 10. $\angle S = \angle L = 70^\circ$; $\angle SPL = \angle SML = 110^\circ$. 11. $\angle LKN = \angle LMN = \angle KLM = \angle KNM = 90^\circ$. 12. $\angle B = \angle D = \angle DAB = \angle DCB = 90^\circ$. 13. $\angle ADC = \angle DCB = \angle CBA = \angle DAB = 90^\circ$. 14. $\angle M = 60^\circ$; $\angle MKL = \angle MSL = 120^\circ$. 15. $\angle MRK = \angle RKL = \angle MLK = \angle LMR = 90^\circ$. 16. $\angle N = \angle T = 70^\circ$; $\angle S = \angle NPT = 110^\circ$. 17. $\angle PLK = \angle PTK = 80^\circ$; $\angle TPL = \angle TKL = 100^\circ$. 18. $\angle A = \angle C = 60^\circ$; $\angle ABC = \angle D = 120^\circ$.

Таблица 4

1. $\angle M = \angle R = 70^\circ$; $\angle P = \angle N = 110^\circ$. 2. $\angle A = \angle C = 60^\circ$; $\angle B = \angle D = 120^\circ$. 3. $\angle R = \angle L = 60^\circ$; $\angle S = \angle M = 120^\circ$. 4. $\angle M = \angle R = \angle K = \angle N = 90^\circ$. 5. $\angle TPK = \angle PKS = \angle KST = \angle STK = 90^\circ$. 6. $\angle DAB = \angle DCB = 60^\circ$; $\angle ADC = \angle ABC = 120^\circ$. 7. $\angle RMK = \angle MKL = \angle KLR = \angle MRL = 90^\circ$. 8. $\angle FSM = \angle FTM = 80^\circ$; $\angle SFT = \angle SMT = 100^\circ$. 9. $\angle DAB = \angle DCB = 36^\circ$; $\angle ADC = \angle ABC = 144^\circ$.

Таблица 5

1. Квадрат со стороной 9. 2. Ромб со стороной 9. 3. 8,5; 8,5; 9,5; 9,5. 4. 7,2; 7,2; 10,8; 10,8. 5. Квадрат со стороной 9. 6. 6; 6; 12; 12. 7. 6; 6; 12; 12. 8. 6,75; 6,75; 11,25; 11,25. 9. 8; 8; 10; 10. 10. 8; 8; 10; 10. 11. 4; 4; 14; 14. 12. 8; 8; 10; 10.

Таблица 6

1. $\angle B = 110^\circ$; $\angle C = 130^\circ$. 2. $\angle E = \angle N = 80^\circ$; $\angle M = 100^\circ$. 3. $\angle P = 105^\circ$; $\angle S = 80^\circ$. 4. $\angle E = \angle F = 90^\circ$; $\angle M = 115^\circ$. 5. $\angle K = \angle KLM = 120^\circ$; $\angle M = \angle KNM = 60^\circ$. 6. $\angle RFK = \angle K = 55^\circ$; $\angle R = \angle RMK = 125^\circ$. 7. $\angle BAD = 60^\circ$; $\angle B = \angle BCD = 120^\circ$. 8. $\angle SMK = 90^\circ$; $\angle K = 65^\circ$; $\angle SRK = 115^\circ$. 9. $\angle PTO = 90^\circ$; $\angle O = 55^\circ$; $\angle PLO = 125^\circ$. 10. $\angle ENM = \angle FMN = 60^\circ$; $\angle NEF = \angle MFE = 120^\circ$. 11. $\angle TKF = 90^\circ$; $\angle TMF = 120^\circ$. 12. $\angle KRT = 90^\circ$; $\angle KFT = 135^\circ$. 13. $\angle ABC = 105^\circ$; $\angle C = 125^\circ$; $\angle D = 55^\circ$. 14. $\angle M = 70^\circ$; $\angle T = 50^\circ$; $\angle MLS = 110^\circ$; $\angle LST = 130^\circ$. 15. $\angle T = \angle TRF = 70^\circ$; $\angle TEF = \angle F = 120^\circ$. 16. $\angle NOE = 65^\circ$; $\angle ONM = 115^\circ$; $\angle OEM = 75^\circ$; $\angle NME = 105^\circ$. 17. $\angle MSK = 65^\circ$; $\angle SMN = 115^\circ$; $\angle MNK = 100^\circ$; $\angle SKN = 80^\circ$. 18. $\angle NAB = 110^\circ$; $\angle ANM = 70^\circ$; $\angle ABM = 100^\circ$; $\angle NMB = 80^\circ$.

Таблица 7

1. 44. 2. 84. 3. 132. 4. 20. 5. 34. 6. 84. 7. 62. 8. 68,8. 9. 50. 10. 36.

Таблица 8

1. 18. 2. 49. 3. 60. 4. 108. 5. 36. 6. 72. 7. 100. 8. 33. 9. 40. 10. $75\sqrt{3}$.
11. $48\sqrt{3}$. 12. 64. 13. 126. 14. 108. 15. 112.

Таблица 9

1. 32. 2. 156. 3. 32. 4. 126. 5. $162\sqrt{3}$. 6. $60\sqrt{3}$. 7. 72. 8. 112,5. 9. 864.
10. 160. 11. 40. 12. 768. 13. $84,5\sqrt{3}$. 14. 480,5. 15. 48. 16. $373\frac{1}{3}$. 17. 48.
18. 140. 19. 48. 20. 262,5. 21. 144. 22. $48\sqrt{3}$. 23. 200. 24. 48.

Таблица 10

1. 165. 2. 18. 3. 60. 4. 169. 5. $16\sqrt{3}$. 6. 80. 7. 96. 8. 84. 9. 8. 10. 18,5.
11. $\sqrt{191}/4$. 12. 270. 13. $24\sqrt{5}$. 14. 168. 15. 196. 16. 64. 17. $8\sqrt{3}$. 18. $288\sqrt{3}$.
19. 36. 20. 25. 21. 84.

Таблица 11

1. 32. 2. 240. 3. 58,5. 4. 264. 5. 96. 6. 214,5. 7. 36. 8. 47,5. 9. 144.
10. 176. 11. 300. 12. 108. 13. 96. 14. 294. 15. 48. 16. $58\sqrt{3}$. 17. 292.
18. 180. 19. 784. 20. 32. 21. 216. 22. 45. 23. 204. 24. 160. 25. 70. 26. 49.
27. 64.

Таблица 12

1. 5. 2. $\sqrt{153}$. 3. $\sqrt{10}$. 4. 3. 5. 15. 6. $3\sqrt{3}$. 7. $16/\sqrt{3}$. 8. 24. 9. $12\sqrt{3}$.
10. $60/13$. 11. $120/13$. 12. 13. 13. 16. 14. $14\sqrt{6}/5$. 15. $4\sqrt{13}$. 16. $128/17$.
17. $5\sqrt{3}$. 18. $8\sqrt{2}$. 19. $\sqrt{82}$. 20. 10. 21. $5\sqrt{3}$. 22. 8. 23. 8. 24. $12\sqrt{3}$. 25. 7,2.
26. 10. 27. $16\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$. 28. 4. 29. 13. 30. 8. 31. $\sqrt{937}$. 32. 2. 33. $\sqrt{17}$.
34. 5. 35. 6. 36. 15. 37. 10. 38. 15. 39. 20. 40. $120/13$. 41. 29. 42. $12/7$.
43. 9. 44. 34. 45. 15; 20. 46. 7. 47. 6. 48. 22. 49. 9. 50. 10. 51. 3. 52. 26.
53. $8\sqrt{3}$. 54. 10.

Таблица 13

1. 24. 2. $x = 8; y = 14; z = 12$. 3. $x = 18; y = 15$. 4. $x = 8; y = 12; z = 16$.
5. $x = 20; y = 50; z = 40$. 6. $x = 42; y = 28; z = 21$. 7. $x = 27; y = 21; z = 24$.
8. $x = 27; y = 21; z = 24$. 9. 100. 10. 5. 11. $3\sqrt{3}$. 12. $x = 72; y = 98$.
13. 13,125. 14. $x = 5; y = 7$. 15. $x = 14; y = 21$. 16. 48. 17. $x = 40; y = 90$. 18. $x = 39;$
 $y = 52$. 19. 6. 20. 60. 21. 168. 22. 72. 23. 18. 24. 48. 25. 64. 26. 92. 27. 60.

28. 7,5. 29. 10,8. 30. $x = 11\frac{3}{7}$; $y = 8\frac{4}{7}$. 31. $5\frac{1}{3}$. 32. $x = 54$; $y = 48$. 33. 45.
 34. $x = 9$; $y = 15$. 35. $x = 15\frac{5}{11}$; $y = 18\frac{6}{11}$. 36. 31,2.

Таблица 14

1. $x = 15$; $y = 8$. 2. $x = 12$; $y = 14$. 3. 20. 4. 8,75. 5. $5\frac{15}{17}$. 6. $x = 12$; $y = 36$.
 7. $x = 18$; $y = 30$. 8. $x = 12$; $y = 13$. 9. 2,5. 10. 25,6. 11. $x = 4$; $y = 8$. 12. 4.
 13. $x = 24$; $y = 40$. 14. $x = 20$; $y = 16$. 15. $x = 11\frac{3}{7}$; $y = 4\frac{4}{7}$. 16. $2\frac{1}{7}$. 17. $37\frac{1}{3}$.
 18. $x = 8$; $y = 12$. 19. $8\frac{4}{7}$. 20. $x = 9,6$; $y = 22,4$. 21. 16. 22. $x = 12$; $y = 4$. 23. $x = 4$;
 $y = 6$. 24. 12. 25. $x = 6\sqrt{3}$; $y = 12\sqrt{3}$. 26. $x = 3,5$; $y = 3,75$. 27. $x = 36$; $y = 12$.
 28. $x = 2,4$; $y = 7,2$.

Таблица 16

1. 27. 2. 12. 3. 48. 4. 120. 5. 62. 6. $AK = 6$; $KC = 12$. 7. $RS = 8$; $RF = 6$.
 8. 28. 9. 18. 10. $9\sqrt{3}/2$. 11. $3\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$. 12. $EF = MN = 24$. 13. 12.
 14. 0,5. 15. $4(1 + 2\sqrt{2})$. 16. $MR = 4,8$; $MS = 9,6$; $RS = 6,4$. 17. $FE = 12,5$;
 $EC = 10$; $FC = 7,5$.

Таблица 17

1. $KN = 24$; $MT = 50/13$; $TN = 288/13$. 2. $NL = 9$; $LM = 16$; $NK = 15$;
 $KM = 20$. 3. $ME = 4,5$; $MK = 7,5$; $KN = 10$. 4. $MT = 25/13$; $TN = 144/13$.
 5. $KN = 5\sqrt{21}$; $ME = 4$; $EN = 21$. 6. $KN = 30$; $KM = 40$; $NF = 18$; $FM = 32$.
 7. $KM = 5\sqrt{61}$; $KN = 6\sqrt{61}$; $MN = 61$; $MT = 25$; $TN = 36$. 8. $MN = 9$;
 $ME = EN = 4,5$; $EF = 0,5$; $FN = 4$. 9. 90. 10. 246. 11. $144/13$. 12. $64\sqrt{3}$.
 13. $54/13$. 14. 156. 15. 84,375.

Таблица 18

1. $9\sqrt{3}$. 2. $16\sqrt{2}$. 3. $4\sqrt{3}$. 4. 15. 5. 5. 6. $15\sqrt{2}$. 7. $9\sqrt{3}$. 8. $6\sqrt{3}$. 9. $12\sqrt{2}$.
 10. 12. 11. $6\sqrt{3}$. 12. $4(4 + \sqrt{3})$. 13. $10(\sqrt{3} + 1)$. 14. $10\sqrt{6}/3$. 15. $6\sqrt{6}$. 16. $5\sqrt{2}$.

Таблица 19

1. 36. 2. $64\sqrt{3}$. 3. $21\sqrt{3}$. 4. $\frac{5}{2}(5\sqrt{3} + 6)$. 5. 73,5. 6. $KL = 7,5$; $\cos \angle K = 0,6$.
 7. $81\sqrt{3}/4$; $\cos \angle ACB = 0,5$. 8. $\sin \angle F = 3/\sqrt{13}$; $\cos \angle F = 2/\sqrt{13}$; $\operatorname{tg} \angle F = 3/2$;

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \angle F = 2/3. \quad 9. \quad 2/3. \quad 10. \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1). \quad 11. \quad 192\sqrt{6}. \quad 12. \quad \sin \angle K = 3/\sqrt{10}; \\ \cos \angle K = 1/\sqrt{10}; \quad \operatorname{tg} \angle K = 3; \quad \operatorname{ctg} \angle K = 1/3. \quad 13. \quad \sin \angle B = 2\sqrt{6}/5; \quad \cos \angle B = 1/5; \\ \operatorname{tg} \angle B = 2/\sqrt{6}; \quad \operatorname{ctg} \angle B = 1/2\sqrt{6}. \quad 14. \quad \sin \alpha = 12/13; \quad \cos \alpha = 5/13; \quad \operatorname{tg} \alpha = 12/5; \\ \operatorname{ctg} \alpha = 5/12. \quad 15. \quad \sin \angle K = 0,8; \quad \cos \angle K = 0,6. \quad 16. \quad \sin \angle R = \sqrt{3}/2; \quad \operatorname{tg} \angle R = \sqrt{3}. \\ 17. \quad \cos \alpha = 0,4; \quad \operatorname{ctg} \alpha = 2/\sqrt{21}. \quad 18. \quad \sin \angle A = \sqrt{2}/6; \quad \operatorname{tg} \angle A = \sqrt{17}/17. \\ 19. \quad \cos \angle B = 7/25; \quad \operatorname{ctg} \angle B = 7/24. \quad 20. \quad \sin \alpha \approx 0,46; \quad \operatorname{tg} \alpha \approx 0,52. \quad 21. \quad \sin \angle A = \\ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1); \quad \cos \angle A = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1). \quad 22. \quad 0,8. \end{aligned}$$

Таблица 20

$$\begin{aligned} 1. \quad 6\sqrt{3}. \quad 2. \quad 60^\circ. \quad 3. \quad 30^\circ. \quad 4. \quad 120^\circ. \quad 5. \quad 9. \quad 6. \quad 3\sqrt{3}; \quad 3\sqrt{3}. \quad 7. \quad 16 \text{ или } 9. \quad 8. \quad 60^\circ. \\ 9. \quad 15. \quad 10. \quad AM = 10; \quad BM = 10\sqrt{5}. \quad 11. \quad AB = 12; \quad CD = 16. \quad 12. \quad 2. \quad 13. \quad 20; \quad 20. \\ 14. \quad 1,2\sqrt{6}. \quad 15. \quad 20. \quad 16. \quad 40; \quad 40. \quad 17. \quad 14. \quad 18. \quad 6. \quad 19. \quad 24; \quad 24. \quad 20. \quad 8,5; \quad 8,5. \quad 21. \quad 12(2 + \sqrt{3}). \\ 22. \quad 70. \quad 23. \quad 2,8\sqrt{51}. \end{aligned}$$

Таблица 21

$$\begin{aligned} 1. \quad 39^\circ. \quad 2. \quad 8. \quad 3. \quad 32\sqrt{2}. \quad 4. \quad 70^\circ. \quad 5. \quad 100^\circ. \quad 6. \quad 28^\circ. \quad 7. \quad 110^\circ. \quad 8. \quad 101^\circ. \quad 9. \quad 44^\circ. \\ 10. \quad 32^\circ. \quad 11. \quad 40^\circ. \quad 12. \quad 3,5. \quad 13. \quad 12. \quad 14. \quad 50^\circ. \quad 15. \quad 1,4. \quad 16. \quad 40^\circ. \quad 17. \quad 4. \quad 18. \quad 18^\circ. \\ 19. \quad 157^\circ. \quad 20. \quad 45^\circ. \quad 21. \quad 100^\circ. \quad 22. \quad 75^\circ. \quad 23. \quad 5\sqrt{3}. \quad 24. \quad 80^\circ. \quad 25. \quad 30. \quad 26. \quad 10. \\ 27. \quad 114^\circ. \quad 28. \quad 16. \quad 29. \quad 10. \quad 30. \quad 28,125. \quad 31. \quad 15. \quad 32. \quad 1. \quad 33. \quad 8\sqrt{3}. \quad 34. \quad 14,4. \quad 35. \quad 12. \\ 36. \quad 30\sqrt{3}. \quad 37. \quad 100^\circ. \quad 38. \quad 7,5. \quad 39. \quad 8\sqrt{3}. \quad 40. \quad 10. \quad 41. \quad 15. \quad 42. \quad 8\sqrt{5}. \quad 43. \quad 6. \quad 44. \quad 4\sqrt{145}. \\ 45. \quad 157^\circ 30'. \quad 46. \quad 70^\circ. \quad 47. \quad 40^\circ. \quad 48. \quad 123^\circ 45'. \quad 49. \quad 40^\circ. \quad 50. \quad 100^\circ. \quad 51. \quad 82^\circ 30'. \\ 52. \quad 108^\circ. \quad 53. \quad 67^\circ 30'. \quad 54. \quad 10^\circ. \end{aligned}$$

Таблица 22

$$\begin{aligned} 1. \quad 20. \quad 2. \quad 24^\circ. \quad 3. \quad 38^\circ. \quad 4. \quad 7. \quad 5. \quad 24. \quad 6. \quad 10. \quad 7. \quad 2\sqrt{61}. \quad 8. \quad 20\sqrt{3}. \quad 9. \quad 130^\circ. \quad 10. \quad 4. \\ 11. \quad 10. \quad 12. \quad 4,8. \quad 13. \quad 180. \quad 14. \quad 80. \quad 15. \quad 15. \quad 16. \quad 64\sqrt{3}. \quad 17. \quad 240/13. \end{aligned}$$

Таблица 23

$$\begin{aligned} 1. \quad 20/3. \quad 2. \quad 120. \quad 3. \quad 60. \quad 4. \quad 27. \quad 5. \quad 40. \quad 6. \quad 80. \quad 7. \quad \angle L = \angle M = 63^\circ; \quad \angle E = 54^\circ. \\ 8. \quad \angle A = 66^\circ; \quad \angle B = 24^\circ; \quad \angle ACB = 90^\circ. \quad 9. \quad 5\sqrt{3}. \quad 10. \quad 100^\circ. \quad 11. \quad 4. \quad 12. \quad 6. \quad 13. \quad 9. \\ 14. \quad 20(\sqrt{3} + 1). \quad 15. \quad 25/8. \quad 16. \quad 4. \quad 17. \quad 16. \quad 18. \quad 10. \quad 19. \quad 12\sqrt{3}. \quad 20. \quad 60^\circ. \quad 21. \quad 216. \\ 22. \quad 128. \quad 23. \quad 40. \quad 24. \quad 3. \quad 25. \quad 8. \quad 26. \quad 15. \quad 27. \quad 4. \quad 28. \quad 6. \quad 29. \quad 8. \quad 30. \quad 13. \quad 31. \quad 6. \\ 32. \quad 48\sqrt{3}(2 + \sqrt{3}). \quad 33. \quad 8. \quad 34. \quad 4(\sqrt{3} + 1). \quad 35. \quad ME = 8\sqrt{5}; \quad EF = 12. \quad 36. \quad 96. \end{aligned}$$

37. $RK = 18$; $QK = 24$. 38. 30. 39. 25. 40. 4. 41. 28. 42. 6. 43. 10. 44. 3.
 45. $13/4\sqrt{61}$. 46. 16. 47. 960. 48. 30 или 40. 49. $25/6$. 50. 240. 51. 1,2.
 52. 80. 53. $AB = 24$; $DC = 30$. 54. $\angle M = 127^\circ$; $\angle N = 105^\circ$. 55. 10. 56. 12.
 57. 30. 58. $MN = 6$; $NK = 18$; $KL = 21$; $LM = 9$. 59. $5\sqrt{3}$. 60. $100\sqrt{2}$.
 61. 36. 62. 66° ; 66° ; 114° ; 14° . 63. 94,08. 64. 384. 65. 16. 66. 10. 67. $48\sqrt{3}$.
 68. 4. 69. 10. 70. $5\sqrt{2}$. 71. 3. 72. 20. 73. 80. 74. 20. 75. 3. 76. 168. 77. 720.
 78. 6. 79. 10. 80. 10. 81. 30° . 82. 588. 83. 9,6. 84. $42\sqrt{6}$. 85. 11. 86. 15.

Таблица 24

1. а) $\vec{m} \uparrow \uparrow \vec{e}$; $\vec{m} \uparrow \uparrow \vec{p}$; б) $\vec{n} \uparrow \uparrow \vec{k}$; $\vec{n} \uparrow \uparrow \vec{f}$; в) $\vec{m} \uparrow \downarrow \vec{c}$; $\vec{m} \uparrow \downarrow \vec{d}$; $\vec{n} \uparrow \downarrow \vec{a}$; $\vec{n} \uparrow \downarrow \vec{b}$. 2. а) $\vec{c}$ и $\vec{n}$; $\vec{c}$ и $\vec{m}$; $\vec{m}$ и $\vec{n}$; $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) $\vec{c} \uparrow \uparrow \vec{m}$; $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$; в) $\vec{c} \uparrow \downarrow \vec{n}$; $\vec{n} \uparrow \downarrow \vec{m}$; г) $\vec{a} = \vec{b}$, $\vec{c} = \vec{m}$. 3. а) $\vec{m}$ и $\vec{a}$; $\vec{m}$ и $\vec{b}$; $\vec{n}$ и $\vec{d}$; б) $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$; в) $\vec{n} \uparrow \downarrow \vec{d}$; $\vec{m} \uparrow \downarrow \vec{a}$; $\vec{m} \uparrow \downarrow \vec{b}$; г) нет. 8. 0. 12. DF . 13. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$.
 14. $OM = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; $MA = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$. 15. $RK = -\vec{n}$; $KT = -\vec{m} + \vec{n}$; $SR = \vec{m} - \vec{n}$.
 16. $EA = \frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n}$; $FB = \frac{1}{2}\vec{m} - \vec{n}$. 17. $KO = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$. 18. $AK = \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$;
 $KB = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$. 19. $AM = \frac{5}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$. 20. $KE = \frac{7}{5}\vec{m} - \frac{2}{5}\vec{n}$. 21. $BM = -\vec{m}$;
 $NC = \vec{n}$; $MN = -\vec{m} + \vec{n}$; $BN = -2\vec{m} + \vec{n}$. 26. 12. 27. 6. 28. 13. 29. 8. 30. 2.
 31. 32. 32. 36. 33. $\sqrt{73}$. 34. $|BD| = \sqrt{194}$; $|CD| = 5\sqrt{2}$; $|AC| = \sqrt{89}$. 35. 3.
 36. а) $a\sqrt{3}$; б) a ; в) $a\sqrt{3}$; г) a ; д) a . 37. 1) -4; 2) 20; 3) 28; 4) 20; 5) 28;
 6) 20; 7) -4; 8) 20.

Таблица 25

1. 80. 2. 7,5. 3. $SM = 16$; $QR = 24$. 4. $NE = 20$; $MF = 40$. 5. 8. 6. $ST = 10$;
 $MN = 20$. 7. 10. 8. $RT = 26$; $EF = 18$. 9. $MN = 5$; $DC = 3$. 10. 6. 11. 8. 12. 4.
 13. 6. 14. 9. 15. 9,5. 16. 0,5. 17. 30. 18. 14. 19. 12. 20. 9,8. 21. $3\sqrt{2}/2$.
 22. 5. 23. 8. 24. 10. 25. 14,15. 26. $BC = 2$; $AD = 6$.

9 класс

Таблица 1

1. $LN = \vec{m} - \vec{n}$; $KM = \vec{m} + \vec{n}$. 2. $BD = -\vec{a} - \vec{b}$; $CA = -\vec{a} + \vec{b}$. 3. $EK =$
 $= -\vec{m} + \vec{n}$; $FM = \vec{m} + \vec{n}$. 4. $TM = \vec{a} - \vec{b}$; $ST = -\vec{a} - \vec{b}$. 5. $FT = \frac{3}{4}\vec{m} + \frac{3}{4}\vec{n}$.

6. а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) -1 ; д) -1 ; е) $-\frac{1}{4}$; ж) 3; з) $-\frac{4}{3}$; и), к) число не существует.

Таблица 2

1. $O(0; 0)$, $K(3; 0)$, $M(0; 2)$. 2. $O(0; 0)$, $T(6; 0)$, $M(6; 3)$, $C(0; 3)$. 3. $Q(-2; 2)$, $P(2; 2)$, $N(2; -2)$. 4. $T(14; -6)$. 5. $MN\{-5; -1\}$. 6. $M(4; 4)$. 7. $C(-2; 32)$. 8. 16 или -8 . 9. 3 или $-2,6$. 10. $\sqrt{5}$. 11. $\sqrt{26}$. 12. $\sqrt{2}$. 13. $M(-3; 3)$. 14. $C(2,5; 4)$. 15. $K(18; 12)$. 16. 16. 17. $\approx 12,9$. 18. $AC = \sqrt{13}$; $OC = \sqrt{85}$; $C(9; 2)$. 19. $\sqrt{241}/2$. 20. $BC = \sqrt{41}$; $OB = \sqrt{65}$.

Таблица 3

1. 50; 50. 2. $2\sqrt{85}$. 3. 26. 4. $\angle A = 60^\circ$; $\angle B = 30^\circ$; $\angle C = 90^\circ$. 5. $2\sqrt{109}$. 6. $2\sqrt{53}$. 7. $2\sqrt{19}$. 8. $\angle M = \angle P = 45^\circ$; $\angle N = 90^\circ$. 9. $\sqrt{185}/2$.

Таблица 4

1. $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$. 2. B, C, D . 3. $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$. 4. $x^2 + (y - 3)^2 = 13$. 5. $(x - 3)^2 + y^2 = 13$. 6. $x^2 + y^2 = 13$. 7. $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$. 9. а) $(2; -3)$, $(2; 3)$; б) $(-2; 3)$, $(2; 3)$. 10. а) $(2; 7)$, $(2; 1)$; б) $(5; 4)$, $(-1; 4)$. 11. $x^2 + y^2 = 40$. 12. $x^2 + (y - 2)^2 = 10$. 13. $x^2 + (y - 4)^2 = 25$. 14. $(x - 1)^2 + y^2 = 18$.

Таблица 5

1. $x = 3$. 2. $y = 10$. 3. 4. 4. $y + 5x = 0$. 5. 1. 6. $7x - y + 3 = 0$. 7. 13,5. 8. $7x - y + 6 = 0$. 9. $x - y = 0$. 10. $2x - 5y + 20 = 0$; $2x + 5y - 20 = 0$; $2x - 5y - 20 = 0$; $2x + 5y + 20 = 0$.

Таблица 6

1. $\sqrt{2}$. 2. $25\sqrt{3}/4$. 3. $4\sqrt{5}$. 4. 24. 5. 60. 6. $25\sqrt{2}/4$. 7. $5\sqrt{3}$. 8. 50. 9. 30. 10. $80\sqrt{3}$. 11. $60\sqrt{2}$. 12. 128. 13. 169. 14. $36\sqrt{3}$. 15. $5\sqrt{3}$. 16. $16\sqrt{2}$. 17. 32. 18. $16\sqrt{2}$. 19. 16.

Таблица 7

1. $x = 8\sqrt{2}$; $y = 4\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})$. 2. $x \approx 19,9$; $y \approx 25,6$. 3. $x \approx 16,3$; $y \approx 22,3$. 4. $x \approx 13,9$; $y \approx 9,8$. 5. $x \approx 1,8$; $y \approx 0,5$. 6. $x \approx 8,8$; $y \approx 12$. 7. $x \approx 10,4$; $y \approx 14,1$. 8. $x \approx 14,1$; $y \approx 19,3$. 9. $x = 6,5$; $y \approx 4,9$. 10. $x \approx 8,3$; $y \approx 14,3$. 11. $x \approx 9,9$; $y \approx 9,6$. 12. $x = 1$; $y = \sqrt{6}/3$. 13. $x \approx 27,3$; $y \approx 17,8$.

14. $x = \sqrt{52 - 24\sqrt{2}} \approx 4,2$; $y = \sqrt{52 + 24\sqrt{2}} \approx 9,3$. 15. $x = y \approx 11$. 16. $x = 4\sqrt{19}$; $y = 4\sqrt{7}$. 17. $x \approx 22,7$; $y \approx 24,3$.

Таблица 8

1. $\approx 30,8$. 2. $\approx 18^\circ$. 3. $\sqrt{13}$. 4. $175 / 4\sqrt{66}$. 5. $x = 4\sqrt{14} / 3$; $y = 26/3$. 6. $\sqrt{63}$. 7. $x \approx 5,8$; $y \approx 4,1$. 8. $x \approx 15,5$; $y \approx 18,4$. 9. $x \approx 3,9$; $y \approx 10,3$. 10. $x = 13$; $y = 21$. 11. $x = 7$; $y = 15$. 12. $x = 18$; $y = 48$. 13. $x = 9$; $y = 12$. 14. 13. 15. $x = 16,8$; $y = 36$. 16. $x = 8$; $y = 30$. 17. $x = 168\sqrt{2} / 5$; $y = 25$. 18. $x = 10$; $y = 15$. 19. $x_1 = 25$; $y_1 = 25$; $x_2 \approx 10,5$; $y_2 \approx 32,2$; $x_3 \approx 36,7$; $y_3 \approx 24,5$; . 20. $x = 20$; $y = 30$. 21. $\sqrt{118} / 2$. 22. 1) $x = 21\sqrt{6} / 2$; $y = 15\sqrt{6} / 2$; 2) $x = 51\sqrt{66} / 22$; $y = 15\sqrt{66} / 22$. 23. $x = 11$; $y = 7$. 24. $x = 17$; $y = 6$.

Таблица 9

1. 45° . 2. 10. 3. -32 . 4. -10 . 5. $3\sqrt{2}$. 6. 0,2. 7. 0. 8. 0,6. 9. 50. 10. 0. 11. 8. 12. $-12,5$. 13. 6,75. 14. 2. 15. 1. 16. 90° . 17. 60° . 18. 0. 19. -60 . 20. 90° .

Таблица 10

1. 6π . 2. 67,5. 3. 12π . 4. 8. 5. 12. 6. $8\sqrt{3}\pi$. 7. 26π . 8. 52π . 9. $20\pi\sqrt{3} / 9$. 10. 60° . 11. 144° ; 216° . 12. 225° ; 135° . 13. $7\pi/\pi - 3$. 14. 40π . 15. 20π . 16. 40π . 17. 32π . 18. $8\pi\sqrt{3}$. 19. $7\sqrt{5}\pi$. 20. $\frac{85}{6}\pi$. 21. $32\pi/\sqrt{3}$. 22. $98\pi\sqrt{5} / 15$. 23. $16\pi/\sqrt{3}$. 24. $8\pi(\sqrt{3} - 1)$. 25. 20π . 26. $6\pi(\sqrt{2} - 1)$. 27. 15π .

Таблица 11

1. 4. 2. 64π . 3. $100\pi/(2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}})^2 \approx 49,5$. 4. 12π . 5. 20π . 6. $18\pi(2 - \sqrt{3})$. 7. 4π . 8. $144\pi(3 - 2\sqrt{2})$. 9. π . 10. 25π . 11. $\frac{27}{32}\pi$. 12. π . 13. 50π . 14. 25π . 15. $60,5\pi$. 16. $86\pi/4 - \pi$. 17. $456\pi/\pi - 2$. 18. $\frac{400}{3}\pi$. 19. $\left(\frac{625}{48}\right)^2 \pi \approx 169,5\pi$. 20. 3. 21. $6,25\pi$. 22. 8. 23. 5π . 24. 32π .

Таблица 12

1. $12(2\pi - 3\sqrt{3})$. 2. $\approx 7,6$. 3. 9. 4. $\approx 413,2$. 5. 10π . 6. $100(\pi - 2)$. 7. $128\pi/3$. 8. $16(4 - \pi)$. 9. $25(8 - \pi)$. 10. $75(\pi - 1,5\sqrt{3}) \approx 40,6$. 11. $\approx 182,5$. 12. $36(4 - \pi) \approx 31$.

Содержание

.....

| | |
|---|-----------|
| Предисловие | 3 |
| Раздел I. Краткие теоретические сведения | 5 |
| Раздел II. Упражнения в таблицах..... | 28 |

VII класс

| | |
|--|----|
| Таблица 1. Смежные углы | 28 |
| Таблица 2. Вертикальные углы | 30 |
| Таблица 3. Признаки равенства треугольников..... | 32 |
| Таблица 4. Периметр равнобедренного треугольника..... | 36 |
| Таблица 5. Свойства равнобедренного треугольника..... | 38 |
| Таблица 6. Признаки параллельности прямых | 40 |
| Таблица 7. Свойства углов при параллельных прямых | 45 |
| Таблица 8. Углы треугольника | 47 |
| Таблица 9. Углы треугольника | 48 |
| Таблица 10. Некоторые свойства прямоугольных треугольников | 52 |
| Таблица 11. Признаки равенства прямоугольных треугольников..... | 56 |
| Таблица 12. Расстояние от точки до прямой | 57 |

VIII класс

| | |
|---|----|
| Таблица 1. Определение и признаки параллелограмма | 59 |
| Таблица 2. Свойства параллелограмма | 61 |
| Таблица 3. Свойства параллелограмма | 64 |
| Таблица 4. Параллелограмм..... | 66 |
| Таблица 5. Параллелограмм..... | 68 |
| Таблица 6. Трапеция | 69 |
| Таблица 7. Трапеция | 72 |
| Таблица 8. Площадь прямоугольника..... | 73 |
| Таблица 9. Площадь параллелограмма | 76 |
| Таблица 10. Площадь треугольника | 79 |
| Таблица 11. Площадь трапеции | 82 |
| Таблица 12. Теорема Пифагора..... | 86 |

| | |
|--|-----|
| Таблица 13. Определение подобных треугольников | 93 |
| Таблица 14. Признаки подобия треугольников | 98 |
| Таблица 15. Признаки подобия треугольников | 102 |
| Таблица 16. Средняя линия треугольника..... | 105 |
| Таблица 17. Пропорциональные отрезки в прямоугольном
треугольнике | 108 |
| Таблица 18. Соотношения между сторонами и углами
в прямоугольном треугольнике | 110 |
| Таблица 19. Соотношения между сторонами и углами
в прямоугольном треугольнике | 112 |
| Таблица 20. Касательная к окружности..... | 115 |
| Таблица 21. Центральные и вписанные углы..... | 118 |
| Таблица 22. Четыре замечательные точки треугольника..... | 125 |
| Таблица 23. Вписанная и описанная окружности..... | 127 |
| Таблица 24. Векторы..... | 138 |
| Таблица 25. Средняя линия трапеции | 144 |

IX класс

| | |
|---|-----|
| Таблица 1. Координаты вектора..... | 148 |
| Таблица 2. Простейшие задачи в координатах | 149 |
| Таблица 3. Применение метода координат
к решению задач | 152 |
| Таблица 4. Уравнение окружности..... | 154 |
| Таблица 5. Уравнение прямой | 156 |
| Таблица 6. Решение треугольников. Площадь треугольника | 158 |
| Таблица 7. Решение треугольников. Теорема синусов..... | 162 |
| Таблица 8. Решение треугольников. Теорема косинусов | 164 |
| Таблица 9. Скалярное произведение векторов..... | 168 |
| Таблица 10. Длина окружности. Длина дуги | 171 |
| Таблица 11. Площадь круга | 176 |
| Таблица 12. Площадь круга | 179 |

| | |
|---|------------|
| Раздел III. Решения некоторых задач..... | 181 |
| VII класс..... | 181 |
| VIII класс | 183 |
| IX класс | 198 |

| | |
|---------------------|------------|
| Ответы | 213 |
|---------------------|------------|

Балаян Эдуард Николаевич

ГЕОМЕТРИЯ
Задачи на готовых чертежах
для подготовки к ГИА и ЕГЭ
7–9 классы

Ответственный редактор *С.Осташов*
Технический редактор *Л. Багрянцева*

Подписано в печать 12.11.2012.
Формат 70×100/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 15,48. Тираж 3000 экз.
Заказ № 4699/1

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80

Сайт издательства: www.phoenixrostov.ru
Интернет-магазин: www.phoenixbooks.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов
в ООО «Кубаньпечать»
350059, г. Краснодар, ул. Уральская, 98/2