под редакцией Д.А. Мальцева

МАТЕМАТИКА

9 класс. ОГЭ 2017

Решебник

НАРОДНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Учебные пособия АНО «Издательский дом «Народное образование»
допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях
Приказом Минобрнауки России № 16 от 16.01.2012

Под редакцией Д.А. Мальцева

МАТЕМАТИКА
9 класс
ОГЭ 2017
РЕШЕБНИК

- ✓ *теория вероятности*
- ✓ *решения задач тестов ОГЭ*
- ✓ *геометрический тренинг*

Издатель Мальцев Д.А.
Ростов-на-Дону

Народное образование
Москва
2017

ББК 22.1
Р 47

ББК 22.

Рецензенты: *К. Э. Каибханов*, к. ф.-м. н., доцент ЮФУ;
Н. Н. Кирилюк, учитель высшей категории;
В. Ф. Петрова, учитель высшей категории;
А. М. Кушнир, кандидат психологических наук

Авторы: *Д. А. Мальцев, А. А. Мальцев, Л. И. Мальцева*

Р 47 **Математика 9 класс. ОГЭ 2017. Решебник**: учебно-методическое пособие / Под ред. Д.А. Мальцева. — Ростов н/Д: Издатель Мальцев Д.А.; М.: Народное образование, 2017. — 144 с.

ISBN 978-5-87953-414-6

Основная цель данной книги — помочь ученику, желающему научиться решать наиболее сложные задачи предстоящего выпускного экзамена по математике.

Данное пособие содержит **решения заданий с развёрнутым ответом** для каждого второго теста книги «Математика 9 класс. ОГЭ 2017» под редакцией Д.А. Мальцева. Также в §1 данного пособия приведены **решения задач по теории вероятностей**. Как показывает практика, этот раздел учебной программы достаточно труден для восприятия школьниками. А в §3 содержится **подборка геометрических задач** (вместе с решениями), которые составлены по мотивам заданий № 13 тестов книги «Математика 9 класс. ОГЭ 2017».

Все решения написаны достаточно подробно, в стиле беседы с читателем. Авторы надеются, что данное пособие поможет ученикам приобрести устойчивые навыки в решении ряда заданий и существенно повысить уровень математической культуры.

Учебные пособия АНО «Издательский дом «Народное образование» допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях Приказом Минобрнауки России № 16 от 16.01.2012.

Подписано в печать с оригинал-макета 22.08.2016 г.
Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,1.
Тираж 5000 экз. Заказ № 853-16

Отпечатано с оригинал-макета
358000, г. Элиста, ул. Ленина, 245

Содержание

От авторов

Данная книга состоит из трёх параграфов. В §1 приведены решения задач по теории вероятности — наиболее сложного для восприятия школьниками раздела учебной программы. Отметим, что фактически этот параграф является самостоятельным и полноценным пособием по решению задач на тему «Теория вероятности». Многие задачи данного параграфа несколько сложнее, чем те, которые выпускникам предстоит решать на экзамене, но большинство сегодняшних школьников ещё не раз встретятся с подобными задачами при дальнейшем обучении в ВУЗе или колледже. Поэтому все приведённые задачи будут весьма полезны при изучении темы «Теория вероятности».

В §2 содержится основной материал данного пособия — решения заданий второй части тестов книги «Математика. 9 класс. ОГЭ 2017».

В §3 дана подборка геометрических задач (и их решения), которые составлены по мотивам заданий №13 тестов вышеуказанной книги.

Основная цель данного пособия — помочь ученику, желающему научиться решать задания второй части выпускного экзамена по математике. Поэтому авторы старались писать решения подробно, в стиле беседы с читателем. Хотя на экзамене при оформлении решений достаточно меньшей степени подробности, чем выбрана авторами, вы вполне можете «взять на вооружение» и с успехом использовать некоторые из приёмов оформления решений, используемых в этой книге. Например, ключевые слова и фразы, наподобие «следовательно», «таким образом», «так как..., то...», помогут вам более упорядоченно излагать свои мысли. И вполне возможно, что вследствие этого вы станете совершать меньшее количество ошибок и быстрее приходить к правильному ответу.

Данное пособие поможет ученикам приобрести устойчивые навыки в решении ряда заданий и существенно повысить уровень математической культуры. Это, в свою очередь, будет способствовать не только успешной сдаче последующих экзаменов, но также окажет неоценимую помощь в дальнейшем обучении — вне зависимости от выбранного колледжа или ВУЗа и выбранной специальности.

Желаем вам успехов!

§ 1. Решения задач по теории вероятности

Номера задач данного раздела, к которым приведены решения: **10, 16, 19, 21, 27, 31, 32, 34, 37, 40, 44, 46, 48, 52, 56, 58, 60, 62, 64, 70, 73, 76, 79, 81, 82, 84, 86**

Основой успешного решения задач по теории вероятностей является понимание выпускником термина «вероятность случайного события». Ниже приведена такая расшифровка этого термина, которая интуитивно понятна и удобна в использовании на практике.

Вероятностью того, что в результате проведения некоторого опыта наступит интересующее нас событие, называется отношение числа тех исходов опыта, в которых интересующее нас событие происходит, к числу всех возможных исходов опыта.

Рассмотрим следующие примеры.

10. Новогодняя гирлянда состоит из 240 синих, 400 красных, 200 жёлтых и 360 зелёных лампочек. Одна из лампочек перегорела. Какова вероятность, что перегоревшая лампочка зелёного цвета?

Решение.

Число всех лампочек в гирлянде равно $240 + 400 + 200 + 360 = 1200$. Так как перегореть могла любая из этих лампочек, то число всех «исходов опыта» равно 1200. «Интересующее нас событие» — перегорела зелёная лампочка. Поскольку зелёных лампочек 360 и перегореть могла любая из них, то «интересующее нас событие» происходит в 360 исходах опыта. Таким образом, вероятность «интересующего нас события» равна $\frac{360}{1200} = 0{,}3$.

Ответ: 0,3

16. Перед первой игрой в шахматном турнире участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в турнире участвуют 26 шахматистов, среди которых 4 участника из России. Найдите вероятность того, что в первом туре российский шахматист Павел Спиридонов не будет играть с другим шахматистом из России.

Решение.

В первом туре соперником Павла Спиридонова может оказаться любой из остальных 25 шахматистов. Россиян среди этих вероятных соперников Павла Спиридонова трое, а шахматистов не из России — 22. Поэто му вероятность того, что в первом туре Павел Спиридонов будет играть с шахматистом не из России, равна $\frac{22}{25} = 0{,}88$.

Ответ: 0,88

19. В конкурсе эстрадной песни «Евровидение» участвуют представители 50 стран, по одному исполнителю от каждой страны. Все выступления разбиваются жеребъёвкой на два полуфинала, по 25 выступлений в каждом. Порядок выступления в полуфинале также определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится во втором полуфинале и будет не ранее, чем 15-ым по счёту?

Решение.

Если выступление представителя России состоится во втором полуфинале и будет не ранее, чем 15 по счёту, то это означает, что оно будет не менее, чем 40 по счёту среди всех 50 выступлений. «Интересующее нас событие» происходит в 11 случаях из 50 (количество целых чисел от 40 до 50 включая равно 11). Поэтому искомая вероятность равна $\frac{11}{50} = 0{,}22$.

Ответ: 0,22

21. У Лены в копилке лежит 12 однорублёвых, 6 двухрублёвых, 4 пятирублёвых и 3 десятирублёвых монеты. Лена наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит более 70 рублей.

Решение.

Сумма денег, лежащая в копилке у Лены, равна 74 рублям ($12 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 10 = 74$). Если в копилке осталось более 70 рублей, после того, как Лена достала из неё одну монету, то это означает, что Лена достала монету достоинством 1 рубль или 2 рубля. Так как общее число монет, лежащих в копилке у Лены, равно $12 + 6 + 4 + 3 = 25$, а число рублёвых и двухрублёвых монет равно $12 + 6 = 18$, то искомая вероятность равна $\frac{18}{25} = 0{,}72$.

Ответ: 0,72

27. Оценки за контрольную по геометрии в 9-х классах школы представлены в таблице. Какова вероятность того, что оценка наугад выбранного учащегося 9 «Б» будет отличаться от средней по школе оценки не более, чем на 0,5 балла? Ответ округлите до сотых.

	9 «А» класс				9 «Б» класс			
Отметка	«2»	«3»	«4»	«5»	«2»	«3»	«4»	«5»
Число учащихся	3	14	9	2	2	13	10	2

Решение.

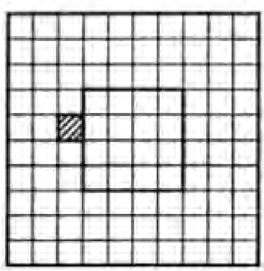
Оценки всех девятиклассников школы таковы: «двоек» — 5 шт, «троек» — 27 шт, «четвёрок» — 19 шт, «пятёрок» — 4 шт. Всего учащихся 9-х классов — $5 + 27 + 19 + 4 = 55$ человек, сумма набранных ими баллов — $2 \cdot 5 + 3 \cdot 27 + 4 \cdot 19 + 5 \cdot 4 = 187$, а средний по школе балл — $\frac{187}{55} = 3{,}4$. Оценка некоторого учащегося отличается от средней по школе оценки не более чем на 0,5 балла лишь в том случае, если этот учащийся получил отметку «3». Так как в 9 «Б» классе $2 + 13 + 10 + 2 = 27$ учеников, а отметку «3» получили 13 из них, то искомая вероятность равна $\frac{13}{27} = 0{,}(481)$.

Ответ: 0,48

31. Квадратный лист бумаги со стороной 10 см разбивают на 100 квадратиков со стороной 1 см и среди этих квадратиков случайным образом выбирают один. Какова вероятность, что расстояние от одной из сторон выбранного квадратика до границы листа составит не более 2 см?

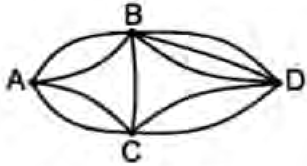
Решение.

Расстояние от одной из сторон выбранного квадратика до границы листа составляет не более 2 см в том случае, если этот квадратик лежит внутри «каёмки» шириной 3 клетки, примыкающей к сторонам квадрата: на рисунке штриховкой выделен один из квадратиков этой «каёмки», расстояние от его ближайшей до границы листа стороны равно 2 см. Те из квадратиков, которые лежат вне этой «каёмки», образуют квадрат со стороной 4, дополняющий «каёмку» до квадрата 10×10, число этих квадратиков равно 16. Поэтому число квадратиков внутри «каёмки» равно $100 - 16 = 84$. Отсюда получаем, что искомая вероятность равна 0,84.



Ответ: 0,84

32. На рисунке показана схема дорог, ведущих из пункта A в пункт D. Водитель случайным образом выбирает один из возможных маршрутов (при этом маршруты, проходящие повторно через пункт A, он не рассматривает). Какова вероятность, что будет выбран маршрут, не проходящий через пункт B?



Решение.

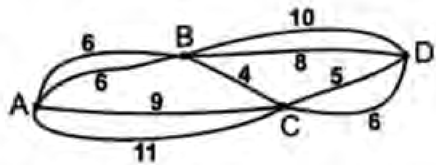
Из пункта A можно попасть напрямую в пункт B двумя способами (пункт B соединяют с пунктом A две дороги). Из пункта B можно проехать в пункт D пятью различными способами — двумя путями, проходящими через промежуточный пункт C, и тремя дорогами, соединяющими пункт B с пунктом D напрямую. Таким образом, существует $2 \cdot 5 = 10$ способов попасть из A в D по маршруту, первая дорога которого проходит через пункт B.

Так как пункт C соединяют с пунктом A также две дороги, то существует $2 \cdot 5 = 10$ способов попасть из A в D по маршруту, первая дорога которого проходит через пункт C. При этом $2 \cdot 3 = 6$ из этих маршрутов проходят через промежуточный пункт B, а $2 \cdot 2 = 4$ из них ведут из пункта C в пункт D напрямую, не проходя через пункт B.

Таким образом, всего существует $10 + 10 = 20$ различных маршрутов из пункта A в пункт D (не проходящих через A повторно), из которых только 4 маршрута не проходят через пункт B. Поэтому искомая вероятность выбрать маршрут, не проходящий через пункт B, равна $\frac{4}{20} = 0{,}2$.

Ответ: 0,2

34. На рисунке показана схема дорог из пункта A в пункт D с указанием их длины — рядом с каждой линией указано число, обозначающее длину соответствующей дороги в км.



Водитель наугад выбирает маршрут из A в D (при этом маршруты, проходящие повторно через пункт A, он не рассматривает). Какова вероятность, что им будет выбран маршрут наименьшей возможной длины?

Решение.

Общее число различных маршрутов из пункта A в пункт D подсчитывается аналогично тому, как это сделано в решении предыдущей задачи: маршрутов, первая дорога которых проходит через пункт B, $2 \cdot 4 = 8$; маршрутов, первая дорога которых проходит через пункт C, $2 \cdot 4 = 8$; всего различных маршрутов из пункта A в пункт $D - 8 + 8 = 16$.

Легко видеть, что наименьшая длина маршрута из A в D равна 14 км, а число маршрутов, длина которых равна 14 км, равно трём: два маршрута, проходящие по дороге из A в B длиной 6 км и далее напрямую из B в D по дороге длиной 8 км, а также один маршрут проходящий по дороге из A в C длиной 9 км и далее напрямую из C в D по дороге длиной 5 км.

Следовательно, искомая вероятность выбрать маршрут наименьшей возможной длины равна $\frac{3}{16} = 0{,}1875$.

Ответ: 0,1875

37. Пункт контроля качества бракует партию деталей в том случае, если вероятность того, что выбранная наугад деталь окажется бракованной, превышает 0,045. Какое наибольшее число бракованных деталей могло быть в партии из 900 деталей, если она успешно прошла контроль?

Решение.

Пусть n — количество бракованных деталей в партии из 900 деталей. Тогда вероятность того, что выбранная наугад деталь окажется бракованной, равна $\frac{n}{900}$. Так как партия успешно прошла контроль, то эта вероятность не превышает 0,045, т.е. $\frac{n}{900} \leqslant 0{,}045$. Отсюда для числа n имеем: $n \leqslant 900 \cdot 0{,}045$, $n \leqslant 40{,}5$. Наибольшим целым числом, удовлетворяющим этому неравенству, является $n = 40$.

Ответ: 40

40. В коробке лежат 7 белых и 30 чёрных шаров. Какое наибольшее число чёрных шаров можно вынуть из этой коробки, чтобы после этого вероятность наугад достать из коробки белый шар была не больше 0,35?

Решение.

Пусть из коробки вынуто x чёрных шаров. Тогда в коробке осталось $30 - x$ чёрных и 7 белых шаров, т.е. всего $37 - x$ шаров. При этом вероятность наугад достать из коробки белый шар будет равна числу $\frac{7}{37 - x}$. Это число не больше 0,35 в том случае, если $\frac{7}{37 - x} \leqslant 0{,}35$. Учитывая, что $x \leqslant 37$ (нельзя достать из коробки шаров больше, чем их там было),

получаем, что предыдущее неравенство равносильно неравенствам:
$\frac{7}{0{,}35} \leqslant 37 - x,\ \ 20 \leqslant 37 - x,\ \ x \leqslant 17.$

Ответ: 17

В записи решений задач с подбрасыванием монеты выпадение «орла» будем обозначать буквой «о», а выпадение «решки» — буквой «р». Прежде чем приступить к разбору решений этих задач, покажем, что справедливо следующее утверждение.

Лемма. Если число подбрасываний монеты равно n, то число различных вариантов последовательности выпадений «орла» или «решки» равно 2^n.

В самом деле, при однократном подбрасывании монеты имеется ровно два варианта её выпадения — либо «о», либо «р» (т.е. при $n = 1$ наше утверждение справедливо). Так как при каждом следующем подбрасываний монеты может выпасть как «о», так и «р», то при каждом следующем подбрасывании число вариантов последовательности выпадений «о» или «р» удваивается, что доказывает требуемое утверждение.

Вооружившись этой леммой, приступим к решению задач №44, 46, 48.

44. Монету подбрасывают несколько раз так, что каждый раз с равной вероятностью выпадает «орёл» или «решка». Найдите вероятность того, что при трёх подбрасываниях выпадет одна и та же сторона монеты.

Решение.

При трёх подбрасываниях монеты имеется $2^3 = 8$ различных вариантов последовательности выпадений «о» или «р». Одна и та же сторона монеты выпадает три раза подряд в двух из этих вариантов: либо «о», «о», «о»; либо «р», «р», «р». Поэтому искомая вероятность равна $\frac{2}{8} = 0{,}25$.

Ответ: 0,25

46. Монету подбрасывают несколько раз так, что каждый раз с равной вероятностью выпадает «орёл» или «решка». Найдите вероятность того, что при четырёх подбрасываниях выпадут обе стороны монеты.

Решение.

Так как при четырёх подбрасываниях монеты имеется $2^4 = 16$ различных вариантов последовательности выпадений «о» или «р», а число вариантов, в которых выпадает одна и та же сторона монеты равно 2 (либо все четыре раза «о», либо все четыре раза «р»), то число различных вариантов, в которых выпадают обе стороны монеты, равно $16 - 2 = 14$.

Поэтому вероятность того, что при первых четырёх подбрасываниях выпадут обе стороны монеты равна $\frac{16-2}{16} = 1 - \frac{2}{16} = 1 - 0{,}125 = 0{,}875$.

Ответ: 0,875

Примечание. Фактически в приведённом решении содержится подробное объяснение (для начинающих) следующего приёма — вместо нахождения вероятности интересующего нас события (в разобранном примере это выпадение при первых четырёх подбрасываниях обеих сторон монеты) можно найти вероятность противоположного события (выпадение при первых четырёх подбрасываниях одной и той же стороны монеты). Если вероятность противоположного события равна p, то искомая вероятность будет равна $1 - p$. Указанный приём является очень эффективным для ряда задач, в которых подсчёт числа случаев наступления противоположного события значительно проще осуществить, чем подсчёт числа случаев наступления интересующего нас события.

48. Перед началом волейбольного матча жребием определяется команда, которая будет первой осуществлять подачу. Команда «Рубин» по очереди играет с командами «Сапфир», «Изумруд», «Аметист» и «Топаз». Найдите вероятность того, что команда «Рубин» будет первой осуществлять подачу не более, чем в двух играх.

Решение.

Будем считать, что перед началом игры подбрасывают монету, и команда «Рубин» первой осуществляет подачу, если выпал «орёл», а если выпала «решка», то первыми подают соперники. Тогда вопрос задачи можно переформулировать так: какова вероятность, что при четырёх подбрасываниях монеты «орёл» выпадет не более двух раз?

При четырёх подбрасываниях монеты имеется $2^4 = 16$ различных вариантов последовательности выпадений «о» или «р». Вместо нахождения числа интересующих нас вариантов (в которых «орёл» выпал не более двух раз), найдём число вариантов противоположного события — «орёл» выпал не менее трёх раз.

Пусть «орёл» выпал не менее трёх раз, тогда он выпал либо ровно три раза, либо все четыре раза. Если в последовательности выпадений «о» встречается ровно три раза, то «р» встречается ровно один раз — это выполняется для четырёх вариантов: «р» находится или на 1-ом месте, или на 2-ом, или на 3-ем, или на 4-ом. Число вариантов последовательности выпадений, в которых «о» находится на всех четырёх позициях, равно 1.

Таким образом, число вариантов последовательности выпадений, в которых «о» встречается не менее трёх раз, равно $4 + 1 = 5$. Отсюда получаем, что число вариантов, в которых «о» встречается не более двух раз, равно $16 - 5 = 11$, а искомая вероятность равна $\frac{11}{16} = 0{,}6875$.

Ответ: 0,6875

52. На гранях игрального кубика точками отмечены числа от 1 до 6. Найдите вероятность того, что при бросании двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков составит не больше 9. Ответ дайте с точностью до тысячных, т.е. указав после запятой первые три знака.

Решение.

При бросании двух игральных кубиков число всех возможных исходов опыта равно числу различных комбинаций верхних граней этих кубиков (т.к. именно верхняя грань кубика указывает число выпавших очков), т.е. равно 36. Вместо нахождения числа интересующих нас исходов опыта, найдём сначала число всех остальных исходов опыта — тех, в которых сумма выпавших очков больше 9.

Пусть $(n; m)$ — пара чисел, соответствующая комбинации верхних граней кубиков. Простым перебором находим, что неравенство $n + m > 9$ выполняется для шести из этих пар чисел, а именно, для пар $(4; 6)$, $(6; 4)$, $(5; 5)$, $(5; 6)$, $(6; 5)$, $(6; 6)$. Так как более 9 очков выпадает в 6 комбинациях из 36 возможных, то вероятность выпадения более 9 очков равна $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, а вероятность выпадения не более 9 очков равна $\frac{5}{6} = 0{,}833(3)$.

Ответ: 0,833

56. Саша дважды бросает игральный кубик. В сумме у него выпало 8 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало не меньше 4 очков.

Решение.

Пусть n — число, выпавшее при первом броске игрального кубика Сашей, а m — число, выпавшее при втором броске. Перебором находим, что равенство $n + m = 8$ выполняется для следующих пар чисел $(n; m)$: $(2; 6)$, $(6; 2)$, $(3; 5)$, $(5; 3)$, $(4; 4)$. Таким образом, число всех исходов опыта, возможных по условию задачи, равно 5. Так как нас интересуют те исходы опыта, в которых $n \geqslant 4$, а это выполнено в трёх из пяти вышеперечисленных случаев — для пар $(6; 2)$, $(5; 3)$, $(4; 4)$, то искомая вероятность равна $\frac{3}{5}$. *Ответ:* 0,6

58. Маша написала в блокноте трёхзначное число, делящееся на 26. Коля должен угадать это число, написав семь трёхзначных чисел, делящихся на 26, а затем сравнив эти числа с числом, написанным Машей. Какова вероятность, что Коля угадает загаданное Машей число?

Решение.

Наименьшим трёхзначным числом, делящимся на 26, является число $26 \cdot 4 = 104$, а наибольшим трёхзначным числом, делящимся на 26, является число $26 \cdot 38 = 988$. Поэтому количество трёхзначных чисел, делящихся на 26, равно $38 - 3 = 35$ (таких чисел ровно столько же, сколько натуральных чисел от 4 до 38 включая). Так как Коля пишет какие-то семь из этих чисел, то вероятность того, что он угадает загаданное Таней число, равна $\frac{7}{35} = 0{,}2$.

Ответ: 0,2

60. Из трёхзначных чисел наугад выбирают одно. Какова вероятность, что будет выбрано число, большее 600 и делящееся на 3, но не делящееся на 6? Ответ округлите до сотых.

Решение.

Так как $600 = 3 \cdot 200$ и $999 = 3 \cdot 333$, то количество трёхзначных чисел, больших 600 и делящихся на 3, равно $333 - 200 = 133$ — это числа $3 \cdot 201$, $3 \cdot 202, \ldots, 3 \cdot 333$.

Если натуральное число делится на 3, то оно не делится на 6 только в том случае, если оно не делится на 2, т.е. если оно нечётно. Среди чисел $3 \cdot 201$, $3 \cdot 202, \ldots, 3 \cdot 333$ нечётными являются 67 чисел (всего этих чисел 133, а нечётных на одно больше, чем чётных). Таким образом, имеется ровно 67 трёхзначных чисел, больших 600 и делящихся на 3, но не делящихся на 6, а вероятность наугад выбрать такое число среди всех трёхзначных чисел равна $\frac{67}{900} = 0{,}07(4)$.

Ответ: 0,07

62. Из трёхзначных чисел наугад выбирают одно. Какова вероятность, что будет выбрано число, десятичная запись которого содержит хотя бы одну цифру 7?

Решение.

Вместо нахождения вероятности интересующего нас события найдём сначала вероятность противоположного события — то есть вероятность того, что будет выбрано число, десятичная запись которого не содержит ни одной цифры 7.

Найдём количество трёхзначных чисел, десятичная запись которых не содержит ни одной цифры 7. Для первой цифры такого числа имеется 8 возможностей — все цифры от 1 до 9 за исключением цифры 7, а для второй и третьей цифры такого числа имеется по 9 возможностей — все цифры от 0 до 9 за исключением цифры 7. Следовательно, количество таких чисел равно $8 \cdot 9 \cdot 9$, а вероятность выбрать такое число среди всех трёхзначных чисел равна $\frac{8 \cdot 9 \cdot 9}{900} = \frac{72}{100} = 0{,}72$.

Так как вероятность противоположного события равна 0,72, то искомая вероятность равна $1 - 0{,}72 = 0{,}28$.

Ответ: 0,28

64. В коробке лежат два чёрных, два белых и один красный шар. Из коробки наугад вынимают два шара. Какова вероятность, что вынутые шары окажутся одного цвета?

Решение. Способ 1

Так как в коробке лишь 1 красный шар, то вынутые шары могут оказаться одноцветными лишь в том случае, если они оба белые или оба чёрные. Будем считать, что шары извлекают из коробки поочереди — сначала один, а затем другой, и найдём вероятность того, что оба вынутых шара окажутся белыми.

Первый вынутый шар оказывается белым в двух случаях из пяти (всего шаров пять, из них белых — два). Если первый шар оказался белым, то второй вынутый шар окажется белым лишь в одном случае из четырёх возможных (среди оставшихся 4 шаров белым является лишь один). Поэтому и первый и второй шар окажутся белыми в числе случаев, равном $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$ от числа всех возможных случаев. То есть вероятность того, что оба вынутых шара окажутся белыми, равна 0,1.

Вероятность того, что оба вынутых шара окажутся чёрными, также равна 0,1 (приведённое выше рассуждение можно повторить дословно, заменив белый цвет на чёрный). Следовательно, вероятность того, что оба вынутых шара окажутся одного цвета, равна $0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$.

Способ 2

Так как всего в ящике пять шаров, то число всех способов выбрать какие-то два из этих шаров равно C_5^2 (число сочетаний из 5 по 2). Согласно формуле $C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$, имеем: $C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

(напомним, что $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, по определению). Среди всех способов выбрать два шара из пяти имеющихся ровно для двух способов выбора эти шары будут одноцветными — либо оба выбранных шара белые, либо оба чёрные. Таким образом, вероятность того, что будут выбраны шары одного цвета, равна $\frac{2}{10} = 0{,}2$.

Ответ: 0,2

70. У Дины в копилке лежит 20 рублёвых, 16 двухрублёвых и 12 пятирублёвых монет. Дина наугад достаёт из копилки две монеты. Найдите вероятность того, что она достанет не более шести рублей. Ответ округлите до сотых.

Решение.

Вместо нахождения вероятности интересующего нас события найдём сначала вероятность противоположного события — Дина достала из копилки более 6 рублей или, что то же самое, не меньше 7 рублей.

Если из копилки вынуто не меньше 7 рублей двумя монетами, то одна из этих монет обязательно пятирублёвая, а другая — либо пятирублёвая, либо двухрублёвая.

Пятирублёвых монет в копилке у Дины 12 шт, выбрать две из них можно $C_{12}^2 = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ способами. А двухрублёвых монет у Дины 16 шт, поэтому одну пятирублёвую и одну двухрублёвую монеты можно выбрать $12 \cdot 16$ способами. Так как всего у Дины 48 монет, то выбрать две из них можно $C_{48}^2 = \frac{48 \cdot 47}{2} = 24 \cdot 47$ способами.

Таким образом, вероятность того, что Дина достанет из копилки не меньше 7 рублей, равна $\frac{66 + 12 \cdot 16}{24 \cdot 47} = \frac{11 + 32}{4 \cdot 47} = \frac{43}{188}$. А искомая вероятность равна $1 - \frac{43}{188} = \frac{145}{188} = 0{,}771\ldots$

Ответ: 0,77

73. При подготовке к зачётам по двум предметам студент выучил по одному предмету 26 вопросов из 35, а по другому предмету — 21 вопрос из 32. Чтобы получить «зачёт» по предмету, студенту необходимо ответить на один вопрос, случайным образом выбранный из списка вопросов по данному предмету. Какова вероятность, что студент не получит «зачёт» хотя бы по одному из этих двух предметов?

Решение.

Вместо нахождения вероятности интересующего нас события найдём сначала вероятность противоположного события — то есть вероятность того, что студент получит «зачёт» по обоим предметам.

Число вариантов выбора одного вопроса по первому предмету и одного вопроса по второму предмету равно $35 \cdot 32$. Студент будет знать ответ на оба вопроса для $26 \cdot 21$ из этих вариантов. Поэтому вероятность того, что студент получит «зачёт» по обоим предметам равна $\frac{26 \cdot 21}{35 \cdot 32} = \frac{13 \cdot 3}{5 \cdot 16} = \frac{39}{80}$.

Так как вероятность противоположного события равна $\frac{39}{80}$, то искомая вероятность равна $1 - \frac{39}{80} = \frac{41}{80} = 0{,}5125$.

Ответ: 0,5125

76. Некоторый прибор состоит из трёх блоков. Если в работе одного из блоков происходит сбой, прибор отключается. Вероятность сбоя в течение года для первого блока составляет 0,3, для второго блока — 0,6, а для третьего блока — 0,2. Какова вероятность, что в течение года произойдёт хотя бы одно отключение данного прибора?

Решение.

Вместо нахождения вероятности интересующего нас события найдём сначала вероятность противоположного события — то есть вероятность того, что в течение года не произойдёт ни одного отключения данного прибора.

Вероятность работы без единого сбоя в течение года для первого блока равна $1 - 0{,}3 = 0{,}7$, для второго блока — $1 - 0{,}6 = 0{,}4$, а для третьего блока — $1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Вероятность работы без единого сбоя в течение года всех трёх блоков (т.е. вероятность того, что не произойдёт ни одного отключения прибора) равна $0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}224$.

Так как вероятность противоположного события равна 0,224, то искомая вероятность равна $1 - 0{,}224 = 0{,}776$.

Ответ: 0,776

79. В некоторой местности летнее утро бывает либо ясным, либо облачным. Наблюдения показали, что летнее утро бывает ясным с вероятностью 0,6, причём если утро ясное, то вероятность дождя в течение дня равна 0,25, а если утро облачное — вероятность дождя в этот день равна 0,8. Какова вероятность того, что в случайно выбранный летний день дождя не будет?

Решение.

Для удобства будем считать, что «летнее» время длится в данной местности ровно 100 дней. Так как летнее утро ясное с вероятностью 0,6, то из 100 дней ясными будут 60, а облачными — 40.

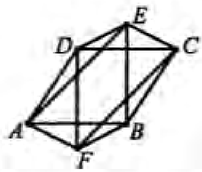
Вероятность дождя в ясный день равна 0,25, поэтому из 60 ясных дней будет $60 \cdot 0{,}25 = 15$ дней, в течение которых пройдёт дождь.

Вероятность дождя в облачный день равна 0,8, поэтому из 40 облачных дней будет $40 \cdot 0{,}8 = 32$ дня, в течение которых пройдёт дождь.

Таким образом, из 100 дней дождь будет в течение $15 + 32 = 47$ дней, т.е. вероятность дождя в летний день равна 0,47, а вероятность того, что дождя не будет, равна $1 - 0{,}47 = 0{,}53$.

Ответ: 0,53

81. По изготовленному из проволоки каркасу октаэдра с ребром 1 дм ползает муравей (октаэдр — правильный многогранник, который можно представить склееным из двух правильных четырёхугольных пирамид, у каждой из которых все рёбра равны друг другу, см. рисунок). Доползая вдоль ребра октаэдра до одной из вершин, муравей с равной степенью вероятности может повернуть на любое из соседних рёбер, но не назад. В начальный момент муравей находится в вершине E. Какова вероятность, что муравей снова окажется в вершине E после того, как он проползёт: а) 3 дм; б) 4 дм?



Решение.

Прежде чем приступать к решению задачи, введём одно определение: «путём длины k» будем называть любую последовательность из k рёбер данного октаэдра, в которой каждые два соседних элемента являются рёбрами, имеющими общую вершину, и при этом никакой элемент этой последовательности (т.е. ребро октаэдра) не повторяется два раза подряд.

а) Так как находясь в какой-либо вершине муравей с равной степенью вероятности может повернуть на любое из смежных с этой вершиной рёбер, то все пути, начинающиеся в вершине E и имеющие длину 3 дм, равновероятны. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{m}{n}$, где n — количество всех путей длиной 3 дм, выходящих из точки E, а m — количество путей длиной 3 дм, выходящих из точки E и заканчивающихся в точке E.

После того, как муравей проползёт 1 дм, он может оказаться в одной из вершин A, B, C, D. Заметим, что количество способов, которыми муравей, проползая ещё 2 дм, попадает обратно в вершину E, одинаковы для каждой из вершин A, B, C, D (это следует, например, из того, что при повороте вокруг оси EF на $45°$ октаэдр переходит сам в себя — вершина A переходит в вершину B, вершина B переходит в вершину C, и т.д.).

Обозначим через q количество всех путей длины 2 дм, выходящих из точки A и не содержащих ребро AE (по этому ребру муравей попал из точки E в точку A, и по условию поворачивать назад муравей не может). Через p обозначим количество путей длиной 2 дм, выходящих из точки A, не содержащих ребро AE и заканчивающихся в точке E. Тогда количество всех путей длиной 3 дм, выходящих из точки E, будет равно $4q$, т.е. $n = 4q$ (для каждой из точек A, B, C, D существует q путей, проходящих через эту точку). Аналогично, количество путей длиной 3 дм, выходящих из точки E и заканчивающихся в точке E, будет равно $4p$, т.е. $m = 4p$. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{m}{n} = \frac{4p}{4q} = \frac{p}{q}$, т.е. нам достаточно найти p и q.

Проползая 1 дм из вершины A, муравей может оказаться в одной из вершин B, D, F. В каждой из вершин B, D, F муравей также может выбрать любое из трёх возможных рёбер. Поэтому $q = 3 \cdot 3 = 9$.

Легко видеть, что существует только два пути длиной 2 дм, выходящих из точки A и заканчивающихся в точке E: $\{AB, BE\}$ и $\{AD, DE\}$, т.е. $p = 2$. Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{p}{q} = \frac{2}{9}$.

б) Аналогично рассуждениям пункта а) получаем, что искомая вероятность равна $\frac{p}{q}$, где q — количество всех путей длиной 3 дм, выходящих из точки A и не содержащих ребро AE в качестве первого элемента, а p — количество путей длиной 3 дм, выходящих из точки A, не содержащих ребро AE в качестве первого элемента и заканчивающихся в точке E. Найдём q и p.

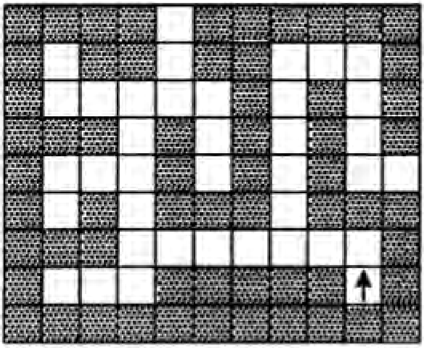
Так как из любой вершины октаэдра выходит ровно 4 ребра, то число всех путей длины 3 дм, выходящих из точки A и не содержащих ребро AE в качестве первого элемента, равно $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, т.е. $q = 27$ (путь — это последовательность рёбер, не содержащая одно и то же ребро два раза подряд, т.е. приходя в какую-либо вершину по одному из рёбер, муравей может выйти из этой вершины по любому из трёх оставшихся рёбер).

Вычислим p. Проползая 1 дм, муравей из вершины A попадает в одну из вершин B, D, F. Для каждой из вершин B и D существует ровно по одному пути длины 2 дм, оканчивающихся в точке E и не проходящих через точку A – это пути $\{BC, CE\}$ и $\{DC, CE\}$. Для вершины F существует три пути длиной 2 дм, оканчивающихся в точке E и не проходящих через точку A – это пути $\{FB, BE\}$, $\{FC, CE\}$ и $\{FD, DE\}$. Поэтому $p = 5$ (два пути, первое ребро которых заканчивается в точке B или D, и три пути, первое ребро которых заканчивается в точке F).

Итак, в пункте б) искомая вероятность равна $\frac{p}{q} = \frac{5}{27}$.

Ответ: а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{5}{27}$

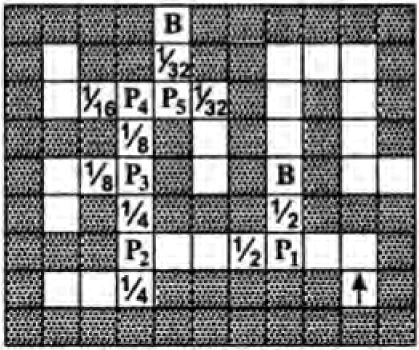
82. Внутрь лабиринта, изображённого на данном ниже рисунке, на клетку, отмеченную знаком ↑, помещён мышонок.



Мышонок выбирается из лабиринта передвигаясь наугад – в любой момент времени он с равной степенью вероятности может переместиться в любую из свободных клеток, соседних с той, где он находится в данный момент (соседними являются клетки, имеющие общую сторону), при этом назад мышонок поворачивает только в том случае, если упёрся в тупик. Какова вероятность того, что мышонок выберется из лабиринта, ни разу не попав в тупик?

Решение.

Те клетки лабиринта, в которых есть выбор из нескольких возможных путей, отметим символом «Р» с порядковым номером (Р – первая буква слова развилка). А затем в те из клеток, которые соседствуют с клетками, отмеченными символом «Р», впишем числа, равные вероятности того, что мышонок окажется на этой клетке, см. данный ниже рисунок. Кроме того, те из клеток, попав на которые мышонок выходит из лабиринта, не встречая далее на своём пути ни одного тупика, отметим символом «В» (первая буква слова выход).



На клетку, помеченную символом P_1, мышонок попадёт обязательно, а на клетки, расположенные левее и выше неё, он попадает с вероятностью 1/2. Так как на клетку, помеченную символом P_2, мышонок попадает с вероятностью 1/2, то на каждую из двух клеток, расположенных выше и ниже неё, он попадает с вероятностью, равной $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (на клетке P_2 мышонок оказывается в половине случаев, а поскольку пойти с этой клетки вверх или вниз он может с равной вероятностью, то он оказывается выше (ниже) клетки P_2 в половине от половины случаев, т.е. в 1/4 части всех случаев). Продолжая аналогичные рассуждения далее, приходим к разметке клеток лабиринта, указанной на данном выше рисунке.

Искомая вероятность получается суммированием чисел, написанных рядом с теми клетками лабиринта, которые помечены символом В: т.е. она равна $1/2 + 1/32 = 0{,}5 + 0{,}03125 = 0{,}53125$

Ответ: 0,53125

84. На отрезке $[-1{,}2; 3{,}8]$ числовой оси случайным образом отмечают одну точку. Какова вероятность, что координата отмеченной точки будет отрицательна?

Решение.

Координата отмеченной точки будет отрицательна в том случае, если отмеченная точка принадлежит промежутку $[-1{,}2; 0)$. По определению «геометрической вероятности», вероятность выбрать точку внутри промежутка L так, чтобы она принадлежала некоторому промежутку l, расположенному внутри L, равна отношению длин промежутков l и L.

Согласно данному выше определению, искомая вероятность того, что отмеченная точка окажется внутри промежутка $[-1,2;0)$, равна отношению длины промежутка $[-1,2;0)$ к длине промежутка $[-1,2;3,8]$, т.е. равна $\frac{1,2}{5} = 0,24$.

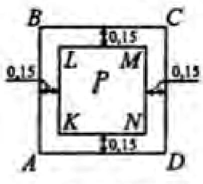
Ответ: 0,24

86. В квадрате с длиной стороны 1 случайным образом отмечают одну точку. Какова вероятность, что расстояние от этой точки до ближайшей к ней стороны квадрата окажется больше, чем 0,15?

Решение.

Пусть $ABCD$ – данный квадрат. Заметим, что расстояние от некоторой точки P до ближайшей к ней стороны квадрата будет больше, чем 0,15, в том и только том случае, если расстояние от точки P до каждой из сторон AB, BC, CD и DA будет больше, чем 0,15.

Геометрическим местом тех точек, расстояние от которых до каждой из сторон AB, BC, CD и DA больше, чем 0,15, является внутренность квадрата $KLMN$, изображённого на данном ниже рисунке.



По определению «геометрической вероятности», вероятность выбрать точку P из некоторой фигуры F так, чтобы она принадлежала фигуре Φ, лежащей внутри фигуры F, равна отношению площади фигуры Φ к площади фигуры F.

Согласно приведённому выше определению, искомая вероятность выбрать точку из квадрата $ABCD$, принадлежащую квадрату $KLMN$, равна отношению площади квадрата $KLMN$ к площади квадрата $ABCD$. Так как сторона квадрата $KLMN$ равна 0,7, а сторона квадрата $ABCD$ равна 1, то искомая вероятность равна $0,7^2/(1^2) = 0,49$.

Ответ: 0,49

§ 2. Решения задач учебно-тренировочных тестов

Тест №1

21 Решите уравнение $(5x+6)^4+5(5x+6)^2-6=0$.

Решение.

Сделав замену неизвестного $t=(5x+6)^2$, получим уравнение $t^2+5t-6=0$. Корнями данного уравнения являются $t=1$ и $t=-6$. Возвращаясь к неизвестному x, получаем: $(5x+6)^2=1$ и $(5x+6)^2=-6$. Уравнение $(5x+6)^2=-6$ не имеет корней (т.к. $(5x+6)^2\geqslant 0$ для всех x). Уравнение $(5x+6)^2=1$ равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}5x+6=1\\5x+6=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x=-5\\5x=-7\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-1{,}4\end{array}\right.$$

Ответ: $-1{,}4; -1$

22 Первые 120 км пути автомобиль ехал со скоростью 75 км/ч, следующие 90 км — со скоростью 60 км/ч, а затем 190 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Найдём время, затраченное автомобилем на каждый из участков пути: для первых 120 км время в пути равно $\frac{120}{75}=1{,}6$ часа;

для следующих 90 км время в пути равно $\frac{90}{60}=1{,}5$ часа;

для последних 190 км время в пути равно $\frac{190}{100}=1{,}9$ часа.

Так как общее время в пути составило $1{,}6+1{,}5+1{,}9=5$ часов, а длина всего пути равна $120+90+190=400$ км, то средняя скорость автомобиля на протяжении всего пути равна $\frac{400}{5}=80$ км/ч.

Ответ: 80

23 Постройте график функции $y=x^2-|5x+2|$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Решение.

Снимем знак модуля в выражении, определяющем данную в условии функцию: $5x+2<0$ при $x<-0{,}4$, $5x+2\geqslant 0$ при $x\geqslant -0{,}4$, поэтому

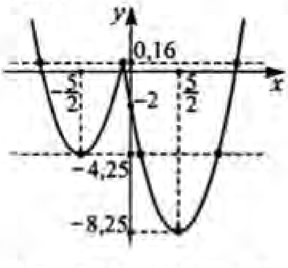
$$x^2-|5x+2|=\begin{cases} x^2+5x+2, \text{ при } x<-0{,}4\\ x^2-5x-2, \text{ при } x\geqslant -0{,}4.\end{cases}$$

Таким образом, при $x<-0{,}4$ графиком данной в условии функции является часть параболы $y=x^2+5x+2$, а при $x\geqslant -0{,}4$ графиком этой функции является часть параболы $y=x^2-5x-2$.

Вершиной параболы $y=x^2+5x+2$ является точка с абсциссой $x=-\frac{5}{2}$ и ординатой $y=\left(-\frac{5}{2}\right)^2+5\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+2=2-\frac{25}{4}=-4{,}25$. Вершиной параболы $y=x^2-5x-2$ является точка с абсциссой $x=\frac{5}{2}$ и ординатой $y=\left(\frac{5}{2}\right)^2-5\cdot\frac{5}{2}-2=-\frac{25}{4}-2=-8{,}25$.

В особой точке $x=-0{,}4$ значение функции $y=x^2-|5x+2|$ равно $(-0{,}4)^2+0=0{,}16$.

Эскиз графика функции $y=\begin{cases} x^2+5x+2, \text{ при } x<-0{,}4\\ x^2-5x-2, \text{ при } x\geqslant -0{,}4\end{cases}$ изображён на данном ниже рисунке.



Из этого рисунка следует, что прямая $y=m$ имеет три общие точки с графиком функции $y=x^2-|5x+2|$ только при $m=0{,}16$ и $m=-4{,}25$.

Ответ: $m=-4{,}25$, $m=0{,}16$

$\boxed{24}$ В треугольнике ABC углы B и C равны 48° и 87° соответственно. Найдите длину стороны BC, если радиус описанной окружности треугольника ABC равен $3\sqrt{2}$.

Решение.

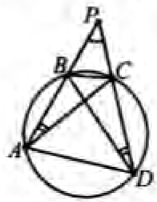
Для нахождения длины BC найдём угол A и воспользуемся теоремой синусов: $\frac{BC}{\sin\angle A} = 2R$, где R – радиус описанной окружности $\triangle ABC$. Из условия имеем: $\angle A = 180° - \angle B - \angle C = 180° - 48° - 87°$, $\angle A = 45°$, $2R = 6\sqrt{2}$.

Таким образом, $BC = 2R \cdot \sin\angle A = 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$. *Ответ:* 6

$\boxed{25}$ Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, P – точка пересечения продолжений сторон AB и CD. Докажите, что $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.

Решение.

Заметим, что $\angle BAC = \angle BDC$ – как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, см. рисунок.



Так как в треугольниках APC и DPB угол общий, а угол A треугольника APC равен углу D треугольника DPB, то $\triangle APC$ подобен $\triangle DPB$ (по двум равным углам).

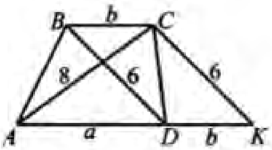
Из подобия треугольников APC и DPB следует, что $\frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP}$. Отсюда (по правилу пропорции) получаем: $AP \cdot BP = CP \cdot DP$, что и требовалось доказать.

$\boxed{26}$ Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 6 и 8, а средняя линия равна 5.

Решение.

1) Пусть $ABCD$ – данная в условии трапеция, где $AC = 8$, $BD = 6$. Пусть также $AD = a$, $BC = b$.

Через точку C проведём прямую, параллельную диагонали BD, и точку пересечения этой прямой с прямой AD обозначим через K, см. данный ниже рисунок.



Четырёхугольник $BCKD$ является параллелограммом ($BC \parallel DK$ — так как $ABCD$ трапеция, $CK \parallel BD$ — по построению). Следовательно, $CK = BD = 6$, $DK = BC = b$. Для длины отрезка AK имеем следующее равенство: $AK = AD + DK = a + b$. Так как сумма длин оснований трапеции равна удвоенной средней линии, которая по условии равна 5, то $a + b = 2 \cdot 5 = 10$.

2) Заметим, что площадь треугольника ACK равна площади трапеции $ABCD$. В самом деле, $S_{ACK} = \frac{1}{2} AK \cdot CH = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$, где CH — высота $\triangle ACK$. Но высота треугольника ACK является одновременно и высотой трапеции $ABCD$, поэтому $\frac{1}{2}(a + b) \cdot h = S_{ABCD}$.

3) Из пункта 2) следует, что нам достаточно найти площадь треугольника ACK, в котором нам известны длины всех трёх сторон: $AC = 8$, $CK = 6$, $AK = 10$. Для этого можно использовать формулу Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c – длины сторон треугольника, $p = a + b + c$. Но и этих вычислений можно избежать, если заметить, что $AC^2 + CK^2 = 8^2 + 6^2 = 10^2 = AK^2$. Из этого равенства согласно обратной теореме Пифагора следует, что $\triangle ACK$ — прямоугольный треугольник с катетами AC и CK, поэтому $S_{ACK} = \frac{1}{2} AC \cdot CK = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

Ответ: 24

Тест №3

21 Решите неравенство $(15x - 4)^2 \geqslant (4x - 15)^2$.

Решение.

Преобразуем данное в условии неравенство, используя формулу разности квадратов:
$(15x - 4)^2 \geqslant (4x - 15)^2$, $(15x - 4 - 4x + 15) \cdot (15x - 4 + 4x - 15) \geqslant 0$,
$(11x + 11) \cdot (19x - 19) \geqslant 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) \geqslant 0$.

По методу интервалов находим, что решением неравенства $(x + 1)(x - 1) \geqslant 0$ являются $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

22 Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 70 км/ч, следующие пять часов — со скоростью 90 км/ч, а затем один час — со скоростью

60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

За первые два часа автомобиль проехал $2 \cdot 70 = 140$ км, за следующие 5 часов автомобиль проехал $5 \cdot 90 = 450$ км, а за последний час — 60 км. Длина всего пути, пройденного автомобилем, равна $140 + 450 + 60 = 650$ км, а время, затраченное на этот путь, составило $2+5+1 = 8$ часов. Поэтому средняя скорость автомобиля на протяжении всего путь равна $\dfrac{650\text{ км}}{8\text{ ч}} = 81{,}25$ км/ч.

Ответ: 81,25

$\boxed{23}$ Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2-6x)(x^2+5x-14)}{x^2+7x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

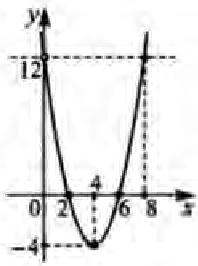
Сначала преобразуем выражение, определяющее данную в условии функцию. Имеем: $x^2 - 6x = x(x-6)$, $x^2 + 7x = x(x+7)$; корнями квадратного трёхчлена $x^2 + 5x - 14$ являются $x = 2$ и $x = -7$, поэтому $x^2 + 5x - 14 = (x-2)(x+7)$. Следовательно, $\dfrac{(x^2-6x)(x^2+5x-14)}{x^2+7x} = \dfrac{x(x-6)(x-2)(x+7)}{x(x+7)} = (x-6)(x-2) = x^2 - 8x + 12$ при всех $x \neq 0$, $x \neq -7$.

Итак, графиком данной в условии функции является парабола $y = x^2 - 8x + 12$ с двумя выколотыми точками, абсциссы которых $x = 0$ и $x = -7$ (при $x = 0$ и $x = -7$ данная в условии функция не определена).

Вершиной параболы $y = x^2 - 8x + 12$ является точка с абсциссой $x = \dfrac{8}{2} = 4$ и ординатой $y = 4^2 - 8 \cdot 4 + 12 = -4$. Вычислим ординаты двух выколотых точек: $y(0) = 12$, $y(-7) = (-7)^2 - 8 \cdot (-7) + 12 = 117$. На рисунке (см. на следующей странице) изображён эскиз графика этой параболы с выколотой точкой $x = 0$, $y = 12$, вторая выколотая точка $x = -7$, $y = 117$ не входит в границы рисунка.

Из сказанного выше следует, что прямая $y = m$ имеет ровно одну общую точку с графиком данной в условии функции при $m = -4$, $m = 12$ и $m = 117$.

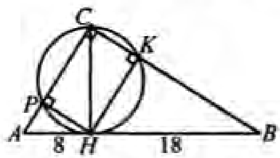
Ответ: $-4; 12; 117$



$\boxed{24}$ В прямоугольном треугольнике ABC высота CH делит гипотенузу AB на отрезки $AH = 8$ и $BH = 18$. Окружность, построенная на отрезке CH, как на диаметре, пересекает стороны AC и BC в точках P и K. Найдите длину отрезка PK.

Решение.

1) Так как углы CPH и CKH вписаны в окружность и опираются на её диаметр, то эти углы равны 90°, см. данный ниже рисунок.



2) Поскольку в четырёхугольнике $CKHP$ углы при вершинах P, C и K прямые, то $\angle PHK = 360° - 90° \cdot 3 = 90°$. Следовательно, $CKHP$ – прямоугольник (т.к. все углы прямые).

3) В любом прямоугольнике диагонали равны, поэтому $PK = CH$, и нам достаточно найти длину высоты CH. По свойству высоты прямоугольного треугольника имеем: $CH^2 = AH \cdot BH = 8 \cdot 18 = 144$, откуда $CH = 12$.

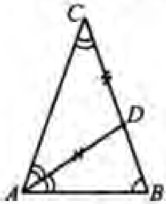
Ответ: 12

$\boxed{25}$ В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB проведена биссектриса AD. Оказалось, что $CD = AD$. Докажите, что при этом будет выполнено следующее равенство: $AB^2 = BC \cdot BD$.

Решение.

Так как $AD = CD$, то $\angle CAD = \angle ACD$ – как углы при основании равнобедренного треугольника. А поскольку AD – биссектриса, то

$\angle CAD = \angle BAD$. Поэтому $\angle ACD = \angle BAD$, см. данный ниже рисунок.



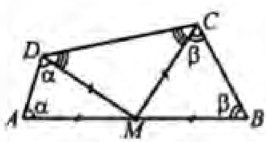
Заметим, что у треугольников ABD и CAB равны углы при вершинах A и C ($\angle BAD = \angle ACD$), а угол при вершине B общий. Следовательно, эти треугольники подобны (по двум равным углам).

Из подобия треугольников ABD и CAB имеем: $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{AB}{BC}$. Отсюда по правилу пропорции получаем: $BD \cdot BC = AB^2$, что и требовалось доказать.

$\boxed{26}$ Середина стороны AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AB, если $CD = 3$, а углы C и D этого четырёхугольника равны $116°$ и $109°$ соответственно.

Решение.

1) Пусть M — середина стороны AB, и пусть $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Так как по условию точка M равноудалена от всех вершин, т.е. $MA = MD = MC = MB$, то $\angle DAM = \angle ADM = \alpha$ и $\angle CBM = \angle BCM = \beta$ — как углы при основаниях равнобедренных треугольников ADM и BCM, см. данный ниже рисунок.



2) По условию $\angle ADC = 109°$, $\angle BCD = 116°$. Составим уравнение для нахождения α и β, используя равенство $\angle CDM = \angle DCM$. Имеем: $\angle CDM = \angle ADC - \angle ADM = 109° - \alpha$, $\angle DCM = \angle BCD - \angle BCM = 116° - \beta$, $109° - \alpha = 116° - \beta$, $\beta - \alpha = 7°$.

3) Второе уравнение для нахождения α и β получим из равенства $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ (сумма всех внутренних углов четырёхугольника равна $360°$): $\alpha + \beta + 116° + 109° = 360°$, $\alpha + \beta = 135°$. Итак, для определения α и β имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \beta - \alpha = 7^\circ \\ \beta + \alpha = 135^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta - \alpha = 7^\circ \\ 2\beta = 142^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 64^\circ \\ \beta = 71^\circ. \end{cases}$$

4) В равнобедренном треугольнике CDM вычислим угол при вершине M, а затем, зная длину CD (по условию $CD = 3$), вычислим длину боковой стороны DM. Имеем: $\angle CDM = \angle ADC - \alpha = 109^\circ - 64^\circ = 45^\circ$. Так как угол при основании равнобедренного треугольника CDM равен 45°, то $\angle CMD = 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$, т.е. $\triangle CDM$ – прямоугольный. Следовательно, $DM = \dfrac{CD}{\sqrt{2}}$, а искомая длина стороны AB равна $2DM = = 2 \cdot \dfrac{CD}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.

Ответ: $3\sqrt{2}$

Тест №5

21 Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{3-x}{3+(1-2x)^2} \geqslant 0, \\ 5 - 18x \leqslant 21 - 14x \end{cases}$

Решение.

Так как $3 + (1-2x)^2 \geqslant 0$ при любых значениях x, то первое неравенство данной в условии системы равносильно неравенству $3 - x \geqslant 0$, $3 \geqslant x$, т.е. его решением является промежуток $(-\infty; 3]$.

Решим второе неравенство данной системы: $5 - 18x \leqslant 21 - 14x \Leftrightarrow 5 - 21 \leqslant 18x - 14x$, $-16 \leqslant 4x \Leftrightarrow -4 \leqslant x$.

Находя пересечение промежутков $(-\infty; 3]$ и $[-4; +\infty)$, являющихся решениями 1-го и 2-го неравенств данной в условии системы, получаем, что решением этой системы является промежуток $[-4; 3]$.

Ответ: $[-4; 3]$

22 Работу по обновлению фасада здания первый маляр выполнит на один день быстрее, чем второй, и на 4 дня быстрее, чем третий. Второй и третий маляры, работая вместе, выполнят эту работу за то же время, что и первый маляр, работая один. За сколько дней выполнит эту работу первый маляр?

Решение.

Примем весь объём работы за 1. Пусть первый маляр выполняет эту работу за x дней. Тогда, по условию, второй маляр выполняет эту работу за $x+1$ день, а третий — за $x+4$ дня. Объёмы работ, выполняемых за один день первым, вторым и третьим малярами, равны соответственно $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x+4}$. Из условия следует, что второй и третий маляры вместе за день выполняют такой же объём работы, как и первый, работая один. Поэтому имеем уравнение: $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x}$. Решим это уравнение: $\frac{x+4+x+1}{(x+1)\cdot(x+4)}=\frac{1}{x}$, $(2x+5)\cdot x=(x+1)\cdot(x+4)$, $x^2=4 \Rightarrow x=2$.

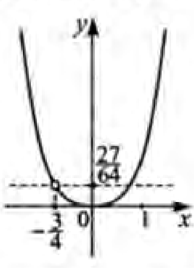
Ответ: 2

$\boxed{23}$ Постройте график функции $y=\frac{(4x^3+3x^2)|x|}{4x+3}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Преобразуем выражение, определяющее данную в условии функцию: $\frac{4x^3+3x^2}{4x+3}=\frac{x^2\cdot(4x+3)}{4x+3}=x^2$, если $4x+3\neq 0$.

Таким образом, при любом $x\neq -\frac{3}{4}$ значение данной в условии функции совпадает со значением функции $y=x^2\cdot|x|$, или, что то же самое, $y=|x^3|$. Поэтому графиком этой функции является график функции $y=|x^3|$ с выколотой точкой $x=-\frac{3}{4}$, $y=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$ (при $x=-\frac{3}{4}$ данная в условии функция не определена). График функции $y=|x^3|$ получается из графика функции $y=x^3$ симметричным отражением относительно оси Ox той части графика, которая расположена ниже оси Ox. Эскиз этого графика изображён на данном ниже рисунке.

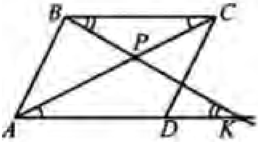


Из рисунка следует, что прямая $y=m$ имеет с графиком данной в условии функции ровно одну общую точку при $m=0$ и $m=\frac{27}{64}$.

24 На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ взята точка P, прямые BP и AD пересекаются в точке K. Найдите отношение $AK : DK$, если известно, что $AP : CP = 5 : 3$.

Решение.

Заметим, что $\angle PAK = \angle PCB$, $\angle AKP = \angle CBP$ – как накрест лежащие углы при параллельных прямых, см. данный ниже рисунок. Поэтому треугольники AKP и CBP подобны (по двум равным углам).



Из подобия треугольников AKP и CBP следует, что $\frac{AK}{BC} = \frac{AP}{CP} = \frac{5}{3}$ ($AP : CP = 5 : 3$ – по условию). Следовательно, $AK = \frac{5}{3}BC = \frac{5}{3}AD$ ($BC = AD$ – как противоположные стороны параллелограмма). Отсюда находим, что $AD = \frac{3}{5}AK$, $DK = AK - AD = AK - \frac{3}{5}AK = \frac{2}{5}AK$. Из равенства $DK = \frac{2}{5}AK$ получаем, что $AK : DK = 5 : 2$.

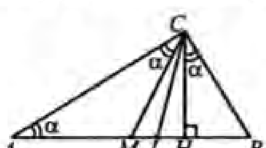
Ответ: $5 : 2$

25 Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведёнными из этой же вершины.

Решение.

Пусть ABC – прямоугольный треугольник с прямым углом C, а отрезки CH, CL, CM – соответственно высота, биссектриса и медиана этого треугольника.

1) Величину угла BAC обозначим через α, тогда $\angle ACH = 90° - \alpha$, $\angle BCH = 90° - \angle ACH = \alpha$, см. данный ниже рисунок.



2) По свойству медианы к гипотенузе прямоугольного треугольника

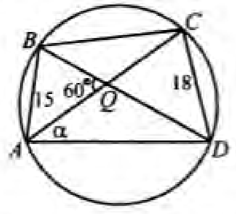
имеем: $CM = AM$. Отсюда следует, что $\angle ACM = \angle CAM = \alpha$ (как углы при основании равнобедренного треугольника ACM).

Из пунктов 1) и 2) следует, что $\angle BCH = \angle ACM$. Так как CL – биссектриса угла C, то $\angle ACL = \angle BCL$. Из последних двух равенств следует, что $\angle MCL = \angle ACL - \angle ACM = \angle BCL - \angle BCH = \angle HCL$. Итак, нами доказано, что $\angle MCL = \angle HCL$, т.е. CL – биссектриса угла MCH, что и требовалось доказать.

26 Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 15$ и $CD = 18$ вписан в окружность. Диагонали этого четырёхугольника пересекаются в точке Q, причём $\angle AQB = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной вокруг четырёхугольника $ABCD$.

Решение.

1) Пусть $\angle CAD = \alpha$, $\angle BDA = \delta$, тогда $\angle BQA = \alpha + \delta$ (угол BQA равен сумме углов CAD и BDA как внешний угол треугольника ADQ) см. данный ниже рисунок.



По условию $\angle BQA = 60^\circ$, и, значит, $\alpha + \delta = 60^\circ$.

2) Пусть R – искомый радиус описанной окружности четырёхугольника $ABCD$. Из треугольников ABD и CDA по теореме синусов имеем: $AB = 2R \cdot \sin\delta$, $CD = 2R \cdot \sin\alpha$. Вспомнив, что $\alpha + \delta = 60^\circ$ (см. пункт 1), выразим δ через α и получим выражение для $\sin\delta$ по формуле синуса разности: $\sin\delta = \sin(60^\circ - \alpha) = \sin 60^\circ \cdot \cos\alpha - \cos 60^\circ \cdot \sin\alpha$. Отсюда, учитывая условия ($AB = 15$, $CD = 18$), получаем следующую систему для неизвестных R и α:

$$\begin{cases} 2R\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right) = 15 \\ 2R\cdot\sin\alpha = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\cdot R\cdot\cos\alpha - R\cdot\sin\alpha = 15 \\ R\cdot\sin\alpha = 9. \end{cases}$$

Подставляя $R \cdot \sin\alpha = 9$ в первое уравнение системы, имеем:

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cdot R\cdot\cos\alpha = 24 \\ R\cdot\sin\alpha = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R\cdot\cos\alpha = 8\sqrt{3} \\ R\cdot\sin\alpha = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2\cdot\cos^2\alpha = (8\sqrt{3})^2 \\ R^2\cdot\sin^2\alpha = 9^2 \end{cases}$$

Суммируя правые и левые части уравнений последней системы, получаем, что $R^2 \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 273$, $R^2 = 273$, $R = \sqrt{273}$.

Ответ: $\sqrt{273}$

Тест №7

21 Найдите $f(7)$, если $f(x-4) = 7^{14-x}$.

Решение.

Так как $x - 4 = 7 \Leftrightarrow x = 11$, то чтобы вычислить $f(7)$, достаточно в выражение для $f(x-4)$ подставить в качестве аргумента $x = 11$. Поэтому имеем: $f(7) = 7^{14-11} = 7^3 = 343$.

Ответ: 343

22 Первый наборщик набирает за час 5 страниц текста, второй — 6 страниц, а третий — 7 страниц. Определите, по сколько страниц текста нужно отдать для набора каждому из них, если требуется, чтобы весь текст, объём которого 216 страниц, был набран как можно быстрее.

Решение.

Весь текст будет набран максимально быстро, если в работе ни одного из наборщиков не будет «простоя», т.е. все три наборщика закончат работу одновременно. Так как в сумме за час они набирают $5 + 6 + 7 = 18$ страниц, то на набор 216 страниц (без простоев в работе) уйдёт $\frac{216}{18} = 12$ часов. Для того, чтобы каждый из наборщиков работал втечении 12 часов, необходимо первому отдать в набор $5 \cdot 12 = 60$, второму — $6 \cdot 12 = 72$, а третьему — $7 \cdot 12 = 84$ страниц текста.

Ответ: $60, 72, 84$

23 Постройте график функции $y = \frac{1}{2}\left(\left|2x - \frac{1}{2x}\right| + 2x + \frac{1}{2x}\right)$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

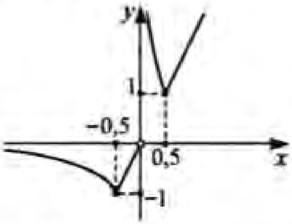
Решение.

Сначала преобразуем выражение, определяющее данную в условии функцию. Так как $2x - \frac{1}{2x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 1}{2x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$x \in [-0{,}5; 0) \cup [0{,}5; +\infty)$, то снимая знак модуля в выражении $\left|2x - \dfrac{1}{2x}\right|$, для данной в условии функции имеем:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(2x - \dfrac{1}{2x} + 2x + \dfrac{1}{2x}\right) = 2x, & \text{при } x \in [-0{,}5; 0) \cup [0{,}5; +\infty) \\ \dfrac{1}{2}\left(-2x + \dfrac{1}{2x} + 2x + \dfrac{1}{2x}\right) = \dfrac{1}{2x}, & \text{при } x \in (-\infty; -0{,}5) \cup (0; 0{,}5). \end{cases}$$

Таким образом, на промежутках $[-0{,}5; 0)$ и $[0{,}5; +\infty)$ графиком данной в условии функции являются участки прямой $y = 2x$, а на промежутках $(-\infty; -0{,}5)$ и $(0; 0{,}5)$ — участки гиперболы $y = \dfrac{1}{2x}$. Эскиз этого графика изображён на данном ниже рисунке.



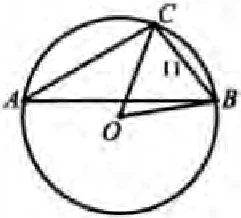
Из построенного графика следует, что прямая $y = m$ имеет ровно одну общую точку с этим графиком только при $m = -1$ и $m = 1$.

Ответ: $-1; 1$

$\boxed{24}$ Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся как $3 : 5 : 10$. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон равна 11.

Решение.

Пусть ABC — данный треугольник, точка O — центр описанной окружности этого треугольника, причём AB — большая, а BC — меньшая из его сторон (тогда по условию $BC = 11$), см. данный ниже рисунок.



Заметим, что отношение длин дуг, стягиваемых хордами $\breve{BC}$, $\breve{AC}$ и $\breve{AB}$, равно отношению градусных мер этих дуг. С другой стороны, отношение градусных мер дуг $\breve{BC}$, $\breve{AC}$ и $\breve{AB}$ равно отношению градусных мер углов A, B и C, опирающихся на эти дуги. Поэтому $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 5 : 10$. Пусть $\angle A = 3x$, тогда $\angle B = 5x$, $\angle C = 10x$, а поскольку $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, то $3x + 5x + 10x = 180°$, $x = 10°$. Отсюда имеем: $\angle A = 3x = 30°$, $\angle BOC = 2\angle A = 60°$.

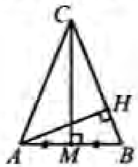
Так как $\angle BOC = 60°$ и $BO = CO$, то треугольник BOC является равносторонним. Следовательно, $BO = BC = 11$.

Ответ: 11

25 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB проведена высота AH. Докажите, что $AB^2 = 2\,BC \cdot BH$.

Решение.

Пусть M – середина стороны AB. Так как $AC = BC$, то медиана CM является и высотой, см. данный ниже рисунок.



Заметим, что треугольники ABH и CBM подобны по двум равным углам: $\angle AHB = \angle CMB = 90°$, а угол при вершине B у этих треугольников общий.

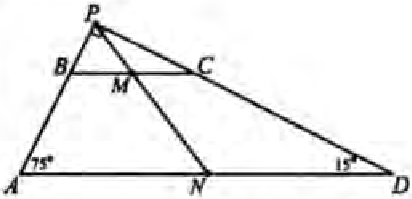
Из подобия треугольников ABH и CBM следует, что $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BH}{BM}$. Отсюда по правилу пропорции имеем: $AB \cdot BM = BC \cdot BH$. Подставляя в это равенство $BM = \dfrac{1}{2}AB$, получаем: $\dfrac{1}{2}AB^2 = BC \cdot BH$,
$AB^2 = 2BC \cdot BH$, что и требовалось доказать.

26 Углы при одном из оснований трапеции равны $75°$ и $15°$, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 15 и 7. Найдите меньшее из оснований этой трапеции.

Решение.

1) Пусть $ABCD$ – данная трапеция, причём $\angle A = 75°$, $\angle D = 15°$, точки M и N – середины оснований BC и AD, P – точка пересечения

прямых AB и CD, см. данный ниже рисунок. Длины оснований BC и AD обозначим через b и a соответственно. Из треугольника APD имеем: $\angle APD = 180^\circ - \angle A - \angle D = 90^\circ$.



Заметим, что поскольку точки P, M, N лежат на одной прямой (этот факт мы докажем в самом конце решения), то $MN = PN - PM$.
А поскольку отрезки PN и PM являются медианами прямоугольных треугольников APD и BPC, то $PN = \frac{1}{2}AD$, $PM = \frac{1}{2}BC$. Отсюда получаем: $MN = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(a - b)$.

2) Так как отрезками, соединяющими середины противоположных сторон трапеции, являются отрезок MN и средняя линия трапеции, равные $\frac{1}{2}(a-b)$ и $\frac{1}{2}(a+b)$ соответственно, то $\frac{1}{2}(a-b) = 7$, $\frac{1}{2}(a+b) = 15$. Вычитая из равенства $\frac{a+b}{2} = 15$ равенство $\frac{a-b}{2} = 7$, находим, что $b = 8$.

3) Для полноты решения остаётся лишь доказать, что точки P, M, N действительно лежат на одной прямой. Заменим это утверждение на цепочку равносильных ему утверждений: точка N лежит на прямой PM $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ прямая PM пересекает прямую AD в точке N.

Для доказательства последнего из этих утверждений обозначим через N' точку пересечения прямой PM с прямой AD и покажем, что точки N' и N совпадают.

В самом деле, по теореме Фалеса имеем: $\frac{AN'}{DN'} = \frac{BM}{CM} = 1$, поэтому $AN' = DN'$, т.е. N' – середина AD и, значит, совпадает с точкой N, ч.т.д.

Любителям геометрии. Для любой трапеции $ABCD$ справедливо более сильное утверждение, чем доказанное выше. А именно, если K – точка пересечения диагоналей трапеции, то все четыре точки P, M, N и K лежат на одной прямой.

В самом деле, если через K_1 и K_2 обозначить точки пересечения диагоналей AC и BD с отрезком MN, то из подобия $\triangle CMK_1$ и $\triangle ANK_1$

имеем: $\dfrac{MK_1}{NK_1} = \dfrac{CM}{AN}$; а из подобия $\triangle BMK_2$ и $\triangle DNK_2$ имеем: $\dfrac{MK_2}{NK_2} = \dfrac{BM}{DN}$. Так как $CM = BM$ и $AN = DN$, то справедливо равенство $\dfrac{MK_1}{NK_1} = \dfrac{MK_2}{NK_2}$, из которого следует, что точки K_1 и K_2 совпадают.

Тест №9

21 Найдите значение выражения $\dfrac{p(a)}{p(8-a)}$, если $p(x) = \dfrac{x(8-x)}{x-4}$.

Решение.

Подставляя в заданную условием функцию в качестве аргумента $x = a$ и $x = 8 - a$, получаем:

$$p(a) = \frac{a(8-a)}{a-4};\ p(8-a) = \frac{(8-a)(8-(8-a))}{(8-a)-4} = \frac{(8-a)a}{4-a}.$$

Найдём отношение $\dfrac{p(a)}{p(8-a)}$:

$$\frac{p(a)}{p(8-a)} = \frac{a(8-a)}{a-4} : \frac{(8-a)a}{4-a} = \frac{4-a}{a-4} = \frac{-(a-4)}{a-4} = -1.$$

Ответ: -1

22 Влажность свежескошенной травы составила 70%. Сколько кг сена, влажность которого 20%, получится из 6 тонн этой травы?

Решение.

Так как влажность травы равна 70%, то содержание в ней «сухого вещества» (всё, кроме воды) равно 30%. Поэтому в 6 тоннах этой травы содержится $0{,}3 \cdot 6 = 1{,}8$ тонн «сухого вещества». Влажность сена должна составить 20%, т.е. 1,8 тонн «сухого вещества» должны составить 80% массы сена. Отсюда, обозначив через x массу сена (в тоннах), имеем пропорцию: $1{,}8 - 80\%$

$x - 100\%$

По правилу пропорции находим: $x = \dfrac{1{,}8 \cdot 100}{80} = 2{,}25$ т, т.е. 2250 кг сена.

Ответ: 2250

23 Постройте график кусочно-заданной функции $y = f(x)$, которая на каждом промежутке вида $(m; m+1]$, где m — произвольное целое число, определена равенством: $f(x) = m$. Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ пересекает график $y = f(x)$ не менее, чем в девяти точках.

Решение.

1) Данная в условии функция является кусочно-постоянной: на каждом промежутке вида $(m; m+1]$, где $m \in Z$, её значение постоянно, а при переходе с одного промежутка на другой (соседний) её значение изменяется на 1. График этой функции имеет «ступенчатый» вид, его эскиз изображён на данном ниже рисунке 1.

рис.1

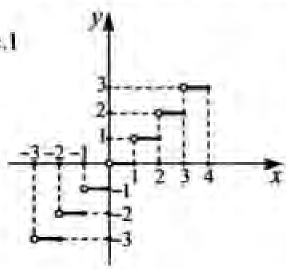
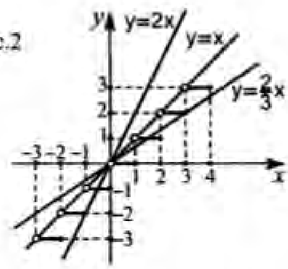


рис.2



2) Участок графика $y = f(x)$, соответствующий значениям аргумента x из промежутка $(m; m+1]$, будем называть «ступенькой с номером m» (все точки «ступеньки с номером m» лежат на прямой $y = m$). Заметим, что левые концы всех «ступенек» графика $y = f(x)$ лежат на прямой $y = x$. Поэтому если угловой коэффициент k прямой $y = kx$ меньше 1, то эта прямая может пересекать лишь те «ступеньки», которые расположены выше оси абсцисс, а если $k > 1$, то прямая $y = kx$ может пересекать лишь те «ступеньки», которые расположены ниже оси абсцисс. На рисунке 2 изображены прямая $y = x$, на которой лежат левые концы всех «ступенек», прямая $y = \frac{2}{3}x$, пересекающая «ступеньки с номерами 1 и 2», а также прямая $y = 2x$, пересекающая «ступеньки с номерами -1 и -2».

Если прямая $y = kx$ проходит через правый конец ступеньки с номером m, где $m \neq -1$, то $k = \frac{m}{m+1}$.

Заметим также, что если прямая $y = kx$ пересекает некоторую ступеньку с положительным номером m, то она пересекает и все ступеньки с номерами $1, 2, ..., m-1$ — это несложно увидеть «чисто геометрически» — из рисунка 2. Аналогично, если прямая $y = kx$ пересекает ступеньку с номером $m < -1$, то она пересекает и все ступеньки с номерами от m до -1 включая.

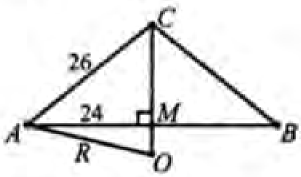
Из предыдущего абзаца следует, что если прямая $y = kx$ пересекает не менее девяти ступенек с положительными номерами, то она пересекает и ступеньку с номером 9, поэтому угловой коэффициент такой прямой не меньше, чем $\frac{9}{9+1} = 0{,}9$. Если же прямая $y = kx$ пересекает не менее девяти ступенек с отрицательными номерами, то она пересекает и ступеньку с номером -9, поэтому её угловой коэффициент не больше, чем $\frac{-9}{-9+1} = \frac{9}{8}$. Таким образом, все искомые значения k это $0{,}9 \leqslant k < 1$ и $1 < k < \frac{9}{8}$.

Ответ: $[0{,}9; 1) \cup (1; 9/8]$

24 Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 26, а основание равно 48. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

Решение.

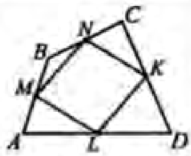
1) Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник с основанием $AB = 48$, точка O — центр описанной окружности этого треугольника, а точка M — середина стороны AB, см. данный ниже рисунок. Так как $AC = BC$, то медиана CM является также и высотой. Из прямоугольного треугольника ACM имеем: $CM^2 = AC^2 - AM^2 = 26^2 - 24^2$, $CM = 10$ ($AC = 26$ — по условию, $AM = \frac{AB}{2} = 24$).



2) Искомый радиус описанной окружности обозначим через R, тогда $OM = CO - CM = R - 10$ (так как $AM > CM$, то $\angle ACM > 45°$ $\Rightarrow \angle ACB > 90°$, поэтому точка O расположена вне треугольника ABC именно так, как показано по теореме Пифагора на данном выше рисунке). Из прямоугольного треугольника AOM по теореме Пифагора имеем: $AO^2 = AM^2 + OM^2$, $R^2 = 24^2 + (R-10)^2$, $576 + 100 - 20R = 0$, $R = 33{,}8$.

Ответ: 33,8

25 Точки M, N, K, L – середины сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$, см. данный справа рисунок. Докажите, что площадь четырёхугольника $MNKL$ равна половине площади четырёхугольника $ABCD$.



Решение.

1) Так как MN – средняя линия треугольника ABC, то треугольник MBN подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$, см. рис. 1.

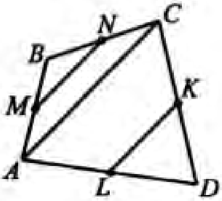


рис. 1

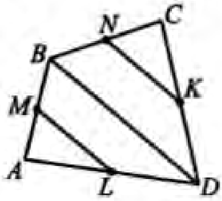


рис. 2

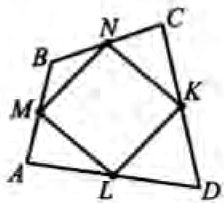


рис. 3

Отношения площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, поэтому площадь треугольника MBN равна $\frac{1}{4}$ площади треугольника ABC: $S_{MBN} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Аналогично, из подобия треугольников LDK и ADC имеем: $S_{LDK} = \frac{1}{4}S_{ADC}$. Следовательно,

$$S_{MBN} + S_{LDK} = \frac{1}{4}(S_{ABC} + S_{ADC}) = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

2) Так как ML, NK – средние линии треугольников ABD и CBD, то

$$S_{AML} = \frac{1}{4}S_{ABD},\ S_{CNK} = \frac{1}{4}S_{CBD}, \text{ см. рис. 2,}$$

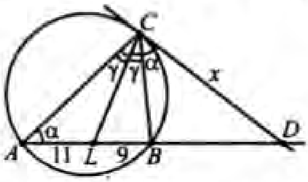
$$S_{AML} + S_{CNK} = \frac{1}{4}(S_{ABD} + S_{CBD}) = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

3) Сложив почленно равенства $S_{MBN} + S_{LDK} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$ и $S_{AML} + S_{CNK} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$, получим: $S_{MBN} + S_{LDK} + S_{AML} + S_{CNK} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Заметим, что площадь четырёхугольника $ABCD$ равна сумме площадей составляющих его четырёхугольника $MNKL$ и треугольников MBN, LDK, AML, CNK. Поэтому $S_{ABCD} = S_{MNKL} + \frac{1}{2}S_{ABCD}$, откуда $S_{MNKL} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, что и требовалось доказать.

26 Биссектриса CL треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AL = 11$ и $BL = 9$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через точку C, пересекает прямую AB в точке D. Найдите длину отрезка CD.

Решение.

1) Пусть $CD = x$ — искомая величина, и $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACL = \gamma$. Так как градусная мера угла между хордой и касательной равна половине градусной меры стягиваемой этой хордой дуги, то $\angle BCD = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BC} = \angle BAC$, т.е. $\angle BCD = \alpha$, см. данный ниже рисунок.



2) Заметим, что $\angle DLC = \angle LAC + \angle ACL = \alpha + \gamma$ — как внешний угол треугольника ACL при вершине L. А поскольку $\angle DCL = \angle BCD + \angle BCL = \alpha + \gamma$, то $\angle DCL = \angle DLC$ и, значит, треугольник DCL равнобедренный — $DC = DL$.

3) Так как $DL = DC = x$, то $DB = DL - BL = x - 9$, $DA = DL + AL = x + 11$. По свойству касательной имеем: $CD^2 = DB \cdot DA$ (квадрат касательной равен произведению отрезков секущей). Отсюда получаем следующее уравнение для нахождения x:

$x^2 = (x-9)(x+11)$, $x^2 = x^2 + 2x - 99$, $2x = 99$, откуда $x = 49{,}5$.

Ответ: 49,5

Тест №11

21 Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 = 3y + 7, \\ x^2 + 2 = 3y + y^2. \end{cases}$

Решение.

Заменяя второе уравнение системы разностью второго и первого уравнений, получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} x^2 = 3y + 7 \\ 2 = y^2 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3y + 7 \\ y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3y + 7 \\ y = 3 \text{ или } y = -3. \end{cases}$$

Если $y = -3$, то уравнение $x^2 = 3y + 7$ принимает вид: $x^2 = -2$ – решений нет.

Если $y = 3$, то уравнение $x^2 = 3y + 7$ принимает вид: $x^2 = 16$ – корни уравнения $x = -4$ и $x = 4$.

Таким образом, все решения исходной системы это $y = 3, x = -4$ и $y = 3, x = 4$.

Ответ: $(-4; 3); (4; 3)$

$\boxed{22}$ Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 10 км, одновременно в одном направлении стартовали два мотоциклиста. Скорость первого мотоциклиста равна 90 км/ч, и через 50 минут после старта он опережал второго мотоциклиста на один круг. Найдите скорость второго мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Поскольку 50 минут составляют 5/6 часа, то за 50 минут первый мотоциклист проехал 90 км/ч $\cdot \frac{5}{6}$ ч $= 75$ км. Из условия следует, что второй мотоциклист проехал за это же время на один круг меньше, т.е. он проехал 65 км.

Так как второй мотоциклист проехал за 50 минут 65 км, то его скорость равна 65 км : $\frac{5}{6}$ ч $= 78$ км/ч.

Ответ: 78

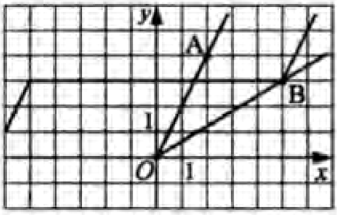
$\boxed{23}$ Постройте график кусочно заданной функции:

$$y = \begin{cases} 2x + 13 \text{ при } x < -5, \\ 3 \text{ при } -5 \leqslant x \leqslant 5, \\ 2x - 7 \text{ при } x > 5. \end{cases}$$

Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ пересекает этот график в трёх различных точках.

Решение.

График данной функции состоит из трёх частей, каждая из которых представляет собой участок некоторой прямой и имеет с прямой $y = kx$ не более одной общей точки. Поэтому график данной функции имеет с прямой $y = kx$ ровно три общие точки лишь в том случае, если каждая из трёх его частей имеет общую точку с этой прямой. Последнее может быть выполнено только в том случае, если прямая $y = kx$ составляет с осью Ox угол больший, чем прямая OB, но меньший, чем прямая OA, параллельная прямой $y = 2x - 7$, см. данный ниже рисунок (если одно из указанных условий не выполнено, то прямая $y = kx$ не пересекает один из двух участков графика: при $-5 \leqslant x \leqslant 5$ или $x > 5$).



Легко видеть, что если прямая $y = kx$ лежит между прямыми OB и OA, то она действительно пересекает все три участка графика, изображённого на рисунке. Таким образом, искомые значения k – это все числа, которые больше углового коэффициента прямой OB, но меньше углового коэффициента прямой OA. Угловой коэффициент прямой OA равен 2 (т.к. эта прямая параллельна прямой $y = 2x - 7$). Угловой коэффициент прямой OB можно вычислить по формуле: $\frac{y_B}{x_B}$, где x_B, y_B – координаты вектора OB. Точка B имеет координаты (5; 3), поэтому координаты вектора OB равны $x_B = 5 - 0 = 5$, $y_B = 3 - 0 = 3$, и по указанной выше формуле получаем, что угловой коэффициент прямой OB равен 0,6.

Итак, все искомые k – это $k \in (0{,}6; 2)$.

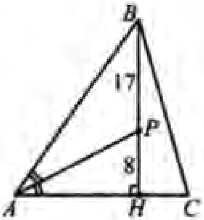
24 В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает высоту BH в точке P, при этом $BP : PH = 17 : 8$. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC, если $BC = 60$.

Решение.

1) Для нахождения радиуса R описанной окружности воспользуемся теоремой синусов: $2R = \frac{BC}{\sin\angle A}$. Длина стороны BC известна по условию ($BC = 60$), поэтому для вычисления R нам достаточно найти $\sin\angle A$.

2) Так как AP – биссектриса треугольника ABH, то $\frac{AH}{AB} = \frac{PH}{PB}$, см. данный ниже рисунок. По условию, $BP : PH = 17 : 8$ и, значит, $\frac{AH}{AB} = \frac{PH}{PB} = \frac{8}{17}$. Заметим, что поскольку $\angle AHB = 90°$, то

$\frac{AH}{AB} = \cos\angle A$. Таким образом, $\cos\angle A = \frac{8}{17}$, откуда находим, что $\sin\angle A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \frac{15}{17}$.



3) Подставляя $BC = 60$ и $\sin\angle A = \frac{15}{17}$ в равенство $2R = \frac{BC}{\sin\angle A}$, получаем, что $2R = 68$, $R = 34$.

Ответ: 34

25 Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольно точку M. Докажите, что сумма площадей треугольников ABM и CDM равна сумме площадей треугольников BCM и ADM.

Решение.

1) Пусть S – площадь параллелограмма $ABCD$, S_{ABM}, S_{CDM}, S_{BCM} и S_{ADM} – площади треугольников ABM, CDM, BCM и ADM соответственно. Заметим, что поскольку $S = S_{ABM} + S_{CDM} + S_{BCM} + S_{ADM}$, то равенство $S_{ABM} + S_{CDM} = S_{BCM} + S_{ADM}$, которое нам необходимо доказать, равносильно равенству $S_{ABM} + S_{CDM} = \frac{1}{2}S$.

2) Докажем равенство $S_{ABM} + S_{CDM} = \frac{1}{2}S$. Пусть MP и MQ – перпендикуляры, проведённые из точки M к сторонам AB и CD, см. рисунок. Тогда $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB\cdot MP$, $S_{CDM} = \frac{1}{2}CD\cdot MQ$. Так как $AB = CD$, то сложив два предыдущих равенства, получим: $S_{ABM} + S_{CDM} = = \frac{1}{2}AB\cdot(MP + MQ)$.

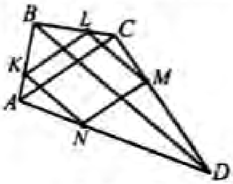
Точки P, Q и M лежат на одной прямой (т.к. из точки M можно провести лишь один перпендикуляр к параллельным прямым AB и CD).

Поэтому $MP + MQ = PQ$ – расстояние между прямыми AB и CD. Но расстояние между прямыми AB и CD равно высоте h параллелограмма $ABCD$. Поэтому $S_{ABM} + S_{CDM} = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} S$, ч.т.д.

26 На сторонах четырёхугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M, N так, что четырёхугольник $KLMN$ является ромбом, стороны которого параллельны диагоналям AC и BD. Найдите отношение площади $KLMN$ к площади $ABCD$, если $AC : BD = 1 : 2$.

Решение.

Пусть точки K, L, M, N расположены на сторонах четырёхугольника $ABCD$ так, как показано на данном ниже рисунке.



Заметим, что поскольку прямые KL и MN параллельны диагонали AC (по условию), то треугольники BKL и DNM подобны треугольникам BAC и DAC соответственно. Аналогично, из условия параллельности прямых LM и KN диагонали BD, следует подобие двух пар треугольников: $\triangle CLM \sim \triangle CBD$ и $\triangle AKN \sim \triangle ABD$. Если вычислить коэффициенты подобия вышеуказанных пар треугольников и воспользоваться тем, что отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, то можно найти отношение суммы площадей $\triangle BKL$ и $\triangle DNM$ к площади четырёхугольника $ABCD$, а также отношение суммы площадей $\triangle AKN$ и $\triangle CLM$ к площади $ABCD$. Тогда искомое отношение площади $KLMN$ к площади $ABCD$ будет равно $1 - p_1 - p_2$, где $p_1 = \frac{S_{BKL} + S_{DNM}}{S_{ABCD}}$, $p_2 = \frac{S_{AKN} + S_{CLM}}{S_{ABCD}}$.

Реализуем намеченный выше план.

1) Пусть $BK : AB = k$. Из подобия треугольников BKL и BAC имеем: $\frac{KL}{AC} = \frac{BK}{AB} = k$. А из подобия треугольников AKN и ABD имеем: $\frac{KN}{BD} = \frac{AK}{AB} = \frac{AB - BK}{AB} = 1 - k$. Из равенств $\frac{KL}{AC} = k$ и $\frac{KN}{BD} = 1 - k$ получаем, что $KL = AC \cdot k$, $KN = BD \cdot (1 - k)$. А поскольку $KLMN$ –

ромб, то $KL = KN$ и, значит, $AC \cdot k = BD \cdot (1-k)$. Отсюда получаем, что $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{1-k}{k} = \dfrac{1}{2}$ (по условию $AC : BD = 1:2$). Из последнего равенства находим, что $k = \dfrac{2}{3}$.

2) Таким образом, коэффициент подобия треугольников BKL и BAC, а также треугольников DNM и DAC равен $\dfrac{2}{3}$ ($BK : BA = DN : DA$, поэтому коэффициенты подобия двух вышеуказанных пар треугольников равны). Аналогично, коэффициенты подобия двух пар треугольников AKN, ABD и CLM, CBD равны $AK : AB = 1 - k = \dfrac{1}{3}$.

3) Так как отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, то

$$S_{BKL} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot S_{BAC} = \frac{4}{9} S_{BAC}, \quad S_{DNM} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot S_{DAC} = \frac{4}{9} S_{DAC},$$

$$S_{AKN} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot S_{ABD} = \frac{1}{9} S_{ABD}, \quad S_{CLM} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot S_{CBD} = \frac{1}{9} S_{CBD}.$$

Сложив почленно первое равенство со вторым, а третье с четвёртым, получим: $S_{BKL} + S_{DNM} = \dfrac{4}{9}\left(S_{BAC} + S_{DAC}\right) = \dfrac{4}{9} S_{ABCD}$,

$$S_{AKN} + S_{CLM} = \frac{1}{9}\left(S_{ABD} + S_{CBD}\right) = \frac{1}{9} S_{ABCD}.$$

Так как $S_{KLMN} = S_{ABCD} - S_{BKL} - S_{DNM} - S_{AKN} - S_{CLM}$, то $\dfrac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = 1 - \dfrac{S_{BKL} + S_{DNM}}{S_{ABCD}} - \dfrac{S_{AKN} + S_{CLM}}{S_{ABCD}} = 1 - \dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{4}{9}$.

Ответ: $4:9$

Тест №13

21 Решите систему уравнений $\begin{cases} (4x+1)^2 = 12y, \\ (x+4)^2 = 3y. \end{cases}$

Решение.

Вычитая из первого уравнения системы второе уравнение, умноженное на 4, получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} (4x+1)^2 - 4(x+4)^2 = 0 \\ (x+4)^2 = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4x+1)^2 - (2x+8)^2 = 0 \\ (x+4)^2 = 3y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (4x+1-2x-8)\cdot(4x+1+2x+8) = 0 \\ (x+4)^2 = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-7)\cdot(6x+9) = 0 \\ (x+4)^2 = 3y. \end{cases}$$

Корнями первого уравнения полученной системы являются $x = 3{,}5$ и $x = -1{,}5$. Подставляя эти значения x во второе уравнение системы, соответственно получаем: $3y = 7{,}5^2$, $y = 2{,}5 \cdot 7{,}5 = \frac{5}{2} \cdot \frac{15}{2} = \frac{75}{4}$ и $3y = 2{,}5^2$, $y = \frac{5^2}{2^2 \cdot 3} = \frac{25}{12}$.

Ответ: $\left(\frac{7}{2}; \frac{75}{4}\right); \left(-\frac{3}{2}; \frac{25}{12}\right)$

22 По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда. Скорость пассажирского поезда равна 80 км/ч, и, догнав товарный поезд, он прошёл мимо него за 90 секунд. Найдите скорость товарного поезда (в км/ч), если его длина составляет 600 метров, а длина пассажирского поезда — 300 метров.

Решение.

Пусть скорость товарного поезда равна v км/ч. Заметим, что поскольку поезда движутся в одном направлении, то время прохождения пассажирского поезда мимо товарного не изменится, если скорость каждого из них уменьшить на одну и ту же величину.

Если скорость каждого поезда уменьшить на v км/ч, то скорость товарного поезда станет нулевой, т.е. он будет неподвижен, а скорость пассажирского поезда будет равна $(80 - v)$ км/ч, и при этом он пройдёт мимо товарного поезда за 90 секунд. Так как длины поездов равны 300 метров и 600 метров, то это означает, что двигаясь со скоростью $(80 - v)$ км/ч пассажирский поезд за 1,5 минуты проходит 900 метров. Отсюда получаем уравнение: $(80 - v) \cdot \frac{1}{40} = 0{,}9$ (1,5 минуты $= \frac{1}{40}$ часа, 900 м $= 0{,}9$ км). Из этого уравнения находим, что $80 - v = 36$, $v = 44$.

Ответ: 44

23 Постройте график функции $y = |x^2 - 3|x| - x - 2|$ и найдите все значения a, при которых прямая $y = a$ имеет нечётное число общих точек с этим графиком.

Решение.

1) Построим график функции $f(x) = x^2 - 3|x| - x - 2$. Так как $|x| = -x$ при $x < 0$ и $|x| = x$ при $x \geqslant 0$, то $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 2, \text{ при } x < 0 \\ x^2 - 4x - 2, \text{ при } x \geqslant 0. \end{cases}$

Следовательно, график $y = f(x)$ имеет вид, изображённый на рис. 1:

при $x < 0$ это часть параболы $y = x^2 + 2x - 2$, а при $x \geqslant 0$ — часть параболы $y = x^2 - 4x - 2$.

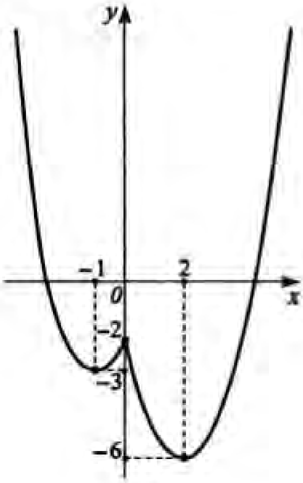


рис. 1

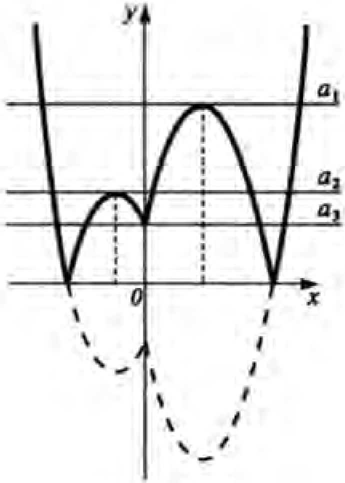


рис. 2

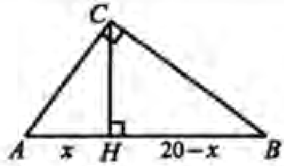
2) График $y = |f(x)|$ получается из графика $y = f(x)$ отображением части этого графика, лежащей ниже оси Ox симметрично относительно оси Ox. На рис. 2 изображён график $y = |f(x)|$, который и требовалось построить. Также на этом рисунке изображены прямые a_1, a_2, a_3, параллельные оси Ox, каждая из которых имеет нечётное число общих точек с графиком $y = |f(x)|$. Легко видеть, что все остальные прямые, параллельные оси Ox, имеют чётное число общих точек с графиком $y = |f(x)|$. Таким образом, искомыми значениями a являются те, при которых прямая $y = a$ совпадает с одной из прямых a_1, a_2, a_3.

Ответ: $a \in \{2; 3; 6\}$

$\boxed{24}$ В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны гипотенуза и высота к ней: $AB = 20, CH = 8$. Найдите длину меньшего из катетов этого треугольника.

Решение.

Пусть AC — меньший из катетов данного прямоугольного треугольника и $AH = x$, тогда $BH = 20 - x$, см. рисунок на следующей странице.



Воспользуемся свойством высоты прямоугольного треугольника: $CH^2 = AH \cdot BH$. Отсюда получаем уравнение $x(20-x) = 8^2$, $x^2 - 20x + 64 = 0$, корнями которого являются $x = 4$ и $x = 16$. Меньшему из катетов соответствует меньшая проекция на гипотенузу, поэтому $AH = 4$. По теореме Пифагора из треугольника ACH находим:

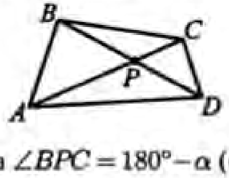
$$AC^2 = AH^2 + CH^2 = 4^2 + 8^2 = 80,\ AC = 4\sqrt{5}.$$

Ответ: $4\sqrt{5}$

25 Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Докажите, что произведение площадей треугольников ABP и CDP равно произведению площадей треугольников BCP и ADP.

Решение.

Площади треугольников, о которых идёт речь в условии, обозначим через S_{ABP}, S_{CDP} и S_{BCP}, S_{ADP}. По условию, нам требуется доказать равенство $S_{ABP} \cdot S_{CDP} = S_{BCP} \cdot S_{ADP}$.



Пусть $\angle BPA = \alpha$, тогда $\angle BPC = 180^\circ - \alpha$ (см. данный выше рисунок), и по формуле площади треугольника имеем равенства:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} BP \cdot AP \cdot \sin\alpha,\ S_{CDP} = \frac{1}{2} CP \cdot DP \cdot \sin\alpha,$$

$$S_{BCP} = \frac{1}{2} BP \cdot CP \cdot \sin(180^\circ - \alpha),\ S_{ADP} = \frac{1}{2} AP \cdot DP \cdot \sin(180^\circ - \alpha).$$

Так как $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$, то перемножая между собой сначала первые два равенства, а затем последние два равенства, получаем:

$$S_{ABP} \cdot S_{CDP} = \frac{1}{4} BP \cdot AP \cdot CP \cdot DP \cdot \sin^2\alpha,$$

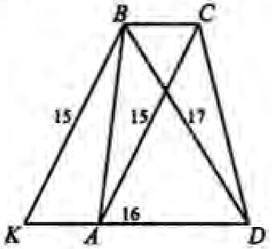
$$S_{BCP} \cdot S_{ADP} = \frac{1}{4} BP \cdot CP \cdot AP \cdot DP \cdot \sin^2\alpha.$$

Так как правые части двух последних равенств отличаются лишь порядком множителей, т.е. равны друг другу, то их левые части также равны, что и требовалось доказать.

26 Найдите площадь трапеции, если её диагонали равны 15 и 17, а средняя линия равна 8.

Решение.

Пусть $ABCD$ – данная трапеция с основаниями AD и BC, причём $AC = 15$, $BD = 17$. Из вершины B проведём прямую, параллельную диагонали AC, и обозначим через K точку пересечения этой прямой с прямой AD, см. данный ниже рисунок.



Четырёхугольник $AKBC$ – параллелограмм, поэтому $BK = AC$ и $AK = BC$. Так как по условию длина средней линии трапеции $ABCD$ равна 8, а сумма длин оснований AD и BC в два раза больше длины средней линии, то $DK = AD + AK = AD + BC = 16$.

В треугольнике BDK нам известны длины всех сторон: $BD = 17$, $DK = 16$, $BK = 15$. Поэтому мы можем найти площадь S этого треугольника по формуле Герона: $S = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$, где p – полупериметр треугольника, a, b, c – длины сторон треугольника.

С другой стороны, площадь треугольника BDK равна $S = \frac{h}{2}\cdot DK = \frac{h}{2}\cdot(AD + BC)$, где h – высота, проведённая из вершины B и совпадающая с высотой трапеции $ABCD$, т.е. эта площадь равна искомой площади трапеции. Остаётся лишь провести вычисления: $p = \frac{15+16+17}{2} = 24$, $p - a = 9$, $p - b = 8$, $p - c = 7$, $S = \sqrt{24\cdot 9\cdot 8\cdot 7} = \sqrt{24\cdot 3\cdot(3\cdot 8)\cdot 7} = \sqrt{24^2\cdot 21} = 24\sqrt{21}$.

Ответ: $24\sqrt{21}$

Тест №15

21 Решите уравнение $(x+6)(x^2-8x+16)=9(4-x)$.

Решение.

Так как $x^2-8x+16=(x-4)^2$, то данное в условии уравнение запишем в виде: $(x+6)\cdot(x-4)^2=9\cdot(4-x)$. Легко видеть, что $x=4$ корень этого уравнения. Если же $x-4\neq 0$, то сокращая обе части уравнения на $x-4$, получаем: $(x+6)\cdot(x-4)=-9$, $x^2+2x-24=-9$, $x^2+2x-15=0$, откуда $x=3$ или $x=-5$.

Ответ: $x=-5$; $x=3$; $x=4$

22 Дорога между пунктами A и B состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 24 км. Турист прошёл путь из A в B за 6 часов, из которых спуск занял 5 часов. С какой скоростью (в км/ч) турист шёл на спуске, если его скорость на подъёме меньше его скорости на спуске на 3 км/ч?

Решение.

Пусть x км/ч – скорость туриста на спуске. Тогда скорость туриста на подъёме равна $(x-3)$ км/ч. Так как спуск занял у туриста 5 часов, а весь путь от А до В – 6 часов, то на подъём турист потратил 1 час. За все 6 часов пути турист прошёл $5\cdot x+1\cdot(x-3)=6x-3$ км, что по условию равно 24 км (расстояние от А до В).

Следовательно, имеем уравнение $6x-3=24$, из которого находим: $6x=27$, $x=4{,}5$.

Ответ: 4,5

23 Постройте график функции $y=\dfrac{x^4-13x^2+36}{x^2-x-6}$ и найдите все значения a, при которых прямая $y=a$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

Решение.

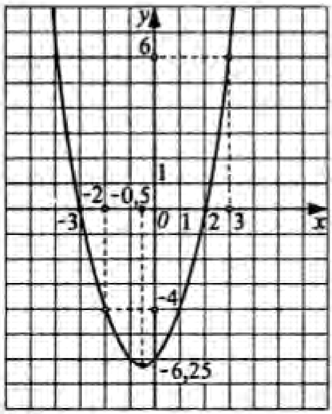
1) Преобразуем выражение, определяющее данную в условии функцию. Корнями квадратного трёхчлена x^2-x-6 являются $x=3$ и $x=-2$, поэтому $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$.

Заметим, что трёхчлен x^4-13x^2+36 относительно $t=x^2$ является квадратным и $t^2-13t+36=(t-9)(t-4)$. Отсюда имеем:
$x^4-13x^2+36=(x^2-9)(x^2-4)=(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)$.

Таким образом, данную в условии функцию можно записать в виде:

$y = \dfrac{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)}$.

2) Данная функция не определена в точках $x = 3$ и $x = -2$. При $x \neq -2$, $x \neq 3$, производя сокращение получаем: $y = (x+3)(x-2) = x^2 + x - 6$. Следовательно, графиком данной в условии функции является парабола $y = x^2 + x - 6$ с двумя выколотыми точками, абсциссы которых $x = -2$ и $x = 3$. Построим график этой параболы по пяти точкам.



Абсцисса вершины параболы: $x_{\text{В}} = -0{,}5$, ордината вершины параболы: $y_{\text{В}} = y(x_{\text{В}}) = (-0{,}5)^2 + (-0{,}5) - 6 = -6{,}25$. Точки пересечения параболы с осью Ox — корни уравнения $x^2 + x - 6 = 0$: $x = -3$, $x = 2$. Точка пересечения с осью Oy: $x = 0$, $y = y(0) = -6$. Точка, симметричная точке пересечения с осью Oy относительно оси параболы: $x = -1$, $y = -6$.

Найдём ординаты выколотых точек: $y(-2) = (-2)^2 + (-2) - 6 = -4$, $y(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6$. Эскиз этой параболы с выколотыми точками $(-2; -4)$ и $(3; 6)$ изображён на предыдущей странице.

Остаётся ответить на вопрос — при каких значениях параметра a прямая $y = a$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

Очевидно, что если $a < -6{,}25$, то данный график и прямая $y = a$ не имеют общих точек. Если же $a \geqslant -6{,}25$, то данный график и прямая $y = a$ имеют только одну общую точку в одном из следующих случаев: прямая $y = a$ проходит через вершину параболы — т.е. $a = -6{,}25$, либо прямая $y = a$ проходит через одну из выколотых точек — т.е. $a = -4$ или $a = 6$. *Ответ:* $a \in \{-6{,}25; -4; 6\}$

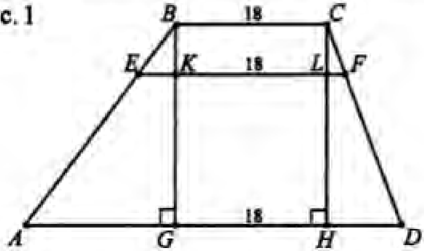
24 Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если $AD = 54$, $BC = 18$, $CF : DF = 2 : 7$.

Решение.

Способ 1

Пусть BG, CH – высоты данной трапеции, K и L – точки пересечения этих высот с прямой EF, см. рисунок 1. Четырёхугольники $BGHC$ и $BKLC$ являются прямоугольниками, поэтому $GH = BC$, $KL = BC$.

рис. 1



Так как прямая EF параллельна прямым AD, BC и $\frac{CF}{DF} = \frac{2}{7}$, то $\frac{BE}{BA} = \frac{CF}{CD} = \frac{2}{9}$, а треугольники BEK и CFL подобны треугольникам BAG и CDH с коэффициентом подобия, равным $\frac{2}{9}$.

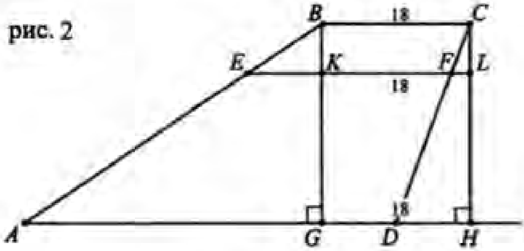
В случае, изображённом на рисунке 1, т.е. в том случае, когда оба угла A и D трапеции острые, для искомой длины отрезка EF имеем:

$$EF = EK + KL + LF = 18 + \frac{2}{9}(AG + DH) = 18 + \frac{2}{9}(AD - GH) = 18 + \frac{2}{9}\cdot(54 - 18) = 26.$$

Если же один из углов A и D трапеции является тупым, например, угол D – см. рисунок 2, то для того, чтобы выкладки предыдущего абзаца были справедливы, достаточно поменять знак с «+» на «−» перед длиной отрезков LF и DH: $EF = EK + KL - LF = 18 + \frac{2}{9}(AG - DH) = 18 + \frac{2}{9}(AD - GH) = 18 + \frac{2}{9}\cdot(54 - 18) = 26.$

Осталось заметить, что поскольку $AD > BC$, то оба угла A и D трапеции не могут оказаться тупыми. Таким образом, все различные случаи рассмотрены, и в обоих случаях получено, что $EF = 26$.

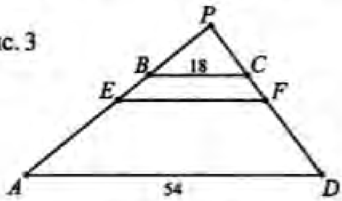
рис. 2



Способ 2

Пусть P — точка пересечения продолжений боковых сторон AB и CD, см. рисунок 3. Обозначим длину отрезка CF через $2x$, тогда $DF = 7x$, $CD = CF + DF = 9x$. Из подобия треугольников PBC и PAD имеем: $\frac{PC}{PD} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow PC = \frac{1}{3}PD \Rightarrow CD = \frac{2}{3}PD \Rightarrow PC = \frac{1}{2}CD = 4{,}5x.$

рис. 3



Из подобия треугольников PBC и PEF имеем: $\frac{EF}{BC} = \frac{PF}{PC} = \frac{PC + CF}{PC} = \frac{6{,}5x}{4{,}5x} = \frac{13}{9}$. Отсюда находим, что $EF = \frac{13}{9}BC = 26$.

Ответ: 26

25 Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Решение.

Пусть a, b — длины сторон, d_1, d_2 — длины диагоналей параллелограмма, α — угол параллелограмма, лежащий против диагонали d_1, см. рис. 1.

рис. 1

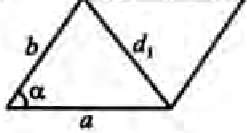
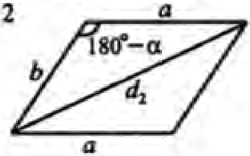


рис. 2



Применяя теорему косинусов к треугольнику с длинами сторон a, b, d_1, получаем: $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$, (1).

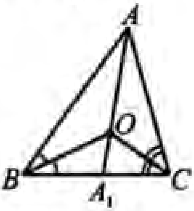
Применяя теорему косинусов к треугольнику с длинами сторон a, b, d_2, см. рис. 2, получаем: $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \alpha)$. Так как $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, то $d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$, (2).

Сложив почленно равенства (1) и (2), получим: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$, что и требовалось доказать.

26 Отрезок AA_1 — биссектриса треугольника ABC, а точка O — центр вписанной окружности. Найдите периметр треугольника ABC, если известно, что $BC = 20$, $AO : OA_1 = 8 : 5$.

Решение.

Центром вписанной окружности треугольника является точка пересечения его биссектрис. Поэтому точка O принадлежит отрезку AA_1, а отрезки BO и CO принадлежат биссектрисам углов B и C, см. данный ниже рисунок. Из треугольника BAA_1 по свойству биссектрисы имеем: $\dfrac{AB}{A_1B} = \dfrac{AO}{OA_1} = \dfrac{8}{5}$, откуда $AB = \dfrac{8}{5}A_1B$.



Аналогично, из треугольника CAA_1 имеем: $\dfrac{AC}{A_1C} = \dfrac{AO}{OA_1} = \dfrac{8}{5}$, $AC = \dfrac{8}{5}A_1C$.

Таким образом, $AB + AC = \dfrac{8}{5}A_1B + \dfrac{8}{5}A_1C = \dfrac{8}{5}BC = \dfrac{8}{5}\cdot 20 = 32$, а искомый периметр треугольника ABC равен $AB + AC + BC = 52$.

Ответ: 52

Тест №17

21 Решите систему уравнений $\begin{cases} xy - 8x - 7y + 56 = 0, \\ \dfrac{y+6}{x+y-1} = 5. \end{cases}$

Решение.

Преобразуем левую часть первого уравнения данной системы:
$xy - 8x - 7y + 56 = x \cdot (y-8) - 7 \cdot (y-8) = (y-8)(x-7)$.

Таким образом, данная в условии система может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} (x-7)(y-8) = 0, \\ \dfrac{y+6}{x+y-1} = 5. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что либо $x = 7$, либо $y = 8$. Подставляя $x = 7$ во второе уравнение системы, получаем: $\dfrac{y+6}{y+6} = 5$ – не выполнено ни при каких значениях y. Подставляя во второе уравнение системы $y = 8$, получаем:

$$\frac{14}{x+7} = 5 \Leftrightarrow 14 = 5x + 35,\ 5x = -21,\ x = -4{,}2.$$

Таким образом, все решения данной системы – это $x = -4{,}2$, $y = 8$.

Ответ: $(-4{,}2; 8)$

22 Два человека одновременно отправляются из одного и того же места по одной дороге на прогулку до опушки леса, находящейся в 5,2 км от места отправления. Один идёт со скоростью 2,3 км/ч, а другой – со скоростью 2,9 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча?

Решение.

К моменту встречи суммарное расстояние, пройденное обоими пешеходами, будет равно удвоенному расстоянию от места их отправления до опушки, т.е. будет равно 10,4 км.

Пусть t – время (измеряемое в часах), которое прошло от момента отправления пешеходов до момента их встречи. Тогда суммарное расстояние, пройденное пешеходами к моменту их встречи, будет равно

$$2{,}3t + 2{,}9t = 5{,}2t.$$

Из двух предыдущих абзацев получаем уравнение $5{,}2t = 10{,}4$, откуда $t = 2$. Поэтому расстояние от точки отправления до места встречи пешеходов будет равно $2{,}3t = 4{,}6$ км.

Ответ: 4,6 км

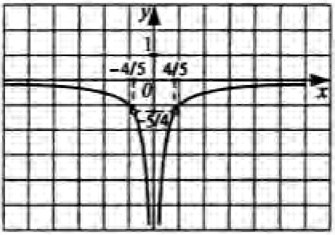
23 Постройте график функции $y = \dfrac{2{,}5|x| - 2}{2|x| - 2{,}5x^2}$ и найдите все значения

k, при которых прямая $y = kx$ не пересекает этот график.

Решение.

Заметим, что $\dfrac{2{,}5|x|-2}{2|x|-2{,}5x^2} = \dfrac{2{,}5|x|-2}{|x|\cdot(2-2{,}5|x|)} = -\dfrac{1}{|x|}$, если выражение $2-2{,}5|x|$, на которое происходит сокращение, не обращается в нуль. То есть данная в условии функция совпадает с функцией $y = -\dfrac{1}{|x|}$ в тех точках, где $2-2{,}5|x| \neq 0$. Корнями уравнения $2-2{,}5|x| = 0$ являются $x = \pm\dfrac{4}{5}$ — в этих точках данная в условии функция не определена (знаменатель обращается в нуль).

Значения функции $y = -\dfrac{1}{|x|}$ в точках $x = \pm\dfrac{4}{5}$ равны $-\dfrac{5}{4}$. Поэтому графиком данной в условии функции является график функции $y = -\dfrac{1}{|x|}$ с выколотыми точками $\left(-\dfrac{4}{5}; -\dfrac{5}{4}\right)$ и $\left(\dfrac{4}{5}; -\dfrac{5}{4}\right)$, см. данный ниже рисунок.



Очевидно, что прямая вида $y = kx$ не пересекает данный выше график только в тех случаях, если она проходит через одну из точек $A\left(-\dfrac{4}{5}; -\dfrac{5}{4}\right)$, $B\left(\dfrac{4}{5}; -\dfrac{5}{4}\right)$, или параллельна оси Ox. Параллельность прямой $y = kx$ и оси Ox соответствует значению $k = 0$. Значения k, соответствующие прохождению прямой $y = kx$ через одну из точек A или B, определяются уравнениями: $k\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right) = -\dfrac{5}{4}$, $k\cdot\dfrac{4}{5} = -\dfrac{5}{4}$.

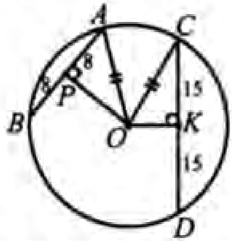
Таким образом, все искомые значения k — это $k = 0$ и $k = \pm\dfrac{25}{16}$.

Ответ: $k = 0; k = \pm\dfrac{25}{16}$

24 Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если $AB = 16$, $CD = 30$, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 15.

Решение.

Пусть O — центр данной окружности, а отрезки OP и OK — перпендикуляры, проведённые к хордам AB и CD соответственно, см. данный ниже рисунок.



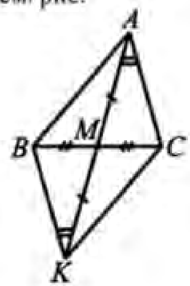
Так как перпендикуляр, проведённый из центра окружности к хорде, делит хорду пополам, то $AP = \frac{1}{2}AB = 8$, $CK = \frac{1}{2}CD = 15$. По условию $OP = 15$. Из треугольника AOP по теореме Пифагора имеем: $AO^2 = AP^2 + OP^2 = 64 + 225 = 289$, $AO = 17$ — радиус данной окружности. Так как радиус окружности равен 17, то из $\triangle COK$ по теореме Пифагора находим: $OK^2 = CO^2 - CK^2 = 17^2 - 15^2 = 64$, $OK = 8$.

Ответ: 8

25 Две стороны треугольника не равны друг другу. Докажите, что медиана, проведённая из их общей вершины, образует с большей из этих сторон меньший угол.

Решение.

Пусть ABC — треугольник, в котором $AB > AC$, AM — медиана этого треугольника. Тогда по условию нам требуется доказать, что угол BAM меньше угла CAM. На продолжении медианы AM за точку M отложим отрезок MK, равный AM, см. рис.



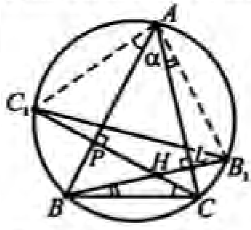
Треугольники ACM и BKM равны по первому признаку ($BM = CM$ т.к. AM – медиана, $MK = AM$ – по построению, $\angle BMK = \angle AMC$ – как вертикальные углы). Поэтому $BK = AC$ и $\angle CAM = \angle BKM$.

Так как в треугольнике напротив меньшей стороны лежит меньший угол и $BK < AB$ ($BK = AC < AB$ – по условию), то угол BAK меньше угла BKA. Осталось лишь заметить, что $\angle BAK = \angle BAM$ и $\angle BKA = = \angle BKM = \angle CAM$, т.е. $\angle BAM < \angle CAM$, что и требовалось доказать.

26 Высоты остроугольного треугольника ABC из вершин B и C продолжили до пересечения с описанной окружностью в точках B_1 и C_1. Оказалось, что отрезок B_1C_1 проходит через центр описанной окружности. Найдите угол BAC.

Решение.

Пусть $\angle BAC = \alpha$, H – точка пересечения высот $\triangle ABC$, BL и CP – высоты $\triangle ABC$, см. рисунок на следующей странице. Так как B_1C_1 проходит через центр описанной окружности, т.е. является её диаметром, то $\angle C_1AB_1 = 90°$. Докажем, что $\angle C_1AB_1 = 2\alpha$, тогда получим, что $2\alpha = 90°$, $\alpha = 45°$. Для этого достаточно доказать, что $\angle C_1AB + \angle B_1AC = \alpha$.



Заметим, что $\angle C_1AB = \angle C_1CB$ – как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу C_1B, а $\angle B_1AC = \angle B_1BC$ – как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу B_1C. Поэтому нам достаточно доказать, что $\angle C_1CB + \angle B_1BC = \alpha$.

Так как $\angle APH + \angle ALH = 90° + 90° = 180°$, то $\angle PAL + \angle PHL = = 180°$ (суммы всех углов четырёхугольника $APHL$ равны 360°). Следовательно, $\angle PHL = 180° - \alpha$.

С другой стороны, $\angle PHL = \angle BHC = 180° - \angle BCH - \angle CBH$. Из равенств $\angle PHL = 180° - \alpha$ и $\angle PHL = 180° - \angle BCH - \angle CBH$ следует, что $\angle BCH + \angle CBH = \alpha$. Но $\angle BCH + \angle CBH = \angle C_1CB + \angle B_1BC$, т.е. требуемое равенство доказано.

Ответ: 45°

Тест №19

21 Решите уравнение $x^4 = (x-30)^2$.

Решение.

Так как левая и правая части данного уравнения положительны при всех значениях x, то, извлекая из них квадратный корень, получаем, что это уравнение равносильно уравнению $x^2 = |x-30|$.

В силу определения модуля, уравнение $x^2 = |x-30|$ равносильно совокупности двух систем:

$$(1) \begin{cases} x^2 = x - 30 \\ x \geqslant 30 \end{cases} \quad \text{и} \quad (2) \begin{cases} x^2 = 30 - x \\ x \leqslant 30. \end{cases}$$

Уравнение $x^2 = x - 30$ корней не имеет. А уравнение $x^2 = 30 - x$ имеет корни $x = -6$ и $x = 5$, которые удовлетворяют условию $x \leqslant 30$, т.е. являются решениями системы (2).

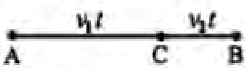
Ответ: $x = -6$; $x = 5$

22 Из пунктов А и В, расстояние между которыми 3 км, одновременно вышли два пешехода. Пешеход, шедший из пункта А, пришёл в пункт В через 12 минут после того, как повстречал пешехода, идущего из В. Пешеход, идущий из пункта В, пришёл в пункт А через 48 минут после встречи с пешеходом, идущим из А. Определите, на каком расстоянии от пункта А произошла встреча пешеходов.

Решение.

Пусть v_1 — скорость пешехода, идущего из А, v_2 — скорость пешехода, идущего из В, а t — время, прошедшее от момента выхода пешеходов до момента их встречи.

Если через С обозначить точку встречи пешеходов, см. данный ниже рисунок, то для длин участков AC и BC имеем: $AC = v_1t$, $BC = v_2t$.



По условию, участок BC был пройден пешеходом, идущим из А, за 12 минут, а участок AC был пройден пешеходом, идущим из В, за 48 минут. Поэтому если считать, что величина t выражена в минутах, то имеем равенства: $v_1 \cdot 12 = v_2 \cdot t$, $v_2 \cdot 48 = v_1 \cdot t$. (С одной стороны, $BC = v_2t$, а с другой стороны — $BC = v_1 \cdot 12$, откуда и получается первое равенство. Второе равенство получается аналогично из рассмотрения участка АС.)

Перемножив левые и правые части указанных равенств, получим: $v_1 \cdot v_2 \cdot 12 \cdot 48 = v_1 \cdot v_2 \cdot t^2 \Rightarrow t^2 = 12^2 \cdot 4$, $t = 12 \cdot 2 = 24$. Подставляя $t = 24$ в равенство $v_1 \cdot 12 = v_2 \cdot t$, получаем: $v_1 \cdot 12 = v_2 \cdot 24$, $v_1 = 2v_2$. Таким образом, скорость пешехода, идущего из А, была в 2 раза больше скорости пешехода, идущего из В. Поэтому если S – расстояние, пройденное к моменту встречи пешеходом из В, то $2S$ – расстояние, пройденное к моменту встречи пешеходом из А. По условию, $AB = 3$ км, а так как $AB = AC + BC = 2S + S = 3S$, то $S = 1$ км, $AC = 2$ км. Итак, встреча произошла в 2 км от пункта А.

Ответ: 2 км.

23 Прямая $y = kx$ касается параболы $y = x^2 + bx + c$ в точке с координатами (3; 15). Найдите все возможные значения коэффициентов b и c.

Решение.

Прямая $y = kx$ касается параболы $y = x^2 + bx + c$ лишь в том случае, когда уравнение $x^2 + bx + c = kx$ имеет единственный корень, а это выполнено тогда, когда дискриминант трёхчлена $x^2 + (b-k)x + c$ равен нулю. Таким образом, $(b-k)^2 - 4c = 0$ (*).

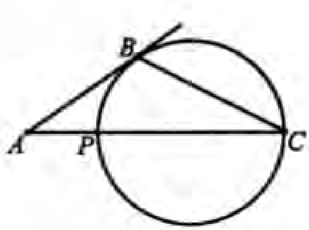
Так как точкой касания является точка (3; 15), т.е. эта точка принадлежит и прямой $y = kx$ и параболе $y = x^2 + bx + c$, то должны быть выполнены равенства $k \cdot 3 = 15$ и $3^2 + b \cdot 3 + c = 15$, откуда $b = 2 - \frac{c}{3}$, $k = 5$. Подставляя $k = 5$ и $b = 2 - \frac{c}{3}$ в соотношение (*), получаем: $\left(-\frac{c}{3} - 3\right)^2 - 4c = 0$, $\frac{c^2}{9} - 2c + 9 = 0$, $c = 9$. Отсюда $b = 2 - \frac{c}{3} = -1$.

Ответ: $b = -1$; $c = 9$

24 Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если $AB = 9$, $AC = 12$.

Решение.

Пусть d – искомый диаметр, а точка P – вторая точка пересечения данной в условии окружности со стороной AC треугольника ABC, см. рисунок.



Тогда $AP = AC - PC = 12 - d$. По известному свойству касательной к окружности имеем: $AB^2 = AP \cdot AC$.

Отсюда получаем уравнение:

$$9^2 = (12 - d) \cdot 12,$$

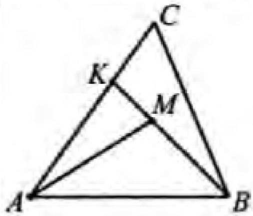
из которого находим: $12 - d = \frac{81}{12}$, $d = 12 - \frac{27}{4} = \frac{21}{4} = 5{,}25$.

Ответ: 5,25

25 Внутри треугольника ABC выбрана произвольно точка M. Докажите, что $AM + BM < AC + BC$.

Решение.

Пусть K — точка пересечения прямой BM со стороной AC, см. данный ниже рисунок. Тогда по неравенству треугольника $AM < AK + KM$. Прибавив к обеим частям этого неравенства длину BM, получим: $AM + BM < AK + KM + BM$. Отсюда, заменяя сумму $KM + BM$ длиной отрезка BK, получаем, что $AM + BM < AK + BK$.



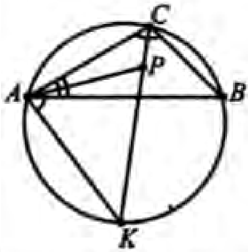
Из $\triangle BKC$ по неравенству треугольника имеем: $BK < CK + BC$.

Из неравенств $AM + BM < AK + BK$ и $BK < CK + BC$ следует, что $AM + BM < AK + CK + BC$, а учитывая, что $AK + CK = AC$, получаем требуемое неравенство: $AM + BM < AC + BC$.

26 В окружность радиуса 7 вписан треугольник ABC с углом C, равным 120°. Точка P — центр вписанной окружности этого треугольника, точка K — точка пересечения луча CP с описанной окружностью треугольника ABC. Найдите длину отрезка PK.

Решение.

1) Покажем, что $PK = AK$. Для этого достаточно доказать, что $\angle APK = \angle PAK$.



Центром вписанной окружности является точка пересечения биссектрис, поэтому AP, CP — биссектрисы $\triangle ABC$. Так как $\angle APK$ — внешний угол треугольника ACP, то $\angle APK = \angle ACP + \angle PAC = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle A$, см. рисунок. Заметим, что $\angle PAK = \angle PAB + \angle BAK = \frac{1}{2}\angle A + \angle KCB$ ($\angle BAK = \angle KCB$ — как углы, опирающиеся на одну дугу).

Следовательно, $\angle PAK = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C$, $\angle PAK = \angle APK$ и, значит, треугольник APK равнобедренный.

2) Длину отрезка AK найдём из треугольника ACK по теореме синусов: $AK = 2R \cdot \sin\angle ACK$, где R — радиус описанной окружности треугольника ACK. По условию $R = 7$, $\angle ACB = 120°$, поэтому $\angle ACK = 60°$, $AK = 2 \cdot 7 \cdot \sin 60° = 7\sqrt{3}$. *Ответ:* $7\sqrt{3}$

Тест №21

21 Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ \frac{x-2}{3} + \frac{y}{4} = -1. \end{cases}$

Решение.

Данная в условии система уравнений равносильна системе:

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 4 \cdot (x-2) + 3y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1, \\ 4x + 3y = -4 \end{cases} \quad (*)$$

Умножая первое уравнение системы (*) на 2 и вычитая из него второе уравнение, получим: $-y = 6$, $y = -6$. Подставим найденное значение y в первое уравнение системы (*) : $2x - 6 = 1$, $2x = 7$, $x = 3{,}5$.

Ответ: $x = 3{,}5$; $y = -6$

$\boxed{22}$ Лодка прошла 10 км по течению реки, а затем 2 км против течения, затратив на весь путь 1,5 часа. Найдите собственную скорость лодки (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Решение.

Пусть v км/ч — собственная скорость лодки. Тогда $(v+3)$ км/ч — скорость лодки по течению, а $(v-3)$ км/ч — её скорость против течения, и по условию задачи получаем уравнение: $\dfrac{10}{v+3}+\dfrac{2}{v-3}=1{,}5$,

$\dfrac{10(v-3)+2(v+3)}{(v+3)(v-3)}=1{,}5$, $12v-24=1{,}5(v^2-9)$, $1{,}5v^2-12v+10{,}5=0$.

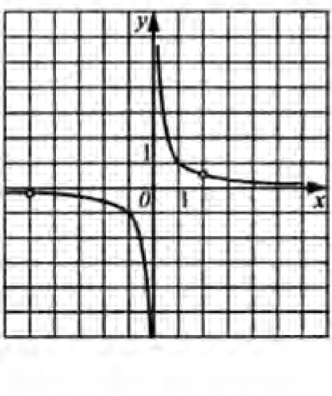
Последнее уравнение имеет корни $v=1$ и $v=7$. Значение $v=1$ не удовлетворяет смыслу задачи (имея собственную скорость 1 км/ч, лодка не смогла бы плыть против течения). Следовательно, $v=7$.

Ответ: 7

$\boxed{23}$ Постройте график функции $y=\dfrac{x^2+3x-10}{x^3+3x^2-10x}$ и найдите все значения k, при которых прямая $y=kx$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

Решение.

1) Заметим, что $\dfrac{x^2+3x-10}{x^3+3x^2-10x}=\dfrac{x^2+3x-10}{x(x^2+3x-10)}=\dfrac{1}{x}$, если $x^2+3x-10\neq 0$. Следовательно, данная в условии функция совпадает с функцией $y=\dfrac{1}{x}$ в тех точках, где $x^2+3x-10\neq 0$. Корнями уравнения $x^2+3x-10=0$ являются $x=2$ и $x=-5$, поэтому в точках $x=2$, $x=-5$ данная в условии функция не определена (в этих точках знаменатель обращается в нуль).



Значения функции $y = \dfrac{1}{x}$ в точках $x = 2$, $x = -5$ равны 0,5 и $-0{,}2$ соответственно. Графиком данной в условии функции является график $y = \dfrac{1}{x}$ с выколотыми точками $(2; 0{,}5)$ и $(-5; -0{,}2)$, см. рисунок на предыдущей странице.

2) Так как график $y = \dfrac{1}{x}$ симметричен относительно начала координат, то любая прямая, проходящая через начало координат, имеет чётное число общих точек с этим графиком (либо две точки, либо ни одной). Поэтому прямая $y = kx$ имеет ровно одну общую точку с изображённым выше графиком лишь в том случае, если она проходит через одну из выколотых точек. Прямая, проходящая через точки $(0; 0)$ и $(2; 0{,}5)$ имеет угловой коэффициент $\dfrac{0{,}5 - 0}{2 - 0} = 0{,}25$, а прямая, проходящая через точки $(0; 0)$ и $(-5; -0{,}2)$, имеет угловой коэффициент $\dfrac{-0{,}2 - 0}{-5 - 0} = 0{,}04$. Таким образом, искомыми значениями являются $k = 0{,}25$ и $k = 0{,}04$.

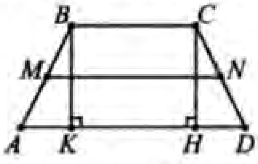
Ответ: $k = 0{,}25$, $k = 0{,}04$

24 В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD равны, CH – высота, проведённая к большему основанию AD. Найдите длину отрезка DH, если средняя линия MN трапеции равна 12, а меньшее основание BC равно 7.

Решение.

1) Пусть x – длина большего основания трапеции. Так как по условию длина меньшего основания равна 7, а длина средней линии равна 12, то для нахождения x имеем уравнение: $\frac{1}{2}(x + 7) = 12$, откуда $x = 17$.

2) Пусть BK – высота трапеции, проведённая из вершины B, см. рисунок.

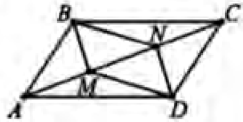


Так как $AB = CD$ (по условию) и $BK = CH$ (как высота трапеции), то прямоугольные треугольники ABK и CDH равны. Следовательно, $AK + DH = 2DH = AD - KH$, $DH = \frac{1}{2}(AD - KH)$. Заметим, что поскольку $BCHK$ прямоугольник, то $KH = BC$. Поэтому

$DH = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(17 - 7) = 5.$

Ответ: 5

25 В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взяты точки M и N такие, что отрезки AM и CN равны. Докажите, что четырёхугольник $BMDN$ является параллелограммом.



Решение.

Треугольники ABM и CDN равны по 1-му признаку: $AB = CD$ (как противоположные стороны параллелограмма), $AM = CN$ (по условию), $\angle BAM = \angle DCN$ (как накрест лежащие углы). Следовательно, $BM = DN$.

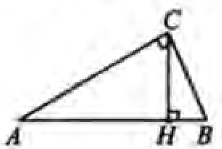
Абсолютно аналогично доказывается равенство треугольников BCN и DAM, откуда следует, что $BN = DM$.

Так как противоположные стороны четырёхугольника $BMDN$ равны, то он является параллелограммом.

26 В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведена высота CH. Радиус вписанной окружности треугольника BCH равен 4, а тангенс угла BAC равен $\frac{8}{15}$. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Решение.

1) Заметим, что треугольник BCH подобен треугольнику BAC по двум углам ($\angle C = \angle H = 90°$, $\angle B$ – общий).



Отношение радиусов вписанных окружностей этих треугольников равно коэффициенту подобия: $k = \frac{r}{R}$, где r и R – радиусы вписанных окружностей $\triangle BCH$ и $\triangle ABC$ соответственно. Поэтому $R = \frac{r}{k} = \frac{4}{k}$ ($r = 4$ – по условию) и остаётся лишь найти коэффициент подобия треугольников BCH и ABC.

2) Имеем: $k = \dfrac{BC}{AB} = \sin\angle BAC$. Пусть $BC = 8x$, тогда из условия $\operatorname{tg}\angle BAC = \dfrac{8}{15}$ следует, что $AC = 15x$, а по теореме Пифагора получаем: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 17x$. Следовательно, $\sin\angle BAC = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{8}{17}$.

Итак, $k = \dfrac{8}{17}$, $R = \dfrac{4}{k} = 4 : \dfrac{8}{17} = 8{,}5$.

Ответ: 8,5

Тест №23

$\boxed{21}$ Решите систему уравнений $\begin{cases} y - x = 4, \\ x^2 - 2xy - y^2 = 14. \end{cases}$

Решение.

Данная в условии система равносильна системе:

$$\begin{cases} y = x + 4, \\ x^2 - 2x(x+4) - (x+4)^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4, \\ x^2 + 8x + 15 = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Корнями уравнения $x^2 + 8x + 15 = 0$ являются $x = -3$ и $x = -5$. Подставляя полученные значения x поочерёдно в 1-ое уравнение системы $(*)$, получаем искомые значения y: $y = 1$, $y = -1$.

Ответ: $x = -3, y = 1; x = -5, y = -1$

$\boxed{22}$ Рыболов в 6 часов утра отправился на моторной лодке к затону, удалённому от пристани на 4 км вниз по реке. Там он в течении 2 часов ловил рыбу, после чего отправился обратно и вернулся на пристань в 9 : 00 утра. Найдите скорость течения реки (в км/ч), если известно, что собственная скорость лодки была постоянна во время всего пути и равна 9 км/ч.

Решение.

Пусть x км/ч – скорость течения реки. Тогда $(9 - x)$ км/ч – скорость лодки против течения, $(9 + x)$ км/ч – скорость лодки по течению, а время, затраченное рыболовом на путь от пристани к затону и обратно, равно $\dfrac{4}{9 - x} + \dfrac{4}{9 + x}$ часов. Так как рыболов отсутствовал на пристани 3 часа, из которых 2 часа он ловил рыбу, то в пути он был 1 час. Поэтому $\dfrac{4}{9 - x} + \dfrac{4}{9 + x} = 1$, $\dfrac{4(9 + x) + 4(9 - x)}{(9 - x)(9 + x)} = 1$, $72 = 81 - x^2$, $x^2 = 9$, $x = 3$.

Ответ: 3

23 Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } |x| \leqslant 2, \\ \dfrac{6}{x}, \text{ если } |x| > 2. \end{cases}$

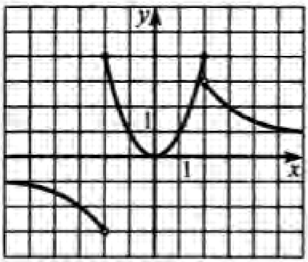
Найдите все значения b, при которых данный график и прямая $y = b$ имеют ровно одну общую точку.

Решение.

Построим график данной функции. Так как $|x| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2$, и $|x| > 2 \Leftrightarrow x < -2,\ x > 2$, то

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x}, \text{ если } x < -2, \\ x^2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ \dfrac{6}{x}, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

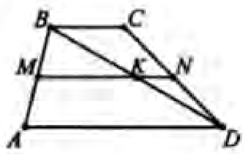
Следовательно, график $y = f(x)$ имеет вид, изображённый на рисунке: при $x < -2$ и $x > 2$ это часть ветвей гиперболы $y = \dfrac{6}{x}$, а при $2 \leqslant x \leqslant 2$ – часть параболы $y = x^2$.



Как видно из рисунка, прямая $y = b$ при $b > 0$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ более одной общей точки. При $-3 < b \leqslant 0$ прямая $y = b$ пересекает график функции в одной точке.

Ответ: $(-3; 0]$

24 Средняя линия MN трапеции $ABCD$ равна 11, K – точка пересечения MN и диагонали BD. Найдите длину меньшего основания BC, если разность длин отрезков MK и KN равна 3.



Решение.

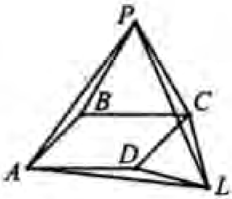
Пусть $MK = x$, $NK = y$. Из условия $MK - KN = 3$ и равенства $MK + KN = MN = 11$, получаем систему для нахождения x и y:

$$\begin{cases} x-y=3, \\ x+y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3, \\ 2x=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4, \\ x=7. \end{cases}$$

Так как прямая NK параллельна BC и N – середина CD, то NK – средняя линия треугольника BCD. Поэтому $BC = 2NK = 8$.

Ответ: 8

25 На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ внешним образом построены правильные треугольники BCP и CDL, см. рисунок. Докажите, что треугольник APL является правильным.



Решение.

1) Поскольку треугольники BPC и CDL – правильные и $ABCD$ – параллелограмм, то справедливы равенства: $AB = CD = CL = DL$ и $AD = BC = BP = CP$. Отсюда видим, что для треугольников ABP, LCP и LDA равны стороны, заключающие углы при вершинах B, C и D соответственно. Поэтому если доказать равенство углов $\angle ABP$, $\angle LCP$ и $\angle LDA$ этих треугольников, то из этого будет следовать равенство самих треугольников (по первому признаку) и, тем самым, будут верны равенства $AP = LP = AL$.

2) Пусть $\angle A = \alpha$, тогда $\angle B = \angle D = 180° - \alpha$ и $\angle C = \alpha$ (по свойствам углов параллелограмма).

В случае, изображённом на рисунке к условию задачи имеем:

$$\angle ABP = 360° - \angle B - \angle PBC = 360° - (180° - \alpha) - 60° = 120° + \alpha;$$
$$\angle LDA = 360° - \angle D - \angle CDL = 360° - (180° - \alpha) - 60° = 120° + \alpha;$$

$\angle LCP = \angle C + \angle LCD + \angle BCP = \angle A + 60° + 60° = 120° + \alpha$, требуемое равенство доказано.

Заметим, что случай, изображённый на рисунке к условию, реализуется тогда, когда $\alpha < 60°$ ($120° + \alpha < 180°$ – как угол треугольника).

Если $\alpha > 60°$, как в случае, изображённом на рисунке 1 (см. на следующей странице), то для углов треугольников ABP, LCP и LDA имеем:

$$\angle ABP = \angle B + 60° = 240° - \alpha, \quad \angle LDA = \angle D + 60° = 240° - \alpha,$$

$\angle LCP = 360° - \angle C - 60° - 60° = 240° - \alpha$, требуемое равенство также доказано.

Если же $\alpha = 60°$, то треугольники ABP, LCP и LDA «вырождаются» – точки B, C, D лежат на отрезках AP, LP, AL (поскольку $\angle ABP = \angle LDA = \angle LCP = 180°$.) В этом случае, изображённом на рисунке 2, треугольник APL является правильным в силу равенств:

$$AP = AB + BP = AB + BC,$$
$$LP = LC + CP = AB + BC,$$
$$AL = AD + DL = BC + AB.$$

рис. 1

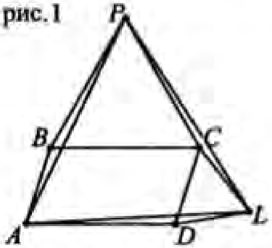
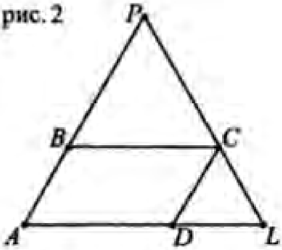


рис. 2



Итак, во всех возможных случаях ($\alpha < 60^\circ, \alpha > 60^\circ, \alpha = 60^\circ$) доказано, что треугольник APL – правильный.

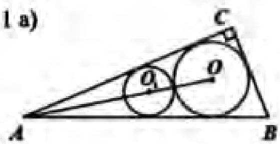
26 В треугольнике ABC угол при вершине C прямой, $AB = 13$, $BC = 5$. Найдите радиус окружности, касающейся прямых AB, AC и касающейся окружности, вписанной в данный треугольник.

Решение.

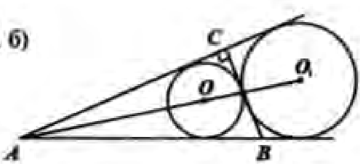
1) По теореме Пифагора, $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 144$, $AC = 12$. Согласно известной формуле, радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC, равен $r = \dfrac{AC + BC - AB}{2} = \dfrac{12 + 5 - 13}{2} = 2$. Пусть точка O – центр вписанной окружности $\triangle ABC$, точка O_1 – центр окружности, касающейся прямых AB, AC и касающейся вписанной окружности $\triangle ABC$, а x – длина радиуса этой окружности.

Каждая из точек O и O_1 равноудалена от прямых AB, AC, и поэтому лежит на биссектрисе угла CAB. Отметим сразу, что возможны два случая расположения точки O_1 – на отрезке AO и вне этого отрезка, см. рис. 1а) и 1б).

1 а)



1 б)

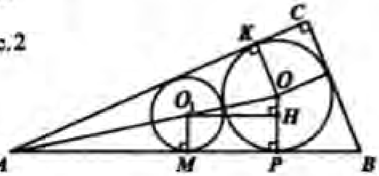


Очевидно, что в первом случае $x < r$, а во втором случае — $x > r$.

2) Найдём искомую величину x для каждого из случаев. При этом опираться будем на рисунок для случая $x < r$, а текстом в скобках будем указывать те изменения, которые происходят в случае $x > r$.

Пусть P, M — точки касания прямой AB с вписанной окружностью $\triangle ABC$ и той окружностью, радиус которой мы ищем, K — точка касания вписанной окружности $\triangle ABC$ и катета AC, H — проекция точки O_1 на прямую OP, см. рис. 2.

рис.2



Заметим, что поскольку окружности, изображённые на рисунке, касаются друг друга, то $OO_1 = r + x = x + 2$. Выразим O_1H через x, опираясь на подобие треугольников OO_1H и OAP:

$$\frac{O_1H}{AP} = \frac{OH}{OP};\ OH = OP - PH = r - O_1M = 2 - x$$

(в случае $x > r$ точка H расположена выше точки O и, соответственно, $OH = PH - OP = x - 2$); $AP = AK = AC - CK = AC - r = 10$.

Таким образом, $O_1H = AP \cdot \dfrac{OH}{OP} = 10 \cdot \dfrac{2-x}{2} = 5(2-x)$ (в случае $x > r$, соответственно, $O_1H = 5(x-2)$). Составим уравнение для нахождения x, применив теорему Пифагора к $\triangle O_1OH$: $OO_1^2 = O_1H^2 + OH^2$, $(x+2)^2 = 25(2-x)^2 + (2-x)^2$ (в случае $x > r$ уравнение для нахождения x получается то же самое). Раскрыв скобки и приведя подобные, получим уравнение $25x^2 - 108x + 100 = 0$, корнями которого являются $x = \dfrac{54 \pm 4\sqrt{26}}{25}$. Остаётся лишь отметить, что $0 < \dfrac{54 - 4\sqrt{26}}{25} < 2$, а $\dfrac{54 + 4\sqrt{26}}{25} > 2$, т.е. значение $\dfrac{54 - 4\sqrt{26}}{25}$ соответствует случаю $x < r$, а значение $\dfrac{54 + 4\sqrt{26}}{25}$ — случаю $x > r$. *Ответ:* $\dfrac{54 \pm 4\sqrt{26}}{25}$

Тест №25

$\boxed{21}$ Корнями уравнения $ax^2 + x + c = 0$ являются числа 2 и $-2{,}25$. Найдите коэффициенты a и c.

Решение.

По теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} 2+(-2{,}25)=\dfrac{-1}{a}, \\ 2\cdot(-2{,}25)=\dfrac{c}{a}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a}=0{,}25, \\ -4{,}5a=c. \end{cases}$$

Из равенства $\dfrac{1}{a}=0{,}25$ находим, что $a=4$. Подставляя $a=4$ в равенство $c=-4{,}5a$, получаем, что $c=-18$.

Ответ: $a=4, c=-18$

22 Ракета типа «А» за секунду пролетает на 500 метров больше, чем ракета типа «В», и поэтому она преодолевает расстояние в 45 км на одну секунду быстрее. За сколько минут ракета типа «А» пролетит 9000 км?

Решение.

Пусть v км/с — скорость ракеты типа «В». Тогда скорость ракеты типа «А» равна $(v+0{,}5)$ км/с, и согласно условию имеем: $\dfrac{45}{v}-\dfrac{45}{v+0{,}5}=1$, $\dfrac{45\cdot 0{,}5}{v(v+0{,}5)}=1$ $(*2v(v+0{,}5)) \Rightarrow 45=2(v^2+0{,}5v)$, $2v^2+v-45=0$. Последнее уравнение имеет корни $v=-5$ и $v=4{,}5$. Значение $v=-5$ не удовлетворяет смыслу задачи, поэтому скорость ракеты типа «В» равна 4,5 км/с, а скорость ракеты типа «А» — 5 км/с, и расстояние в 9000 км она пролетит за $\dfrac{9000}{5}=1800$ секунд или 30 минут.

Ответ: 30

23 Найдите все значения a, при которых неравенство $ax^2+(5a+22)x+9a\geqslant 0$ имеет ровно одно решение.

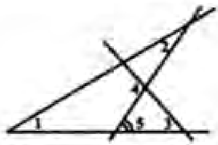
Решение.

Данное неравенство имеет ровно одно решение только в том случае, если ветви параболы $y=ax^2+(5a+22)x+9a$ направлены вниз и эта парабола имеет ровно одну общую точку с осью Ox. А эти два условия, в свою очередь, равносильны условиям: $a<0$ и $D=(5a+22)^2-36a^2=0$. Воспользовавшись формулой разности квадратов, получим:

$D=(5a+22-6a)\cdot(5a+22+6a)$. Поэтому $D=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=22 \\ a=-2. \end{array}\right.$

Из корней уравнения $D=0$ условию $a<0$ удовлетворяет лишь $a=-2$.

24 На приведённом справа рисунке угол 1 равен 30°, угол 2 равен 25°, угол 3 равен 50°. Найдите градусную меру угла 4.



Решение.

Угол, выделенный на рисунке двойными дугами, отметим цифрой 5. Заметим, что $\angle 5 = \angle 1 + \angle 2$ – как внешний угол треугольника с несмежными внутренними углами 1 и 2. Аналогично, $\angle 4 = \angle 5 + \angle 3$.

Так как $\angle 1 = 30°$, $\angle 2 = 25°$, $\angle 3 = 50°$ (по условию), то

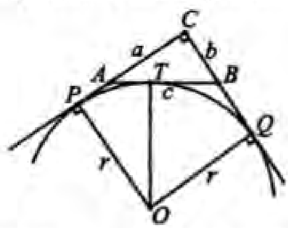
$$\angle 5 = 30° + 25° = 55°, \ \angle 4 = \angle 5 + \angle 3 = 55° + 50° = 105°.$$

Ответ: 105

25 В прямоугольном треугольнике a и b – длины катетов, c – длина гипотенузы. Докажите, что радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов этого треугольника, равен $r = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Решение.

Пусть A, B, C – вершины данного прямоугольного треугольника, T, P, Q – точки касания окружности с гипотенузой и продолжениями катетов AC и BC соответственно, точка O – центр этой окружности, см. рисунок.



1) Четырёхугольник $OPCQ$ – квадрат: $OP = OQ$ – как радиусы окружности, $\angle PCQ = 90°$ – по условию, $\angle OPC = \angle OQC = 90°$ – как угол между касательной и радиусом, проведённым в точку касания.

2) Так как $OPCQ$ – квадрат, то $CP = CQ = r$, $CP + CQ = 2r$. С другой стороны, поскольку $AP = AT$ и $BQ = BT$ – как отрезки касательных к окружности, то $CP + CQ = CA + AP + CB + BQ = a + AT + b + BT =$ $= a + b + c$. Из равенств $CP + CQ = 2r$ и $CP + CQ = a + b + c$ получаем: $r = \dfrac{a+b+c}{2}$, что и требовалось доказать.

26 Основания трапеции равны 8 и 17, а боковые стороны равны 4 и 10. Биссектрисы углов при одной из боковых сторон пересекаются в точке P, а при другой — в точке Q. Найдите длину отрезка PQ.

Решение.

1) Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями BC и AD, причём биссектрисы углов A и B пересекаются в точке P, а биссектрисы углов C и D пересекаются в точке Q, см. рисунок 1. Так как $\angle PAB + \angle PBA = = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}\cdot 180° = 90°$, то треугольник ABP — прямоугольный. Аналогично, треугольник CDQ — прямоугольный.

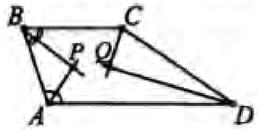
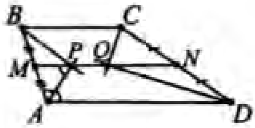
рис.1


рис.2


2) Пусть M и N — середины сторон AB и CD соответственно, см. рисунок 2. Медиана PM прямоугольного треугольника ABP равна половине гипотенузы AB, т.е. $PM = AM$. Значит, $\angle MPA = \angle MAP$ и прямые MP и AD параллельны (накрест лежащие углы MPA и PAD равны). Из этого следует, что точка P лежит на средней линии трапеции. Аналогично, точка Q лежит на средней линии трапеции. Поэтому для длины отрезка PQ имеем: $PQ = MN - MP - NQ$,

$$PQ = \frac{1}{2}(BC + AD) - \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}CD.$$

По условию, $BC = 8$, $AD = 17$, $AB = 4$, $CD = 10$. Подставляя эти данные в формулу для длины отрезка PQ, получаем:

$PQ = \frac{1}{2}\cdot 25 - 2 - 5 = 5{,}5.$

Ответ: 5,5

Тест №27

21 Найдите наибольшее целое число a, при котором сумма дробей $\frac{\sqrt{3}-a}{2}$ и $\frac{a+2}{3}$ положительна.

Решение.

$\frac{\sqrt{3}-a}{2} + \frac{a+2}{3} > 0 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3} - 3a + 2a + 4}{6} > 0 \Leftrightarrow 4 + 3\sqrt{3} - a > 0,$

$a < 4 + 3\sqrt{3}$. Наибольшее целое число, меньшее чем $4 + 3\sqrt{3}$, равно 9:

$9 < 4 + 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 5 < 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 25 < (3\sqrt{3})^2$ – верное неравенство;

$10 > 4 + 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 6 > 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 36 < (3\sqrt{3})^2$ – верное неравенство.

Следовательно, искомым числом a является число 9.

Ответ: 9

$\boxed{22}$ Смесь сухофруктов состоит из чернослива, инжира и манго. Чернослива в этой смеси на 80% больше, чем инжира, а манго в 1,5 раза меньше, чем чернослива. Сколько процентов инжира содержит данная смесь сухофруктов?

Решение.

Пусть в смеси содержится $x\,\%$ инжира. Тогда процентное содержание чернослива равно $x + 0{,}8x = 1{,}8x$. А манго составляет $\dfrac{1{,}8x}{1{,}5} = 1{,}2\,x\,\%$ смеси. Так как суммарное процентное содержание всех компонентов смеси равно 100%, получаем: $x + 1{,}8x + 1{,}2x = 100,\ 4x = 100,\ x = 25.$ Значит, данная смесь содержит 25% инжира. *Ответ:* 25

$\boxed{23}$ При каком значении b прямая $y = -5x + b$ является касательной к параболе $y = 4x^2 - 3x$? Найдите координаты точки касания данных прямой и параболы.

Решение.

Прямая $y = -5x + b$ касается параболы $y = 4x^2 - 3x$ лишь в том случае, если имеет с этой параболой единственную общую точку, т.е. если уравнение $-5x + b = 4x^2 - 3x$ имеет единственный корень.

Уравнение $-5x + b = 4x^2 - 3x$ имеет единственный корень $\Leftrightarrow$ дискриминант трёхчлена $4x^2 + 2x - b$ равен нулю $\Leftrightarrow$ $4 + 16b = 0,\ b = -0{,}25.$

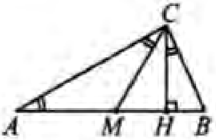
Абсцисса точки касания прямой $y = -5x - 0{,}25$ и параболы $y = 4x^2 - 3x$ является корнем уравнения $-5x - 0{,}25 = 4x^2 - 3x$, т.е. равна $-0{,}25$. Ординату точки касания находим, подставляя её абсциссу в уравнение прямой: $-5 \cdot (-0{,}25) - 0{,}25 = 1.$

Ответ: $b = -0{,}25$ $(-0{,}25; 1)$

$\boxed{24}$ Больший из острых углов прямоугольного треугольника равен 63°. Найдите градусную меру угла между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла.

Решение.

Пусть ABC – данный прямоугольный треугольник, причём $\angle B = 63°$, CH – его высота, CM – медиана, см. рисунок на следующей странице.



Тогда $\angle BCH = 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$, $\angle BAC = 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, поэтому $CM = AM$ и, значит, $\angle ACM = \angle CAM$.

Для искомого угла между медианой и высотой имеем:

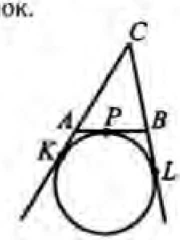
$$\angle MCH = 90^\circ - \angle BCH - \angle ACM = 90^\circ - 2 \cdot 27^\circ = 36^\circ.$$

Ответ: 36

$\boxed{25}$ Окружность касается стороны AB треугольника ABC в точке P и касается продолжений сторон AC и BC за точки A и B соответственно. Докажите, что $AP = \dfrac{AB + BC - AC}{2}$.

Решение.

Пусть K и L – точки касания данной окружности с продолжениями сторон AC и BC, см. рисунок.



Тогда $AK = AP$ и $BL = BP$ – как отрезки касательных. Поэтому $CK + CL = (AC + AK) + (BC + BL) = AC + BC + AP + BP =$
$= AC + BC + AB$. А поскольку $CK = CL$ (как отрезки касательных), то $CK = \frac{1}{2}(CK + CL) = \frac{1}{2}(AC + BC + AB)$. Отсюда получаем:

$AP = AK = CK - AC = \frac{1}{2}(AC + BC + AB) - AC = \dfrac{BC + AB - AC}{2}$,

что и требовалось доказать.

$\boxed{26}$ В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AB = 24$ длины боковых сторон равны 37. Найдите радиус окружности, касающейся стороны AB и продолжений сторон AC, BC за точки A и B соответственно.

Решение.

Пусть O — центр окружности, касающейся стороны AB и продолжений сторон AC и BC, R — её радиус, P и K — точки касания с лучом CA и отрезком AB, см. рисунок.

Так как треугольник ABC равнобедренный, то CK его медиана и высота. Поэтому $AK = \frac{1}{2}AB = 12$, $CK = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{37^2 - 12^2} = 35$.

Заметим, что $AP = AK$ — как отрезки касательных к окружности, поэтому $CP = AC + AP = 37 + 12 = 49$.

Так как $OP \perp CP$ (как радиус в точку касания), то треугольник COP прямоугольный и по теореме Пифагора $CO^2 = CP^2 + OP^2$.

Отсюда имеем: $(35 + R)^2 = 49^2 + R^2$, $35^2 + 70R = 49^2$,
$70R = (49 - 35) \cdot (49 + 35)$, $70R = 14 \cdot 84$, $10R = 2 \cdot 84$, $R = 16{,}8$.

Ответ: 16,8

Тест №29

$\boxed{21}$ Решите неравенство $2\sqrt{7}(12 - 5x) + 3\sqrt{3}(5x - 12) \geqslant 0$.

Решение.

Преобразуем данное неравенство, вынеся за скобки общий множитель $5x - 12$: $(5x - 12)\cdot(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}) \geqslant 0$. Так как $3\sqrt{3} < 2\sqrt{7}$ $\left((3\sqrt{3})^2 = 27,\ (2\sqrt{7})^2 = 28\right)$, то $3\sqrt{3} - 2\sqrt{7} < 0$, и поэтому данное неравенство равносильно неравенству $5x - 12 \leqslant 0$, $x \leqslant 2{,}4$.

Ответ: $(-\infty; 2{,}4]$

$\boxed{22}$ Для приготовления коктейля используют молоко жирностью 2%, и мороженое, жирность которого 10%. Сколько грамм мороженого нужно взять, чтобы получить 500 грамм коктейля, жирность которого 4%?

Решение.

Пусть для приготовления коктейля нужно x г молока, y г мороженого. Тогда из условия задачи имеем: $x + y = 500$, $0{,}02x + 0{,}1y = 500 \cdot 0{,}04$. Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 500 \\ 0{,}02x + 0{,}1y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 500 \\ 0{,}08y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 500 \\ y = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 375 \\ y = 125. \end{cases}$$

Значит, масса требуемого мороженого равна 125 г.

Ответ: 125

23 Найдите все значения a, при которых оба корня уравнения $x^2 - 15x + 3a - 1 = 0$ являются целыми числами, а их произведение положительно и не больше 30.

Решение.

Предположим, что n, m — корни уравнения $x^2 - 15x + 3a - 1 = 0$ и выполнены все условия задачи, т.е. $n, m \in Z$, $0 < n \cdot m \leqslant 30$. Тогда по теореме Виетта имеем: $n + m = 15$, $n \cdot m = 3a - 1$. Так как $n \cdot m > 0$, то числа n, m одного знака, а поскольку $n + m > 0$, то оба числа n, m положительны. Число 15 может быть представлено в виде суммы двух целых положительных чисел одним из следующих способов: $1+14$, $2+13$, $3+12$, $4+11$, $5+10$, $6+9$, $7+8$. Можно считать (без ограничения общности), что n — меньшее из чисел в указанных парах, а m — большее.

Легко видеть, что $n \cdot m \leqslant 30$ только для двух из перечисленных выше пар чисел: $n = 1, m = 14$ и $n = 2, m = 13$.

При $n = 1, m = 14$ имеем: $n \cdot m = 14$, $3a - 1 = 14$, $a = 5$.

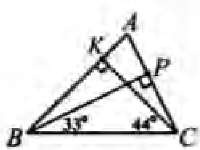
При $n = 2, m = 13$ имеем: $n \cdot m = 26$, $3a - 1 = 26$, $a = 9$.

Ответ: $a = 5, a = 9$.

24 В остроугольном треугольнике ABC высоты, проведённые из вершин B и C, образуют со стороной BC углы в 33° и 44° соответственно. Найдите градусную меру угла A.

Решение.

Пусть BP и CK — высоты данного треугольника, см. рисунок.



Из прямоугольных треугольников BCP и BCK имеем:
$\angle C = 90° - \angle CBP = 90° - 33°$, $\angle B = 90° - \angle BCK = 90° - 44°$. Значит, $\angle A = 180° - \angle B - \angle C = 180° - (90° - 44°) - (90° - 33°) = 44° + 33° = 77°$.

Ответ: 77

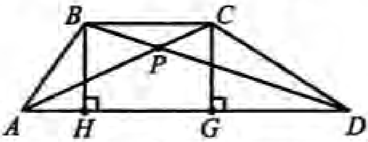
Примечание. В приведённом выше решении фактически доказано, что в остроугольном треугольнике ABC с высотами BP и CK

$$\angle A = \angle BCK + \angle CBP.$$

25 Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке P. Докажите, что площади треугольников ABP и CDP равны.

Решение.

1) Пусть BH и CG — высоты трапеции $ABCD$, см. рисунок. Тогда для площадей треугольников ABD и ACD имеем равенства: $S_{ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BH$, $S_{ACD} = \frac{1}{2}AD \cdot CG$. Так как прямые BC и AD параллельны, то $BH = CG$ и, значит, $S_{ABD} = S_{ACD}$.

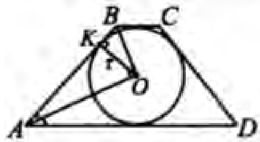


2) Заметим, что треугольник ABD составлен из треугольников ABP и APD, поэтому $S_{ABP} = S_{ABD} - S_{APD}$. Аналогично для треугольника CDP имеем: $S_{CDP} = S_{ACD} - S_{APD}$. Из этих равенств и равенства $S_{ABD} = S_{ACD}$ следует, что $S_{ABP} = S_{CDP}$, что и требовалось доказать.

26 Окружность радиуса 12 вписана в равнобедренную трапецию. Точка касания окружности с боковой стороной трапеции делит эту сторону в отношении 1 : 4. Найдите периметр трапеции.

Решение.

Пусть $ABCD$ — данная равнобедренная трапеция, O — центр вписанной в неё окружности, K — точка касания вписанной окружности со стороной AB, см. рисунок, и пусть $BK = x$. Так как по условию $BK : AK = 1 : 4$, то $AK = 4x$. Лучи AO и BO — биссектрисы углов BAD и ABC, сумма которых равна 180°, поэтому $\angle BAO + \angle ABO = \frac{180°}{2} = 90°$.



Следовательно, $\triangle AOB$ – прямоугольный. Так как OK – радиус, проведённый в точку касания, то $OK \perp AB$. По формуле длины высоты прямоугольного треугольника имеем: $OK = \sqrt{AK \cdot BK}$, $OK = \sqrt{4x \cdot x} = 2x$. По условию, $OK = 12$. Значит, длина боковой стороны трапеции равна $CD = AB = AK + BK = 5x = 30$. Необходимым условием того, что в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность, является равенство $AB + CD = BC + AD$. Отсюда получаем, что $BC + AD = 60$, а периметр трапеции равен 120.

Ответ: 120

Тест №31

21 Сократите дробь $\frac{28^{n+2}}{2^{2n+3} \cdot 7^{n-2}}$.

Решение.

Заметим, что $2^{2n+3} \cdot 7^{n-2} = 2^{2n} \cdot 2^3 \cdot 7^n \cdot 7^{-2} = 4^n \cdot 7^n \cdot 2^3 \cdot 7^{-2} = 28^n \cdot 2^3 \cdot 7^{-2}$. Поэтому $\frac{28^{n+2}}{2^{2n+3} \cdot 7^{n-2}} = \frac{28^n \cdot 28^2}{28^n \cdot 2^3 \cdot 7^{-2}} = \frac{4^2 \cdot 7^2}{2^3 \cdot 7^{-2}} = 2 \cdot 7^4 = 4802$.

Ответ: 4802

22 Катер плыл сначала 30 минут по реке, против течения, а затем 15 минут по озеру, в отсутствии течения. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость катера была постоянна и равна 20 км/ч, а средняя скорость его движения за весь промежуток времени составила 17 км/ч.

Решение.

Так как собственная скорость катера постоянна и равна 20 км/ч, то за 15 минут катер проплыл по озеру 20 км/ч $\cdot \frac{1}{4}$ ч $= 5$ км. Пусть скорость течения реки равна x км/ч. Тогда за 30 минут катер проплыл против течения реки $(20 - x)$ км/ч $\cdot \frac{1}{2}$ ч $= (10 - 0{,}5x)$ км. Поэтому всё расстояние, пройденное катером, равно $(5 + 10 - 0{,}5x)$ км $= (15 - 0{,}5x)$ км, а средняя скорость катера равна $(15 - 0{,}5x) : \dfrac{3}{4}$ км/ч, что по условию составляет 17 км/ч. Отсюда получаем: $(15 - 0{,}5x) \cdot \dfrac{4}{3} = 17$, $60 - 2x = 51$, $x = 4{,}5$.

Ответ: 4,5 км/ч

23 Постройте график функции $y = \dfrac{x^4 - 29x^2 + 100}{x^2 - 3x - 10}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

Решение.

1) Преобразуем выражение, определяющее данную в условии функцию. Корнями квадратного трёхчлена $x^2 - 3x - 10$, являются $x = 5$ и $x = -2$, поэтому $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$.

Заметим, что трёхчлен $x^4 - 29x^2 + 100$ относительно $t = x^2$ является квадратным и $t^2 - 29t + 100 = (t - 25)(t - 4)$. Отсюда имеем:
$x^4 - 29x^2 + 100 = (x^2 - 25)(x^2 - 4) = (x - 5)(x + 5)(x - 2)(x + 2)$.

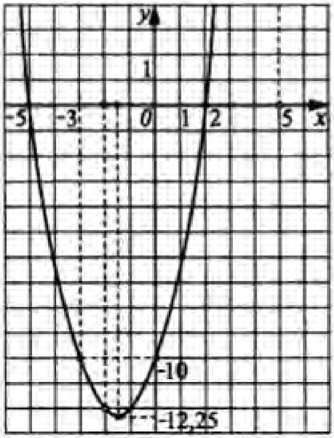
Таким образом, данную в условии функцию можно записать в виде:
$y = \dfrac{(x-5)(x+5)(x-2)(x+2)}{(x-5)(x+2)}$.

2) Данная функция не определена в точках $x = 5$ и $x = -2$. При $x \neq -2$, $x \neq 5$, производя сокращение получаем: $y = (x+5)(x-2) = x^2 + 3x - 10$. Следовательно, графиком данной в условии функции является парабола $y = x^2 + 3x - 10$ с двумя выколотыми точками, абсциссы которых $x = -2$ и $x = 5$. Построим график этой параболы по пяти точкам. Абсцисса вершины параболы: $x_{\text{В}} = -1{,}5$, ордината вершины параболы: $y_{\text{В}} = y(x_{\text{В}}) = (-1{,}5)^2 + 3 \cdot (-1{,}5) - 10 = -12{,}25$. Точки пересечения параболы с осью Ox – корни уравнения $x^2 + 3x - 10 = 0$: $x = -5$, $x = 2$. Точка пересечения с осью Oy: $x = 0$, $y = y(0) = -10$. Точка, симметричная точке пересечения с осью Oy относительно оси параболы: $x = -3$, $y = -10$. Найдём ординаты выколотых точек: $y(-2) = (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 10 = -12$, $y(5) = 5^2 + 3 \cdot 5 - 10 = 30$. Эскиз этой параболы с выколотыми точками $(-2; -12)$ и $(5; 30)$, изображён на рисунке (см. на следующей странице) (точка $(5; 30)$ находится за пределами рисунка).

Остаётся ответить на вопрос – при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

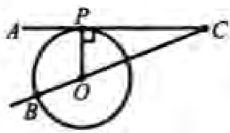
Очевидно, что если $c < -12{,}25$, то данный график и прямая $y = c$ не имеют общих точек. Если же $c \geqslant -12{,}25$, то данный график и прямая $y = c$ имеют только одну общую точку в одном из следующих случаев:

прямая $y = c$ проходит через вершину параболы – т.е. $c = -12{,}25$, либо прямая $y = c$ проходит через одну из выколотых точек – т.е. $c = -12$ или $c = 30$.



Ответ: $c = -12{,}25$, $c = -12$, $c = 30$, графиком функции является парабола $y = x^2 + 3x - 10$ с выколотыми точками $(-2; -12)$ и $(5; 30)$.

24 Найдите градусную меру угла ACO, если луч CA касается окружности с центром в точке O, а градусная мера большей дуги этой окружности, заключённой внутри угла ACO, равна 110°.



Решение.

Пусть P – точка касания луча CA и данной окружности, B – точка пересечения луча CO с окружностью, лежащая вне отрезка CO, см. рисунок.

По условию дуга BP равна 110°, поэтому $\angle BOP = 110°$. Так как $\angle BOP$ – внешний угол треугольника OCP, то $\angle BOP = \angle PCO + \angle OPC$.

Следовательно, $\angle PCO = \angle BOP - \angle OPC = 110° - 90° = 20°$ ($\angle OPC = 90°$, т.к. OP – радиус в точку касания).

Ответ: 20

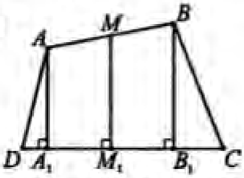
25 Точка M – середина стороны AB четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника MCD равна полусумме площадей треугольников ACD и BCD.

Решение.

Обозначим через S_M, S_A и S_B соответственно площади треугольников MCD, ACD и BCD. Нам требуется доказать, что $S_M = \frac{1}{2}(S_A+S_B)$.

Пусть A_1, B_1, M_1 – проекции точек A, B, M на прямую CD, см. рисунок 1. Прямые AA_1, BB_1 и MM_1 параллельны, поэтому отрезок MM_1 является средней линией трапеции A_1ABB_1. Отсюда следует, что $MM_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1)$. Так как AA_1, BB_1, MM_1 – высоты треугольников ACD, BCD, MCD, то для площадей этих треугольников имеем равенства: $S_A = \frac{1}{2}AA_1 \cdot CD$, $S_B = \frac{1}{2}BB_1 \cdot CD$, $S_M = \frac{1}{2}MM_1 \cdot CD$.

рис. 1



Сложив почленно первые два из этих равенств, получим:
$S_A + S_B = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1) \cdot CD = MM_1 \cdot CD = 2S_M$. Таким образом, $S_M = \frac{1}{2}(S_A + S_B)$, что и требовалось доказать.

26 В окружность радиуса 3 вписана трапеция $ABCD$. Найдите высоту трапеции, если угол ABD равен 60°, а косинус угла BAC равен 0,7.

Решение.

Пусть O – центр данной окружности, а точки M и N – середины оснований AD и BC соответственно, см. рисунок.

По теореме о вписанном угле $\angle ABD = \frac{1}{2}\angle AOD$. По условию, $\angle ABD = 60° \Rightarrow \angle AOD = 120°$. Так как $AO = DO$, то OM – медиана, биссектриса и высота $\triangle AOD$. Поэтому $\angle AOM = \frac{1}{2}\angle AOD = 60°$,

$OM = AO \cdot \cos 60^\circ = 1{,}5$. Аналогично, $\angle CON = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BAC$ и, значит, $\cos\angle CON = 0{,}7$. Из ΔCON находим: $ON = CO \cdot \cos\angle CON = 2{,}1$. Таким образом, высота MN трапеции равна $OM + ON = 3{,}6$.

Ответ: 3,6

Тест №33

21 Сократите дробь $\frac{11 \cdot 12^n}{2^n + 2^{n+5}}$.

Решение.

$2^n + 2^{n+5} = 2^n \cdot (1 + 2^5) = 33 \cdot 2^n$. Поэтому $\frac{11 \cdot 12^n}{2^n + 2^{n+5}} = \frac{11 \cdot 2^n \cdot 6^n}{33 \cdot 2^n} =$
$= \frac{6^n}{3} = 2 \cdot 6^{n-1}$.

Ответ: $2 \cdot 6^{n-1}$

22 Из пункта A в пункт B выехал автобус. Спустя 40 минут вслед за ним выехал автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с автобусом. Вычислите расстояние между пунктами A и B, если известно, что средняя скорость движения автобуса составила 60 км/ч, а средняя скорость автомобиля — 90 км/ч.

Решение.

Пусть S км — расстояние между пунктами A и B. Тогда автобус преодолел это расстояние за $\frac{S}{60}$ часов, а автомобиль — за $\frac{S}{90}$ часов. Так как автобус был в пути дольше автомобиля на 40 минут, что составляет $\frac{2}{3}$ часа, то имеем уравнение: $\frac{S}{60} - \frac{S}{90} = \frac{2}{3}$, $\frac{S}{180} = \frac{2}{3}$. Отсюда, $S = 180 \cdot \frac{2}{3} = 120$.

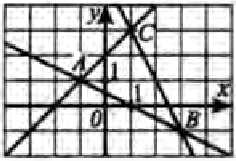
Ответ: 120 км

23 В плоскости Oxy заданы три точки: $A(-1;1)$, $B(3;-1)$ и $C(1;3)$. Задайте аналитически (с помощью формул) функцию, графиком которой является ломаная, состоящая из двух лучей и проходящая через эти три точки.

Решение.

Отметим на координатной плоскости Oxy три данные точки — см. рисунок ниже. Лучи AC и AB не образуют графика функции $y = y(x)$, так как для этой ломаной при $x > -1$ каждому значению x соответствуют два различных значения y. Аналогично, не образуют графика функции и лучи

BA, BC. Лучи CA и CB образуют график функции $y = y(x)$, определённой на всей числовой оси (каждому значению x соответствует ровно одно значение y).



Чтобы задать эту функцию аналитически, определим уравнения прямых AC и BC. Подставляя в общее уравнение прямой $y = kx + b$ координаты точек A и C, для коэффициентов уравнения прямой AC имеем систему: $\begin{cases} k\cdot(-1)+b=1 \\ k\cdot 1+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -k+b=1 \\ 2b=4 \end{cases} \Rightarrow b=2,\ k=1.$

Таким образом, уравнение прямой AC — $y = x + 2$.

Аналогично, для коэффициентов уравнения прямой BC имеем систему:

$$\begin{cases} 3k+b=-1 \\ k+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k=-4 \\ k+b=3 \end{cases} \Rightarrow k=-2,\ b=5.$$

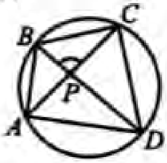
Уравнение прямой BC — $y = -2x + 5$.

Итак, функция $y = y(x)$, графиком которой является ломаная, состоящая из двух лучей и проходящая через точки A, B, C, определяется формулами: $y = \begin{cases} x+2, & \text{при } x \leqslant 1, \\ 5-2x, & \text{при } x > 1. \end{cases}$

24 Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P. Градусная мера меньшей дуги окружности, стягиваемой хордой BC, равна $100°$, а градусная мера меньшей дуги окружности, стягиваемой хордой AD, равна $150°$. Найдите градусную меру угла APB.

Решение.

Заметим, что поскольку $\angle BPC$ — внешний угол треугольника ABP, то $\angle BPC = \angle BAC + \angle ABD$.



Так как вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, то $\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ$, $\angle ABD = \frac{1}{2} \cdot 150^\circ = 75^\circ$. Отсюда имеем: $\angle BPC = 50^\circ + 75^\circ = 125^\circ$, $\angle APB = 180^\circ - \angle BPC = 55^\circ$. *Ответ:* 55

25 Докажите, что если площадь и диагональ одного прямоугольника равны соответственно площади и диагонали другого прямоугольника, то такие прямоугольники равны.

Решение.

Пусть S – площадь, d – длина диагонали некоторого прямоугольника, a, b – длины сторон прямоугольника. Тогда имеем равенства: $ab = S$, $a^2 + b^2 = d^2$. Прибавляя ко 2-му из этих равенств удвоенное 1-ое, получим: $a^2 + b^2 + 2ab = d^2 + 2S$, $(a+b)^2 = d^2 + 2S$, $a + b = \sqrt{d^2+2S}$. Аналогично, вычитая из 2-го равенства удвоенное 1-ое равенство, получим: $(a-b)^2 = d^2 - 2S$, $a - b = \sqrt{d^2-2S}$ – если считать, что $a \geqslant b$.

Таким образом, имеем систему:

$$\begin{cases} a + b = \sqrt{d^2+2S} \\ a - b = \sqrt{d^2-2S} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = \sqrt{d^2+2S} + \sqrt{d^2-2S} \\ 2b = \sqrt{d^2+2S} - \sqrt{d^2-2S}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что если известны площадь S и длина d диагонали прямоугольника, то длины большей и меньшей сторон этого прямоугольника определены равенствами:

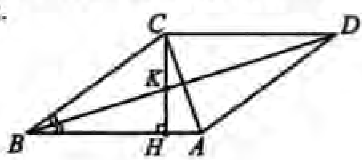
$$a = \left(\sqrt{d^2+2S} + \sqrt{d^2-2S}\right)/2, \; b = \left(\sqrt{d^2+2S} - \sqrt{d^2-2S}\right)/2.$$

т.е. вычисляются однозначно. Поэтому прямоугольники, имеющие равные площади и равные длины диагоналей, являются равными, ч.т.д.

26 Дан ромб $ABCD$ с острым углом B, косинус которого равен $\frac{12}{13}$. Высота ромба CH пересекает диагональ BD в точке K. Найдите площадь ромба, если известно, что $CK = 2{,}6$.

Решение.

Так как диагональ ромба делит его угол пополам, то BK – биссектриса $\triangle BCH$, см. рисунок.



По свойству биссектрисы имеем:

$\dfrac{HK}{CK} = \dfrac{BH}{BC}$. Но $\dfrac{BH}{BC} = \cos\angle B = \dfrac{12}{13}$. Следовательно, $\dfrac{HK}{CK} = \dfrac{12}{13}$, $HK = \dfrac{12}{13}\cdot 2{,}6 = 2{,}4$, $CH = CK + HK = 5$. Найдём сторону ромба:

$$BC = \frac{CH}{\sin\angle B},\ \sin\angle B = \sqrt{1-\cos^2\angle B} = \frac{5}{13};\ BC = 5 : \frac{5}{13} = 13.$$

Итак, площадь ромба равна $S = CH\cdot AB = 5\cdot 13 = 65$.

Ответ: 65

Тест №35

21 Найдите значения выражения $\dfrac{6^{n+1}}{3^{n-1}}$, если известно, что $2^n = 2048$.

Решение.

$$\frac{6^{n+1}}{3^{n-1}} = \frac{6\cdot 6^n}{3^{-1}\cdot 3^n} = \frac{3\cdot 6\cdot 2^n\cdot 3^n}{3^n} = 18\cdot 2^n = 18\cdot 2048 = 36864.$$

Ответ: 36864

22 Для приготовления коктейля используется молоко, ванильное мороженое и клубничный сироп. Согласно рецепту этого коктейля молока должно быть на 460% больше, чем клубничного сиропа, а мороженого на 25% меньше, чем молока. Сколько граммов мороженого требуется для приготовления двух порций этого коктейля массой 270 граммов каждая?

Решение.

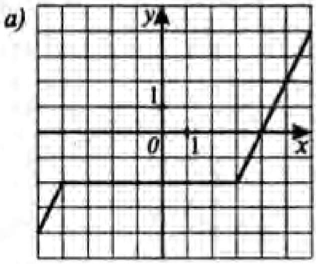
Пусть для приготовления двух порций коктейля требуется x граммов сиропа. Тогда молока требуется $x + 4{,}6x = 5{,}6x$ граммов, а мороженого требуется $5{,}6x - 5{,}6x\cdot 0{,}25 = 4{,}2x$ граммов. При этом масса всего коктейля будет составлять $x + 5{,}6x + 4{,}2x = 10{,}8x$ граммов, что по условию должно быть равно $2\cdot 270 = 540$ граммов. Отсюда имеем: $10{,}8x = 540$, $x = 50$. Значит, мороженого требуется $4{,}2\cdot 50 = 210$ граммов.

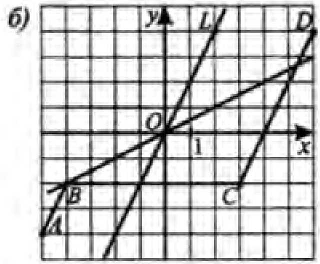
Ответ: 210

23 Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ имеет ровно две общие точки с трёхзвенной ломаной в координатной плоскости Oxy, изображённой на приведённом ниже рисунке, см. рис. а).

Решение.

Проведём через начало координат прямую OL, параллельную участкам AB и CD данной в условии ломаной, см. рис. б). Легко видеть, что если прямая $y = kx$ расположена вне острого угла, образованного прямыми OB и OL, то она имеет только одну общую точку с ломаной $ABCD$,

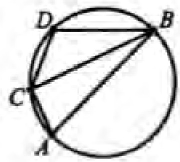




если строго внутри этого угла — общих точек три, если совпадает с прямой OB — общих точек две, а если совпадает с прямой OL — общая точка одна. Таким образом, единственным искомым значением k является то, при котором прямая $y = kx$ совпадает с прямой OB — $k = 0{,}5$.

Ответ: $k = 0{,}5$

24 В окружности проведены диаметр AB и не пересекающая этот диаметр хорда CD, при этом хорды AC и BD также не пересекаются (см. рисунок). Угол ABC равен 22°. Найдите градусную меру угла CDB.



Решение.

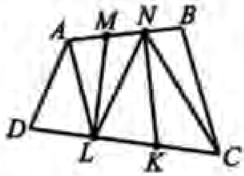
Так как $\angle ABC = 22^\circ$, то градусная мера дуги AC равна 44° (угол, вписанный в окружность, равен половине дуги, на которую он опирается). Градусная мера дуги BAC равна $180^\circ + 44^\circ = 224^\circ$ (дуга BA равна 180°, поскольку AB — диаметр). Следовательно, $\angle CDB = \frac{1}{2} \cdot 224^\circ = 112^\circ$.

25 На сторонах AB и CD четырёхугольника $ABCD$ взяты точки M, N, K, L так, что точки M и N делят на три равные части сторону AB, а точки K и L делят на три равные части сторону CD. Докажите, что площадь четырёхугольника $MNKL$ равна 1/3 площади четырёхугольника $ABCD$.

Решение.

1) Пусть S – площадь четырёхугольника $MNKL$. Так как $AM = MN$, то площади треугольников AML и MNL равны – у этих треугольников общая высота и равные основания, см. рис. 1.

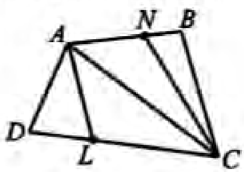
рис. 1



Аналогично, равны площади треугольников CKN и KLN. Отсюда следует, что площадь четырёхугольника $ANCL$ вдвое больше площади четырёхугольника $MNKL$: $S_{ANCL} = 2S$.

2) Так как $DL : CD = 1 : 3$, то площадь треугольника ADL равна $1/3$ площади треугольника ACD (отношение площадей треугольников, имеющих одну и ту же высоту, равно отношению длин оснований), см. рис. 2.

рис. 2



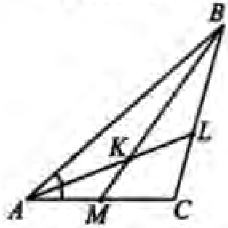
Аналогично, площадь треугольника CBN равна $1/3$ площади треугольника CAB. Таким образом, сумма площадей треугольников ADL и CBN равна $1/3$ суммы площадей треугольников ACD и CAB, т.е. $1/3$ площади четырёхугольника $ABCD$. Отсюда следует, что площадь четырёхугольника $ANCL$ равна $2/3$ площади четырёхугольника $ABCD$: $S_{ANCL} = \frac{2}{3}S_{ABCD}$. Но $S_{ANCL} = 2S$ (см. пункт 1), поэтому

$$S_{ABCD} = \frac{3}{2}S_{ANCL} = 3S, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Указание к задаче 25 теста №36. Воспользуйтесь утверждением задачи 25 теста №31, и тем фактом, что $S_{ACD} + S_{BCD} = S_{ABCD}$.

$\boxed{26}$ Площадь треугольника ABC равна 198. Биссектриса AL пересекает медиану BM в точке K. Найдите площадь четырёхугольника $MCLK$, если известно, что $BL : CL = 7 : 4$.

Решение.



1) Так как $BL:CL = 7:4$, то площади треугольников ABL и ACL также относятся как 7 : 4 (высота треугольника ABC, проведённая из вершины A к стороне BC, является общей высотой этих треугольников). Отсюда получаем, что площадь треугольника ACL составляет $\frac{4}{11}$ площади треугольника ABC, т.е. равна $\frac{4}{11}\cdot 198 = 72$.

Теперь, чтобы найти площадь четырёхугольника $MCLK$, нам достаточно найти площадь треугольника AMK: $S_{MCLK} = S_{ACL} - S_{AMK}$.

2) Поскольку $AM = \frac{1}{2}AC$, то $S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABC}$, $S_{ABM} = 99$. По свойству биссектриссы треугольника имеем: $\frac{AC}{AB} = \frac{CL}{BL} = \frac{4}{7}$. Отсюда находим, что $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}\frac{AC}{AB} = \frac{2}{7}$. Снова воспользовавшись свойством биссектриссы, из треугольника ABM получаем: $\frac{MK}{BK} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{7}$. Заметим, что $\frac{S_{AMK}}{S_{ABK}} = \frac{MK}{BK} = \frac{2}{7}$ (высота треугольника ABM, проведённая к стороне BM, является общей высотой треугольников AMK и ABK). Следовательно, площадь треугольника AMK составляет $\frac{2}{9}$ от площади треугольника ABM, т.е. $S_{AMK} = \frac{2}{9}S_{ABM} = \frac{2}{9}\cdot 99 = 22$. Итак, $S_{MCLK} = S_{ACL} - S_{AMK} = 72 - 22 = 50$.

Ответ: 50

Тест №37

21 Найдите значения выражения $(8^{n-7})^{n+7}$ при $n = 4\sqrt{3}$.

Решение.

$(8^{n-7})^{n+7} = 8^{(n-7)(n+7)} = 8^{n^2-49}$. При $n = 4\sqrt{3}$ имеем: $n^2 = (4\sqrt{3})^2 =$

$= 48,\ 8^{n^2-49} = 8^{-1} = \frac{1}{8} = 0{,}125$. *Ответ:* 0,125

$\boxed{22}$ К июню кинотеатр города Дивноморска увеличил цену входного билета на 50% по сравнению с ценой билета в январе. На сколько процентов нужно будет снизить цену билета, чтобы в конце сезона она была на 20% выше, чем в январе?

Решение.

Пусть x — цена билета в январе. Тогда $1{,}5\,x$ — цена билета в июне, а в конце сезона она должна быть равна $1{,}2\,x$. Следовательно, цену билета нужно будет снизить на $0{,}3\,x$, что составляет 20% от величины $1{,}5\,x$.

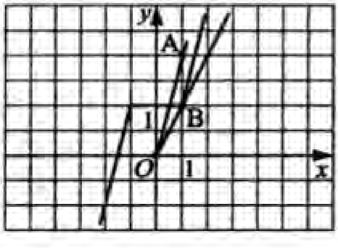
Ответ: 20%

$\boxed{23}$ Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ пересекает в трёх различных точках график функции

$$y = \begin{cases} 4x + 6 \text{ при } x < -1, \\ 2 \text{ при } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 4x - 2 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Решение.

График данной функции состоит из трёх частей, каждая из которых представляет собой участок некоторой прямой и имеет с прямой $y = kx$ не более одной общей точки. Поэтому график данной функции имеет с прямой $y = kx$ ровно три общие точки лишь в том случае, если каждая из трёх его частей имеет общую точку с этой прямой. Последнее может быть выполнено только в том случае, если прямая $y = kx$ составляет с осью Ox угол больший, чем прямая OB, но меньший, чем прямая OA, параллельная прямой $y = 4x - 2$, см. данный ниже рисунок (если одно из указанных условий не выполнено, то прямая $y = kx$ не пересекает один из двух участков графика: при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ или $x > 1$).



Легко видеть, что если прямая $y = kx$ лежит между прямыми OB и OA, то она действительно пересекает все три участка графика, изображённого на рисунке. Таким образом, искомые значения k — это все числа, которые больше углового коэффициента прямой OB, но меньше углового коэффициента прямой OA. Угловой коэффициент прямой OA равен 4 (т.к. эта прямая параллельна прямой $y = 4x - 2$). Угловой коэффициент прямой OB можно вычислить по формуле: $\frac{y_B}{x_B}$, где x_B, y_B — координаты вектора OB. Точка B имеет координаты $(1;2)$, поэтому координаты вектора OB равны $x_B = 1 - 0 = 1$, $y_B = 2 - 0 = 2$, и по указанной выше формуле получаем, что угловой коэффициент прямой OB равен 2.

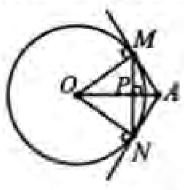
Итак, все искомые k — это $k \in (2;4)$.

Ответ: $k \in (2;4)$

24 Дана окружность с центром в точке O и точка A, лежащая вне этой окружности. Из точки A проведены две прямые, касающиеся данной окружности в точках M и N. Найдите радиус данной окружности, если $AO = 50$, $MN = 48$ и дополнительно известно, что $AM < OM$.

Решение.

1) Пусть P — точка пересечения отрезков AO и MN, см. рисунок.



Так как OM и ON — радиусы к точкам касания, то $\angle OMA = \angle ONA = 90°$. Треугольники AOM и AON равны, как прямоугольные треугольники с равной гипотенузой. Следовательно, AP — биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника и, значит, AP — медиана и высота треугольника AMN.

2) $MP = PN = \frac{1}{2} MN = 24$. Пусть $OP = x$, тогда $AP = AO - OP = 50 - x$. Как известно, квадрат высоты прямоугольного треугольника равен произведению отрезков, на которые высота делит гипотенузу. Поэтому

$$MP^2 = AP \cdot OP,\ 24^2 = (50 - x)x,\ x^2 - 50x + 576 = 0 \Leftrightarrow$$

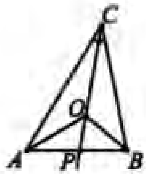
$\Leftrightarrow x = 18$ или $x = 32$. Так как по условию $OM > AM$, то $OP > AP$. При

$x=18$ условие $OP > AP$ не выполнено ($OP = x = 18$, $AP = 50 - x = 32$). Поэтому $x = 32$. По теореме Пифагора из треугольника OMP имеем: $OM^2 = OP^2 + MP^2 = 32^2 + 24^2 = 1600$, $OM = 40$.

Ответ: 40

$\boxed{25}$ Точка O – центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $\angle AOB = 90° + \frac{1}{2}\angle ACB$.

Решение.



1) Пусть P – точка пересечения луча CO со стороной AB, см. рисунок. Так как углы AOP и BOP – внешние углы треугольников AOC и BOC соответственно, то

$$\angle AOP = \angle CAO + \angle ACO,$$
$$\angle BOP = \angle CBO + \angle BCO.$$

2) Поскольку O – центр вписанной окружности треугольника ABC, то AO, BO, CO – биссектрисы углов A, B, C. Поэтому $\angle AOP = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C$, $\angle BOP = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C$. Отсюда получаем:
$\angle AOB = \angle AOP + \angle BOP = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C + \angle B) + \frac{1}{2}\angle C = 90° + \frac{1}{2}\angle C$, что и требовалось доказать.

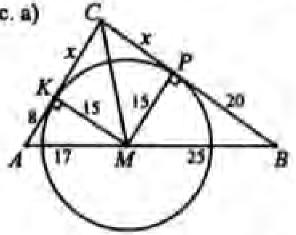
$\boxed{26}$ В треугольнике ABC на стороне AB взята точка M так, что $AM : BM = 17 : 25$. Окружность радиуса 15 с центром в точке M касается прямых AC и BC. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 42$.

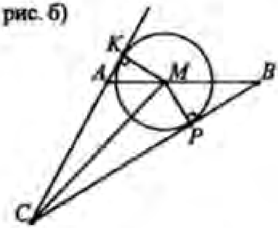
Решение.

1) Так как $AM : BM = 17 : 25$ и $AM + BM = 42$ (по условию $AB = 42$), то $AM = 17$, $BM = 25$ (приняв $AM = 17x$, получим: $BM = 25x$, $AM + BM = 42x$, откуда $x = 1$).

Заметим, что построение данного в условии треугольника ABC можно осуществить следующим образом – на отрезке $AB = 42$ выбрать точку M так, что $AM = 17$, провести окружность радиуса 15 с центром в точке M, а затем провести касательные AK и BP к этой окружности. При этом точка пересечения прямых AK, BP и будет являться вершиной C.

Описанное выше построение можно осуществить ровно двумя различными способами – либо точки K, P лежат по одну сторону от прямой AB, см. рисунок а), либо точки K, P лежат по разные стороны от AB, см. рисунок б). Таким образом, существуют два не равных друг другу треугольника, удовлетворяющих всем условиям задачи.





2) В каждом из случаев а), б) искомая площадь треугольника ABC равна $S_{ABC} = S_{ACM} + S_{BCM} = \frac{r}{2} \cdot AC + \frac{r}{2} \cdot BC$, где $r = 15$ – радиус данной в условии окружности.

Из треугольников AKM и BPM по теореме Пифагора имеем:

$$AK^2 = AM^2 - r^2 = 17^2 - 15^2 = 64,\ AK = 8;$$

$$BP^2 = BM^2 - r^2 = 25^2 - 15^2 = 400,\ BP = 20.$$

Заметим, что $CK = CP$ – как отрезки касательных к окружности, и обозначим длину этих отрезков через x.

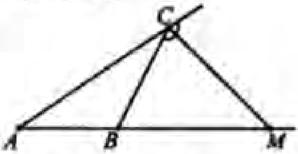
Вычисления проведём для случая а), отметив в конце те изменения, которые необходимо сделать в случае б).

В случае а) имеем: $AC = AK + CK = 8 + x$, $BC = BP + CP = 20 + x$, см. рисунок а). Так как точка M равноудалена от лучей CA и CB, то CM – биссектриса угла ACB. По свойству биссектрисы $\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{BC}$. Отсюда получаем, что $\frac{8+x}{20+x} = \frac{17}{25}$, $200 + 25x = 340 + 17x$, $8x = 140$, $2x = 35$. Таким образом, в случае а) искомая площадь треугольника ABC равна $S_{ABC} = \frac{r}{2} \cdot (AC + BC) = \frac{15}{2} \cdot (8 + x + 20 + x) = \frac{15 \cdot 63}{2}$.

В случае б) единственное изменение, по сравнению со случаем а), состоит в том, что $AC = CK - AK = x - 8$. При этом из равенства $\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{BC}$ следует, что $\frac{x-8}{20+x} = \frac{17}{25}$, $25x - 200 = 340 + 17x$, $8x = 540$, $2x = 135$, а площадь ΔABC равна $\frac{15}{2} \cdot (x - 8 + 20 + x) = \frac{15 \cdot 147}{2}$.

Ответ: 472,5 или 1102,5

Примечание. Для использованного выше свойства биссектрисы треугольника — делит сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, справедливо обобщение на случай биссектрисы внешнего угла треугольника: *пусть биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает продолжение стороны AB в точке M тогда* $\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{BC}$ (см. рисунок).



Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству свойства биссектрисы.

Тест №39

21 Найдите значения выражения $\frac{(\sqrt{12})^n \cdot (\sqrt{14})^n}{2^{n+2} \cdot 42^n}$ при $n = -6$.

Решение.

$(\sqrt{12})^n \cdot (\sqrt{14})^n = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{6})^n \cdot (\sqrt{2} \cdot \sqrt{7})^n = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2})^n \cdot (\sqrt{6} \cdot \sqrt{7})^n =$ $= 2^n \cdot (\sqrt{42})^n$. Значит, $\frac{(\sqrt{12})^n \cdot (\sqrt{14})^n}{2^{n+2} \cdot 42^n} = \frac{2^n \cdot (\sqrt{42})^n}{4 \cdot 2^n \cdot (\sqrt{42})^{2n}} = \frac{1}{4 \cdot (\sqrt{42})^n}$.

Подставляя в это выражение значение $n = -6$, получаем: $\frac{1}{4 \cdot (\sqrt{42})^{-6}} =$ $= \frac{(\sqrt{42})^6}{4} = \frac{42^3}{4} = 18522$.

Ответ: 18522

22 Из пункта А в пункт В, расположенный ниже по течению реки, отправился плот. Одновременно с этим из пункта В в пункт А вышел катер, собственная скорость которого в шесть раз больше скорости течения реки. Встретив плот, катер сразу повернул и поплыл обратно. Какую часть расстояния от пункта А до пункта В останется проплыть плоту к тому моменту, когда катер вернётся в пункт В?

Решение.

Пусть v — скорость течения реки, t — время, прошедшее с момента отплытия плота и катера до момента их встречи. Тогда скорость катера при движении от пункта В навстречу плоту равна $6v - v = 5v$ (собственная скорость катера, которая в 6 раз больше скорости течения, минус скорость течения).

За время t плот проплывёт расстояние vt, а катер — расстояние $5vt$. Поэтому расстояние между пунктами А и В равно $vt + 5vt = 6vt$.

После встречи с плотом катер плывёт обратно, т.е. вниз по течению, и его скорость равна $6v + v = 7v$ (собственная скорость катера плюс скорость течения). Поэтому расстояние от места встречи с плотом до пункта В, равное $5vt$, катер проплывёт за время $\dfrac{5vt}{7v} = \dfrac{5}{7}t$.

За время $\dfrac{5}{7}t$ плот проплывёт расстояние $\dfrac{5}{7}t \cdot v$, а общее расстояние, пройденное плотом к моменту возвращения катера в пункт В, будет равно $vt + \dfrac{5}{7}vt = \dfrac{12}{7}vt$.

Следовательно, к моменту возвращения катера в пункт В плоту останется проплыть расстояние, равное $6vt - \dfrac{12}{7}vt = \dfrac{30}{7}vt$, что составляет $\dfrac{30}{7}vt : (6vt) = \dfrac{5}{7}$ частей всего расстояния от А до В.

Ответ: $\dfrac{5}{7}$

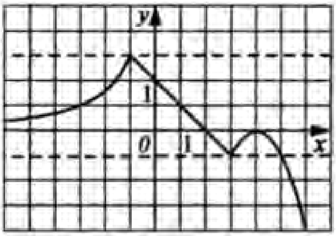
$\boxed{23}$ Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{x} \text{ при } x \leqslant -1, \\ -x + 2 \text{ при } -1 < x \leqslant 3, \\ -x^2 + 8x - 16 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком этой функции ровно одну общую точку?

Решение.

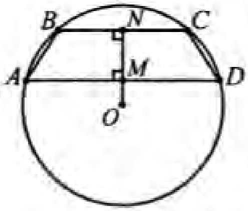
Графиком функции $y = f(x)$ при $x \leqslant -1$ является часть гиперболы, при $-1 < x \leqslant 3$ — часть прямой, при $x > 3$ — часть параболы, изображённые на данном ниже рисунке (вершиной параболы $y = -x^2 + 8x - 16$ является точка с координатами $x_В = 4$, $y_В = 0$). Легко видеть, что график функции $y = f(x)$ имеет одну общую точку с прямой $y = m$ в том случае, когда эта прямая совпадает с прямой $y = 3$ или расположена ниже прямой $y = -1$ (на рисунке прямые $y = 3$ и $y = -1$ изображены пунктиром), т.е. при $m = 3$ или $m < -1$. *Ответ:* $m \in (-\infty; -1) \cup \{3\}$



24 В окружность радиуса 26 вписана трапеция, основания которой равны 20 и 48, причём центр окружности лежит вне трапеции. Найдите высоту этой трапеции.

Решение.

Пусть O — центр данной окружности, $ABCD$ — трапеция, для которой $BC = 20$, $AD = 48$, причём точка O лежит вне трапеции, OM и ON — перпендикуляры к прямым AD и BC, см. рисунок.



Заметим, что поскольку прямые AD и BC параллельны, а из данной точки можно провести лишь одну прямую, перпендикулярную данной, то прямые OM и ON совпадают, т.е. точки O, M, N лежат на одной прямой и, значит, $MN = ON - OM$.

Так как $BO = CO$ и $ON \perp BC$, то N — середина BC, поэтому $BN = \frac{1}{2}BC = 10$. Из $\triangle BON$ по теореме Пифагора имеем:

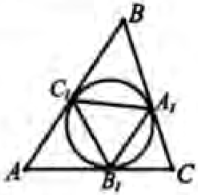
$$ON^2 = BO^2 - BN^2 = 26^2 - 10^2 = 576,\ ON = 24.$$

Аналогично предыдущему абзацу,

$$AM = \frac{1}{2}AD = 24,\ OM^2 = AO^2 - AM^2 = 26^2 - 24^2 = 100,\ OM = 10.$$

Таким образом, $MN = ON - OM = 24 - 10 = 14$. *Ответ*: 14

25 Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон в точках A_1, B_1, C_1, см. рисунок. Докажите, что $\angle A_1B_1C_1 = 90° - \frac{1}{2}\angle B$.



Решение.

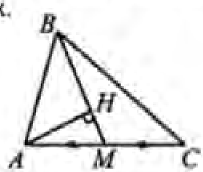
Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Заметим, что $AB_1 = AC_1$ и $CB_1 = CA_1$ – как отрезки касательных к окружности.

Из равнобедренных тругольников AB_1C_1 и CA_1B_1 имеем: $\angle AB_1C_1 = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $\angle CB_1A_1 = \frac{1}{2}(180° - \gamma) = 90° - \frac{\gamma}{2}$. Так как углы AB_1C_1 и CB_1A_1 дополняют угол $A_1B_1C_1$ до развёрнутого, то $\angle A_1B_1C_1 = 180° - (\angle AB_1C_1 + \angle CB_1A_1) = 180° - \left(180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\alpha + \gamma}{2} = 90° - \frac{\beta}{2}$. Таким образом, $\angle A_1B_1C_1 = 90° - \frac{1}{2}\angle B$, что и требовалось доказать.

26 Площадь треугольника ABC равна $60\sqrt{2}$. Найдите AC, если сторона AB равна 11 и она больше половины стороны AC, а медиана BM равна 10.

Решение.

1) Пусть H – проекция точки A на прямую BM. По условию, $AB > AM$. Значит, $\angle AMB$ больше, чем $\angle ABM$, а потому $\angle ABM$ является острым. Из этого следует, что точка H лежит на луче BM, а не на его дополнении, см. рисунок.



2) Так как M – середина AC, то $S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABC} = 30\sqrt{2}$. С другой стороны, $S_{ABM} = \frac{1}{2} AH \cdot BM$. Отсюда получаем: $AH = \frac{60\sqrt{2}}{BM} = 6\sqrt{2}$.

3) Из $\triangle ABH$ по теореме Пифагора имеем: $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{121 - 72} = 7$. Значит, $MH = BM - BH = 10 - 7 = 3$. Из $\triangle AMH$ находим: $AM = \sqrt{AH^2 + MH^2} = \sqrt{72 + 9} = 9$. Итак, $AC = 2AM = 18$.

Ответ: 18

Тест №41

21 Решите неравенство $\dfrac{3x^3+2x^2+x}{4x^2-49} \geqslant 0$.

Решение.

$\dfrac{3x^3+2x^2+x}{4x^2-49} = \dfrac{x(3x^2+2x+1)}{(2x-7)(2x+7)}$. Так как $3x^2+2x+1>0$ при любых x (ветви параболы $y=3x^2+2x+1$ направлены вверх и ось Ox она не пересекает), то данное в условии неравенство равносильно неравенству $\dfrac{x}{(2x-7)(2x+7)} \geqslant 0$. По методу интервалов получаем, что решением этого неравенства являются $x \in (-3{,}5; 0] \cup (3{,}5; +\infty)$.

Ответ: $(-3{,}5; 0] \cup (3{,}5; +\infty)$

22 Два автобуса выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов M и N, расстояние между которыми 70 км, и через 40 мин. одновременно прибыли в промежуточный пункт P. Найдите расстояние между пунктами M и P, если известно, что средняя скорость автобуса, выехавшего из пункта M, оказалась на 15 км/ч больше средней скорости автобуса, выехавшего из пункта N.

Решение.

Пусть S км – расстояние между пунктами M и P, а v км/ч – средняя скорость автобуса, выехавшего из пункта N. Тогда из условия следует, что расстояние между пунктами N и P равно $(S-70)$ км, а средняя скорость автобуса, выехавшего из пункта M, равна $(v+15)$ км/ч. Так как оба автобуса прибыли в пункт P через 40 минут (или $\dfrac{2}{3}$ часа), после того как выехали, то выполнены равенства: $\dfrac{S}{v+15}=\dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{70-S}{v}=\dfrac{2}{3}$. По правилу пропорции из этих равенств следуют равенства: $3S=2v+30$ и $210-3S=2v$. Суммируя почленно левые и правые части этих равенств, получаем: $210=4v+30$, $v=45$. Подставляя $v=45$ в равенство $3S=2v+30$, находим, что $S=40$.

Ответ: 40 км

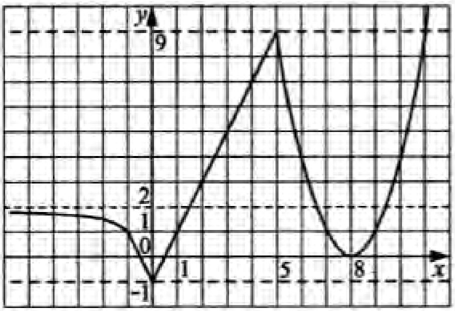
23 Функция $f(x)$ определена согласно формулам:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{1}{x} \text{ при } x \leqslant -1, \\ 2|x| - 1 \text{ при } -1 < x \leqslant 5, \\ x^2 - 16x + 64 \text{ при } x > 5. \end{cases}$$

Найдите все значения m, при которых уравнение $f(x) = m$ имеет ровно два различных решения.

Решение.

Уравнение $f(x) = m$ имеет ровно два различных решения $\Leftrightarrow$ график функции $y = f(x)$ и прямая $y = m$ имеют две общие точки. График функции $y = f(x)$ изображён на рисунке. Из этого рисунка видим, что график функции $y = f(x)$ имеет две общие точки с прямой $y = m$ при $m = 9$ и $-1 < m < 0$.

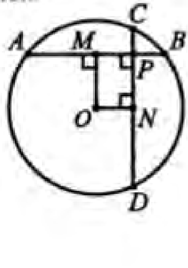


Ответ: $m \in (-1; 0) \cup \{9\}$

$\boxed{24}$ В окружности провели хорды AB и CD, которые перпендикулярны друг другу и пересекаются в точке P так, что $AP = 39$, $BP = 9$, $CP = 13$, $DP = 27$. Найдите радиус окружности.

Решение.

Пусть O — центр данной окружности, OM и ON — перпендикуляры к хордам AB и CD, см. рисунок.



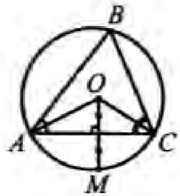
Перпендикуляр, проведённый из центра окружности к хорде, делит хорду пополам, поэтому имеем $AM = \frac{1}{2}AB$, $CN = \frac{1}{2}CD$. Так как по условию $AP = 39$, $BP = 9$, $CP = 13$, $DP = 27$, то $AB = AP + BP = 48$, $CD = CP + DP = 40$, $AM = 24$, $CN = 20$.

По теореме Пифагора из $\triangle CON$ имеем: $CO = \sqrt{CN^2 + ON^2}$. Для вычисления искомого радиуса R окружности осталось найти ON.

Так как три угла четырёхугольника $OMPN$ прямые, то $OMPN$ — прямоугольник и, значит, $ON = MP$. Найдём MP: $MP = AP - AM = 39 - 24 = 15$. Отсюда имеем: $ON = 15$, $R = CO = \sqrt{CN^2 + ON^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{625} = 25$.

Ответ: 25

25 Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC. Точка M симметрична точке O относительно прямой AC и принадлежит описанной окружности треугольника, см. рисунок. Докажите, что $\angle ABC = 60°$.



Решение.

Так как точка M симметрична точке O относительно стороны AC, то $\angle AMC = \angle AOC$. Согласно формуле, доказанной в задаче №25 теста №37, имеем: $\angle AOC = 90° + \frac{1}{2}\angle B$. А поскольку четырёхугольник $ABCM$ вписан в окружность, то $\angle AMC + \angle ABC = 180°$. Отсюда имеем: $\angle AOC + \angle B = 180°$, $90° + \frac{1}{2}\angle B + \angle B = 180°$, $\frac{3}{2}\angle B = 90°$, $\angle B = 60°$, что и требовалось доказать.

26 Стороны AB, AC, BC треугольника ABC равны $\sqrt{43}$, $5\sqrt{2}$ и 1 соответственно. Точка K расположена вне треугольника ABC, причём отрезок KC пересекает сторону AB в точке, отличной от B. Известно, что треугольник с вершинами K, A и C подобен исходному. Найдите косинус угла AKC, если $\angle KAC > 90°$.

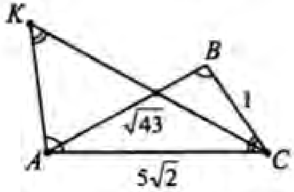
Решение.

1) Треугольники KAC и ABC подобны, т.е. углы этих треугольников при соответственных вершинах равны. Чтобы определить, какие вершины являются соответственными друг другу, заметим, что $\angle ABC > 90°$:

$AB^2 + BC^2 = 43 + 1 = 44$, $AC^2 = (5\sqrt{2})^2 = 50$, $AC^2 > AB^2 + BC^2$ – признак того, что угол, противолежащий стороне AC, является тупым.

Поэтому из условия $\angle KAC > 90°$ следует, что $\angle KAC = \angle ABC$ (в треугольнике может быть лишь один угол, больший $90°$).

2) Так как прямая CK пересекает сторону AB во внутренней точке, то $\angle KCA$ меньше $\angle BCA$ (см. рисунок), поэтому вершина K треугольника KAC не может быть соответственной вершине B треугольника ABC.



Следовательно, вершина K треугольника KAC соответствует вершине C треугольника ABC, т.е. $\angle AKC = \angle BCA$.

3) Найдём косинус угла BCA, применив теорему косинусов. Имеем:

$$\cos\angle BCA = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = \frac{50 + 1 - 43}{10\sqrt{2}} = \frac{4}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

Тест №43

$\boxed{21}$ Решите неравенство $x - 4\sqrt{x+4} - 1 < 0$.

Решение.

Представим левую часть неравенства в виде: $x + 4 - 4\sqrt{x+4} + 4 - 9 = (\sqrt{x+4} - 2)^2 - 9 = (\sqrt{x+4} - 5)\cdot(\sqrt{x+4} + 1)$. Так как $\sqrt{x+4} + 1 > 0$ при всех x, для которых это выражение определено $(x \geqslant -4)$, то исходное неравенство равносильно неравенствам: $\sqrt{x+4} - 5 < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 < 25 \\ x \geqslant -4 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leqslant x < 21.$$

Ответ: $[-4; 21)$

$\boxed{22}$ В ёмкость, содержащую 100 граммов 2% раствора соли, добавили 175 граммов воды, некоторое количество соли и тщательно перемешали полученную смесь. Определите, сколько граммов соли было добавлено, если известно, что после перемешивания получился раствор, содержащий 2,5% соли.

Решение.

Обозначим через x искомое количество грамм добавленной соли. Первоначальный 2%-ый раствор содержал $0{,}02 \cdot 100 = 2$ гр соли. После добавления 175 граммов воды и x гр соли масса раствора стала равна $(275 + x)$ гр, а процентное содержание соли – $\frac{2+x}{275+x} \cdot 100\%$. Так как по условию полученный раствор содержит 2,5% соли, то имеем уравнение: $\frac{2+x}{275+x} = \frac{2{,}5}{100}$. Преобразовывая это уравнение, получаем: $\frac{2+x}{275+x} = \frac{1}{40}$, $40(2+x) = 275 + x$, $39x = 195$, $x = 5$.

Ответ: 5

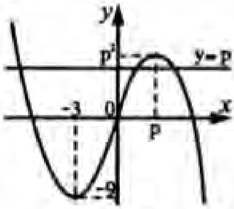
$\boxed{23}$ При каких значениях p прямая $y = p$ имеет три общие точки с графиком функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x(x+6), \text{ при } x < 0, \\ 2px - x^2, \text{ при } x \geqslant 0. \end{cases}$

Решение.

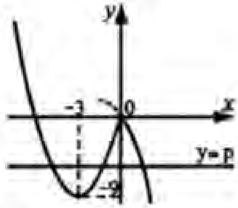
При $x < 0$ графиком функции $f(x)$ является часть параболы $y = x^2 + 6x$, ветви которой направлены вверх, а вершиной является точка с координатами $(-3; -9)$ (по известной формуле, $x_в = \frac{-6}{2} = -3$, тогда $y_в = f(x_в) = -3(-3+6) = -9$).

При $x > 0$ графиком функции $f(x)$ является часть параболы $y = 2px - x^2$, ветви которой направлены вниз, а вершина – точка с координатами $(p; p^2)$. Возможны следующие случаи: а) $p > 0$; б) $p \leqslant 0$. На рисунках а) и б) изображён вид графика функции $f(x)$ в случаях $p > 0$ и $p \leqslant 0$ соответственно.

а)



б)



Рассмотрим поочерёдно оба этих случая.

а) Из вида графика $y = f(x)$ при $p > 0$, см. рис. а), следует, что прямая $y = p$ пересекает график $y = f(x)$ в трёх точках $\Leftrightarrow p < p^2 \Leftrightarrow p > 1$ (с учётом условия $p > 0$ при сокращении обеих частей неравенства на p, знак неравенства сохраняется).

б) Из вида графика $y = f(x)$ при $p \leqslant 0$, см. рис. б), следует, что прямая $y = p$ пересекает график $y = f(x)$ в трёх точках $\Leftrightarrow 0 > p > -9$.

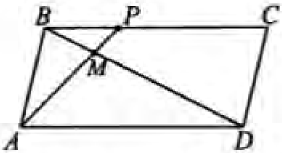
Объединяя значения p, найденные в случаях а), б), приходим к ответу.

Ответ: $p \in (-9; 0) \cup (1; +\infty)$

24 Из вершины A параллелограмма $ABCD$ проведён луч, который пересекает сторону BC в точке P и диагональ BD в точке M. Найдите площадь треугольника BMP, если известно, что площадь треугольника ABM равна 14, а площадь параллелограмма $ABCD$ равна 84.

Решение.

Площадь треугольника ABD равна половине площади параллелограмма (см. рисунок), т.е. $S_{ABD} = 42$.



Отсюда $S_{AMD} = S_{ABD} - S_{ABM} = 42 - 14 = 28$. Так как у треугольников BMP и ABM высота из вершины B общая, то $\frac{S_{BMP}}{S_{ABM}} = \frac{PM}{AM}$. Аналогично, $\frac{S_{ABM}}{S_{AMD}} = \frac{BM}{DM}$.

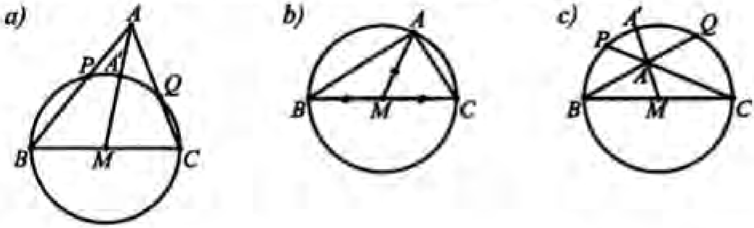
А поскольку треугольники BMP и AMD подобны, то $\frac{PM}{AM} = \frac{BM}{DM}$, и, значит, $\frac{S_{BMP}}{S_{ABM}} = \frac{S_{ABM}}{S_{AMD}} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}$, $S_{BMP} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABM} = 7$.

Ответ: 7

25 Докажите, что угол A треугольника ABC является острым в том и только том случае, если длина медианы AM больше, чем $\frac{BC}{2}$.

Решение.

Проведём окружность с центром в точке M радиуса $\frac{BC}{2}$, тогда точки B, C — концы диаметра этой окружности. Пусть A' — точка пересечения луча MA с этой окружностью. Возможны следующие три случая:



$AM > \dfrac{BC}{2}$ – точка A' лежит внутри отрезка AM, см. рис. а);

$AM = \dfrac{BC}{2}$ – точки A и A' совпадают, см. рис. b);

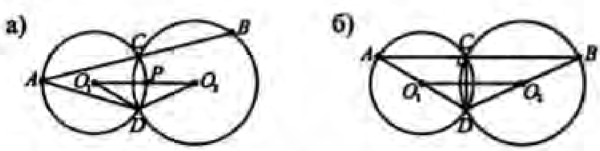
$AM < \dfrac{BC}{2}$ – точка A' лежит вне отрезка AM, см. рис. с).

В первом из этих случаев угол BAC равен полуразности градусных мер дуг BC и PQ, т.е. меньше 90°. Во втором случае угол BAC равен половине дуги BC, т.е. равен 90°. В третьем случае угол BAC равен полусумме дуг BC и PQ, т.е. больше 90°. Таким образом, угол A является острым только в первом из возможных случаев, т.е. лишь тогда, когда $AM > \dfrac{BC}{2}$, что и требовалось доказать.

$\boxed{26}$ Через одну из точек пересечения двух окружностей проведена прямая, пересекающая одну из этих окружностей в точке A, а другую – в точке B. Найдите наибольшее возможное значение длины отрезка AB, если расстояние между центрами данных окружностей равно d.

Решение.

Пусть O_1O_2 – центры первой и второй окружностей, C, D – точки пересечения этих окружностей друг с другом, AB – прямая, проходящая через точку C, P – точка пересечения прямой O_1O_2 с первой окружностью, см. рисунок а).



Тогда $\angle CAD = \dfrac{1}{2} \smile CPD$ (как вписанный угол, опирающийся на дугу CPD), $\angle O_2O_1D = \angle PO_1D = \smile PD$ (как центральный угол, опирающийся на дугу PD). В силу симметрии окружностей относительно прямой O_1O_2, имеем: $\smile PD = \frac{1}{2} \smile CPD$, и, значит, $\angle CAD = \angle O_2O_1D$. Аналогично доказывается, что $\angle CBD = \angle O_1O_2D$. Треугольники ABD и O_1O_2D подобны по двум углам, и, значит, $\frac{AB}{O_1O_2} = \frac{AD}{DO_1}$, $AB = d \cdot \frac{AD}{DO_1}$ (по условию, $O_1O_2 = d$). Отсюда следует, что отрезок AB имеет наибольшую длину $\Leftrightarrow$ отношение $\frac{AD}{DO_1}$ наибольшее. Но $\frac{AD}{DO_1} \leqslant 2$ (DO_1 – радиус окружности, AD – не длиннее диаметра). Следовательно, $AB \leqslant 2d$ и $AB = 2d \Leftrightarrow AD$ и BD – диаметры первой и второй окружностей, см. рисунок б).

Ответ: $2d$

Тест №45

21 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-y} + \dfrac{12}{x+y} = 1, \\ \dfrac{6}{x-y} - \dfrac{20}{x+y} = -11. \end{cases}$$

Решение.

При замене неизвестных $\frac{1}{x-y} = t$, $\frac{1}{x+y} = s$ данная система сводится к линейной системе:

$$\begin{cases} 2t + 12s = 1 \ / * -3 \\ 6t - 20s = -11 \end{cases} + \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 12s = 1 \\ -56s = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1-12s}{2} = -1 \\ s = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Возвращаясь к неизвестным x, y, получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} = -1 \\ \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}, y = \frac{5}{2}.$$

Ответ: $x = 1{,}5, y = 2{,}5$

22 Имеются два сплава, в первом из которых содержится 90% серебра, а во втором – 60% серебра. В каком отношении надо взять первый и второй сплавы, чтобы переплавив их, получить новый сплав, содержащий 70% серебра?

Решение.

Допустим, что второго сплава взяли 1 кг, а первого — m кг. В m кг первого сплава содержится $0{,}9m$ кг серебра, а в 1 кг второго сплава — 0,6 кг серебра. Поэтому после переплавки получится $m+1$ кг нового сплава, в котором процентное содержание серебра равно $\dfrac{0{,}9m+0{,}6}{m+1}\cdot 100\%$, что по условию должно составлять 70%. Отсюда получаем:
$\dfrac{0{,}9m+0{,}6}{m+1}=0{,}7$, $0{,}9m+0{,}6=0{,}7m+0{,}7$, $0{,}2m=0{,}1$, $m=0{,}5$. Таким образом, если взять 1 кг второго сплава, то для 70% содержания серебра в новом сплаве требуется взять 0,5 кг первого сплава, т.е. первый и второй сплавы нужно брать в отношении $1:2$.

Ответ: $1:2$

23 Найдите все пары значений параметров c и k, для каждой из которых парабола $y=x^2+2x+c$ касается обеих прямых $y=kx$ и $y=4x+3$.

Решение.

Парабола $y=x^2+2x+c$ касается обеих прямых $y=kx$ и $y=4x+3$ тогда и только тогда, когда каждое из уравнений $x^2+2x+c=kx$ и $x^2+2x+c=4x+3$ имеет ровно один корень. Преобразуем эти уравнения к стандартному виду: $x^2+(2-k)x+c=0$ и $x^2-2x+c-3=0$. Необходимым и достаточным условием того, что квадратное уравнение имеет ровно один корень, является равенство нулю его дискриминанта, поэтому искомыми значениями c и k являются решения системы:

$$\begin{cases}(2-k)^2-4c=0\\ 4-4(c-3)=0.\end{cases}$$

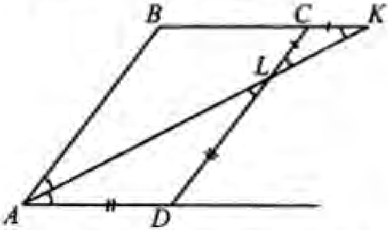
Из второго уравнения системы имеем: $c-3=1$, $c=4$. Подставляя $c=4$ в первое уравнение системы, получаем: $(2-k)^2=16$, $2-k=\pm 4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow k=-2$ или $k=6$.

Ответ: $c=4, k=6$; $c=4, k=-2$

24 В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону CD в точке L, а продолжение стороны BC — в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $CL=8$, $AK=49$, а периметр треугольника CLK равен 30.

Решение.

1) Заметим, что $\angle BAL = \angle ALD$, как накрест лежащие углы при параллельных прямых, а поскольку AL — биссектриса угла A, то $\angle ALD = \angle DAL$, см. данный ниже рисунок. Поэтому $\triangle DAL$ и подобный ему треугольник CLK являются равнобедренными. Значит, $CK = CL = 8$.

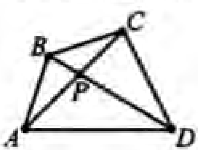


2) По условию, периметр $\triangle CLK$ равен 30 $\Rightarrow LK = 30 - CL - CK = 14$, $AL = AK - LK = 49 - 14 = 35$. Из подобия $\triangle DAL$ и $\triangle CLK$ получаем: $\dfrac{DL}{CL} = \dfrac{AL}{LK} = \dfrac{35}{14} = \dfrac{5}{2}$, $DL = 2{,}5CL = 20$. Отсюда, $CD = DL + CL = 28$, $AD = DL = 20$, а искомый периметр параллелограмма $ABCD$ равен $2 \cdot (AD + CD) = 2 \cdot (20 + 28) = 96$. *Ответ* 96

25 Докажите, что в любом выпуклом четырёхугольнике сумма длин диагоналей меньше периметра, но больше полупериметра.

Решение.

Сначала докажем, что для выпуклого четырёхугольника $ABCD$ сумма длин диагоналей больше, чем его полупериметр. Обозначим через P точку пересечения диагоналей AC и BD, см. данный ниже рисунок, и для каждого из треугольников ABP, BCP, CDP и ADP запишем неравенство треугольника: $AB < AP + BP$, $BC < BP + CP$, $CD < CP + DP$, $AD < DP + AP$. Сложив почленно эти четыре неравенства, получим: $AB + BC + CD + AD < 2(AP + BP + CP + DP) = 2(AC + BD)$. Поэтому $AC + BD > \frac{1}{2}(AB + BC + CD + AD)$, ч.т.д.



Теперь докажем, что сумма длин диагоналей AC и BD меньше, чем периметр четырёхугольника $ABCD$. Без ограничения общности можно считать, что $BC \leqslant AD$, как в случае, изображённом на данном выше рисунке (если выполнено противоположное неравенство, т.е. $BC \geqslant AD$, то можно произвести переобозначение вершин четырёхугольника).

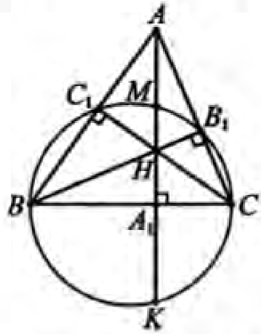
Из треугольников ABC и BCD по неравенству треугольника имеем: $AC < AB + BC$ и $BD < BC + CD$. Складывая почленно эти два неравенства и учитывая то, что $BC \leqslant AD$, получаем:

$AC + BD < AB + BC + BC + CD \leqslant AB + BC + AD + CD$, ч.т.д.

26 На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AA_1 в точке M, $AA_1 = 30$, $MA_1 = 24$, H – точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Решение.

Пусть B_1, C_1 – точки пересечения сторон AC и AB треугольника ABC с окружностью, построенной на стороне BC как на диаметре, см. рисунок на следующей странице. Тогда $\angle BB_1C = 90^\circ$ и $\angle CC_1B = 90^\circ$ – как углы, опирающиеся на диаметр. Следовательно, BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC.



Из прямоугольных треугольников AHC_1 и ABA_1 имеем:

$$\frac{AC_1}{AH} = \cos\angle C_1AH, \ \frac{AA_1}{AB} = \cos\angle A_1AB.$$

Но угол C_1AH совпадает с углом A_1AB, поэтому $\frac{AC_1}{AH} = \frac{AA_1}{AB}$. Отсюда получаем, что $AH = \frac{AC_1 \cdot AB}{AA_1}$. Поэтому для нахождения AH нам достаточно вычислить $AC_1 \cdot AB$.

Пусть K – точка пересечения луча AM с окружностью, построенной на BC, как на диаметре. По известному свойству секущих окружности имеем: $AC_1 \cdot AB = AM \cdot AK$. Заметим, что $AM = AA_1 - MA_1 = 6$, $AK = AA_1 + A_1K = AA_1 + A_1M = 54$ (отрезки A_1K и A_1M равны, т.к. отрезок BA_1 перпендикулярен хорде MK и проходит через центр окружности).

Таким образом, $AH = \dfrac{AC_1 \cdot AB}{AA_1} = \dfrac{AM \cdot AK}{AA_1} = \dfrac{6 \cdot 54}{30} = \dfrac{54}{5} = 10{,}8$.

Ответ: 10,8

Тест №47

21 Решите систему уравнений $\begin{cases} 3(x+y) - xy = -1, \\ 4xy + x + y = -9. \end{cases}$

Решение.

Сделав замену неизвестных $x + y = t$, $xy = s$, получим:
$\begin{cases} 3t - s = -1 \,/ * 4 \\ 4s + t = -9 \end{cases} + \Leftrightarrow \begin{cases} 3t - s = -1 \\ 13t = -13 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1, s = -2.$

Таким образом, исходная система упрощается к виду:

$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -2 \end{cases}$ $(*)$. По теореме, обратной теореме Виетта, числа x, y, удовлетворяющие системе $(*)$, являются корнями уравнения $z^2 + z - 2 = 0$. Это уравнение имеет корни $z = 1$ и $z = -2$, поэтому все решения исходной системы – пары $(1; -2)$ и $(-2; 1)$.

Ответ: $x = -2, y = 1; x = 1, y = -2$

22 Двое каменщиков, работая вместе, за 1 час могут выложить участок стены площадью 2 м^2. Работая отдельно, второй каменщик выложит участок стены площадью 4,8 м^2 на 2 часа быстрее, чем это сделает первый. За сколько часов, работая отдельно, первый каменщик выложит стену площадью 8 м^2?

Решение.

Пусть первый каменщик за час выкладывает x м^2 стены, а второй y м^2. Из условия имеем: $x + y = 2$ (1). Участок стены площадью 4,8 м^2 первый каменщик выложит за $\dfrac{4{,}8}{x}$ часов, а второй – за $\dfrac{4{,}8}{y}$ часов. По условию, $\dfrac{4{,}8}{x} - 2 = \dfrac{4{,}8}{y}$ (2). Выразив y через x из уравнения (1) и подставив в уравнение (2), получим: $\frac{4{,}8-2x}{x}=\frac{4{,}8}{2-x}$, $(4{,}8-2x)\cdot(2-x)=4{,}8x$, $2x^2-8{,}8x+9{,}6=4{,}8x$, $2x^2-13{,}6x+9{,}6=0$, $20x^2-136x+96=0/:4$, $5x^2-34x+24=0$. Полученное квадратное уравнение имеет корни $x_1=0{,}8$, $x_2=6$. При $x=6$ имеем: $y=2-6=-4$ — не удовлетворяет смыслу задачи. Значит, $x=0{,}8$, поэтому стену площадью 8 м^2 первый каменщик выложит за $\frac{8}{0{,}8}=10$ часов.

$\boxed{23}$ Известно, что прямая, параллельная прямой $y=-4x$, касается параболы $y=x^2$. Вычислите координаты точки касания.

Решение.

Любая прямая, параллельная прямой $y=-4x$, задаётся уравнением вида $y=-4x+c$, где c — некоторое число. Прямая $y=-4x+c$ касается параболы $y=x^2 \Leftrightarrow$ уравнение $x^2=-4x+c$ имеет единственный корень $\Leftrightarrow$ дискриминант квадратного трёхчлена x^2+4x-c равен нулю $\Leftrightarrow 16+4c=0$, $c=-4$. Абсцисса точки касания параболы $y=x^2$ и прямой $y=-4x-4$ является корнем уравнения $x^2=-4x-4$ и равна $x_0=-2$. Ордината точки касания вычисляется путём подстановки x_0 в уравнение параболы (или прямой): $y_0=x_0^2=4$.

Ответ: $(-2;4)$

$\boxed{24}$ В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекают сторону AD в точках M и L соответственно. Найдите длину стороны AB, если $BC=30$, а прямые BM и CL пересекаются в точке P так, что $CP:CL=5:3$.

Решение.

1) Так как $CP:CL=5:3$, то $CP>CL$. Это означает, что точка P лежит вне отрезка CL. Поэтому прямая BM, пересекающая прямую CL в точке P, не пересекает отрезок CL. Значит, точки M и L расположены на отрезке AD так, как показано на рисунке.

2) Так как $\angle CBM = \angle AMB$ (как накрестлежащие углы) и $\angle CBM = \angle ABM$ (BM – биссектриса угла B), то $\angle AMB = \angle ABM$. Поэтому $\triangle ABM$ – равнобедренный, $AM = AB$. Аналогично, $LD = CD$. Пусть $AB = CD = a$ – искомая длина стороны параллелограмма. Тогда $ML = AD - AM - LD = 30 - 2a$.

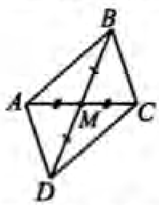
3) Треугольники MLP и BCP подобны по двум углам, следовательно, $\frac{ML}{BC} = \frac{PL}{CP}$. Пусть $CP = 5x$, тогда $CL = 3x$, $PL = CP - CL = 2x \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{PL}{CP} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$. Таким образом, $\frac{ML}{BC} = \frac{2}{5}$, $\frac{30-2a}{30} = \frac{2}{5}$, $a = 9$.

Ответ: 9

25 Отрезок BM – медиана треугольника ABC. Докажите, что справедливо следующее неравенство: $BM < \frac{1}{2}(AB + BC)$.

Решение.

1) Отложим на луче BM от точки M отрезок MD, равный отрезку BM, см. рисунок.



Четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом (т.к. его диагонали делятся точкой пополам). Поэтому $CD = AB$.

2) По неравенству треугольника имеем: $BD < BC + CD$. Так как $BD = 2BM$ и $CD = AB$, то предыдущее неравенство преобразуется к следующему: $2BM < BC + AB$, $BM < \frac{1}{2}(AB + BC)$, что и требовалось доказать.

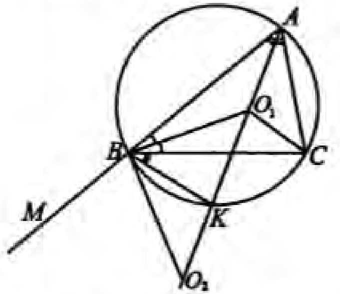
26 Точка O_1 – центр вписанной окружности треугольника ABC, а точка O_2 – центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Найдите расстояние между точками O_1 и O_2, если радиус описанной окружности треугольника ABC равен 6, а $\sin\angle BO_1C = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Решение.

1) Так как O_1 – центр вписанной окружности $\triangle ABC$, то справедливо равенство: $\angle BO_1C = 90° + \frac{1}{2}\angle A$ (см. задание №25 теста №37).

По условию, $\sin\angle BO_1C = \frac{\sqrt{5}}{3}$, следовательно, $\sin\left(90° + \frac{1}{2}\angle A\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\angle A\right) = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{2}\angle A\right) = \frac{2}{3}$.

2) Так как точка O_2 равноудалена от лучей AB и AC, то она лежит на биссектрисе угла BAC, а поскольку O_2 равноудалена от стороны BC и продолжения стороны AB за точку B, то O_2 лежит на биссектрисе внешнего угла $\triangle ABC$ при вершине B. Опишем вокруг треугольника ABC окружность, и пусть K – точка пересечения биссектрисы угла BAC с этой окружностью, см. данный ниже рисунок.



Покажем, что $\angle O_1BO_2 = 90°$: $\angle CBO_2 = \frac{1}{2}\angle CBM$, $\angle O_1BO_2 = \angle CBO_1 + \angle CBO_2 = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle CBM = \frac{1}{2}\cdot 180° = 90°$.
Отсюда следует, что O_1O_2 является гипотенузой прямоугольного треугольника O_1BO_2. Заметим, что поскольку $\angle CBK = \angle KAC$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу), то $\angle O_1BK = \angle CBK + \angle CBO_1 = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B$. А поскольку $\angle BO_1K = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B$ (как внешний угол треугольника BO_1A), то $\angle O_1BK = \angle BO_1K$, и, значит, $\triangle BO_1K$ равнобедренный, $BK = O_1K$.

Из равенства $\angle O_1BK = \angle BO_1K$ следует, что $\angle O_2BK = \angle BO_2K$ ($\angle O_2BK = 90° - \angle O_1BK$, $\angle BO_2K = 90° - \angle BO_1K$). Поэтому $\triangle BO_2K$ также равнобедренный, $BK = O_2K$.

3) Из равенств $BK = O_1K$ и $BK = O_2K$ получаем, что $O_1O_2 = 2BK$. Длину отрезка BK найдём из треугольника ABK по теореме синусов: $BK = 2R \cdot \sin\angle BAK$. Так как $\sin\angle BAK = \frac{2}{3}$ (см. пункт 1), а $R = 6$ (по условию), то $BK = 2 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} = 8$, $O_1O_2 = 2BK = 16$.

Ответ: 16

Тест №49

$\boxed{21}$ Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ xy = 12. \end{cases}$

Решение.

Преобразуем исходную систему:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ y = \dfrac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{144}{x^2} = 7 \\ y = \dfrac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 7x^2 - 144 = 0 \ (1) \\ y = \dfrac{12}{x} \ (2). \end{cases}$$

Квадратный трёхчлен $t^2 - 7t - 144$ имеет корни $t = -9$ и $t = 16$, поэтому биквадратное уравнение (1) имеет корни $x = \pm 4$ ($x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$, уравнение $x^2 = -9$ корней не имеет). Подставляя $x = \pm 4$ в уравнение (2), находим соответствующие значения y: $y = \pm 3$.

Ответ: $x = 4, y = 3; x = -4, y = -3$

$\boxed{22}$ Первый насос наполняет бак за 24 минуты, второй — за 40 минут, а третий — за 1 час. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?

Решение.

Пусть V литров объём бака и пусть x литров — перекачивает за 1 час первый насос, y литров — перекачивает второй, z литров — перекачивает третий. Так как 24 минуты составляют $\frac{2}{5}$ часа, а 40 минут составляют $\frac{2}{3}$ часа, то из условия задачи имеем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{5} \cdot x = V \\ \dfrac{2}{3} \cdot y = V \\ 1 \cdot z = V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \cdot V \\ y = \dfrac{3}{2} \cdot V \\ z = V. \end{cases}$$

Сложив почленно все три уравнения последней системы, получим равенство: $x+y+z=\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}+1\right)\cdot V=5\cdot V \Leftrightarrow \frac{1}{5}\cdot(x+y+z)=V$. Из этого равенства следует, что при совместной работе всех трёх насосов бак наполнится за $\frac{1}{5}$ часа, т.е. за 12 минут. *Ответ:* 12

$\boxed{23}$ Парабола с вершиной в точке $(-2;-2)$ содержит точку $(1;16)$. Найдите абсциссы точек пересечения этой параболы с осью Ox.

Решение.

Пусть $y=ax^2+bx+c$ — уравнение, определяющее данную параболу. Так как по условию эта парабола содержит точки $(-2;-2)$ и $(1;16)$, то $y(-2)=-2$, $y(1)=16$. Отсюда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 4a-2b+c=-2 \\ a+b+c=16 \end{cases} \quad (*).$$

А учитывая, что точка $(-2;-2)$ — вершина параболы, из формулы, определяющей абсциссу вершины параболы, имеем: $-\frac{b}{2a}=-2$, $b=4a$.

Подставляя $b=4a$ в уравнения системы $(*)$, получаем: $\begin{cases} c-4a=-2 \\ 5a+c=16. \end{cases}$

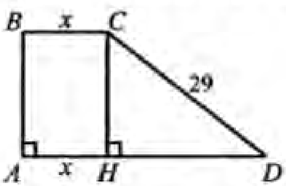
Вычитая из второго уравнения последней системы её первое уравнение, находим: $9a=18$, $a=2$, и подставляя $a=2$ в любое из этих уравнений, получаем, что $c=6$. Таким образом, $y=2x^2+8x+6$ — уравнение, определяющее данную параболу. Абсциссы точек пересечения этой параболы с осью Ox — корни уравнения $2x^2+8x+6=0$, т.е. $x=-3$ и $x=-1$.

Ответ: $-1;-3$

$\boxed{24}$ Периметр прямоугольной трапеции равен 100, а большая из боковых сторон равна 29. Найдите длину меньшего из оснований этой трапеции, если известно, что в неё можно вписать окружность.

Решение.

Пусть $ABCD$ — данная прямоугольная трапеция с основаниями BC, AD и большей боковой стороной CD, а CH — высота трапеции, см. рисунок.



Воспользуемся следующим известным фактом: если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны. Так как по условию в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, а её периметр равен 100, то $AD + BC = AB + CD = 50$. Отсюда имеем: $AB = 50 - CD = 21$. Поскольку трапеция $ABCD$ прямоугольная, то $ABCH$ — прямоугольник и, значит, $CH = AB$. Из треугольника CDH по теореме Пифагора находим: $DH^2 = CD^2 - CH^2 = 29^2 - 21^2$, $DH^2 = 400$, $DH = 20$. Обозначим длину BC через x, тогда

$$AD = AH + DH = BC + DH = x + 20.$$

Следовательно, $AD + BC = 2x + 20 = 50$, $2x = 30$, $x = 15$.

Ответ: 15

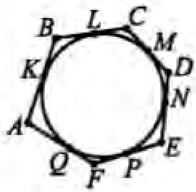
25 Шестиугольник $ABCDEF$ описан вокруг окружности, см. рисунок. Докажите, что $AB + CD + EF = BC + DE + AF$.

Решение.

Пусть K, L, M, N, P, Q — точки касания вписанной окружности со сторонами шестиугольника, см. рисунок. Тогда имеем равенства:

$$AB + CD + EF = AK + BK + CM + DM + EP + FP, \quad (1);$$

$$BC + DE + AF = BL + CL + DN + EN + FQ + AQ, \quad (2).$$



Обозначим длины отрезков AK, BK, CM, DM, EP, FP через a, b, c, d, e, f соответственно. Тогда, в силу равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из одной и той же точки, имеем: $AK = AQ = a$, $BK = BL = b$, $CM = CL = c$, $DM = DN = d$, $EP = EN = e$, $FP = FQ = f$. Отсюда видим, что правые части равенств (1) и (2) равны соответственно $a + b + c + d + e + f$ и $b + c + d + e + f + a$, т.е. равны друг другу. Следовательно, равны и левые части этих равенств, что и требовалось доказать.

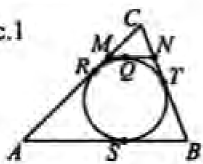
26 Периметр треугольника ABC равен 18. На сторонах AC и BC взяты точки M и N так, что прямая MN параллельна прямой AB и касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину стороны AB, если известно, что $MN = 2$.

Решение.

1) Пусть $AB = x$. Из условия $AC + BC + AB = 18$ следует, что $AC + BC = 18 - x$. Заметим, что поскольку треугольники MNC и ABC подобны, то $\dfrac{CM + CN}{AC + BC} = \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{2}{x}$ ($MN = 2$ — по условию). Основываясь на равенстве $\dfrac{CM + CN}{18 - x} = \dfrac{2}{x}$, попробуем составить уравнение для нахождения x.

2) Обозначим через Q — точку касания прямой MN и вписанной окружности $\triangle ABC$, а через R, S, T — точки касания этой окружности со сторонами AC, AB и BC, см. рис. 1.

рис.1



Тогда $AR = AS$, $BT = BS$ и $CR + CT = AC - AR + BC - BT = AC + BC - AS - BS = AC + BC - AB$. Поэтому $CR + CT = 18 - 2x$.

С другой стороны, $CR = CM + MR = CM + MQ$, $CT = CN + NT = CN + NQ \Rightarrow CR + CT = CM + MQ + CN + NQ = CM + CN + MN$, т.е. $CR + CT = CM + CN + 2$. Приравнивая выражение $CM + CN + 2$ к выражению для $CR + CT$, полученному выше, имеем: $CM + CN + 2 = 18 - 2x$, $CM + CN = 16 - 2x$.

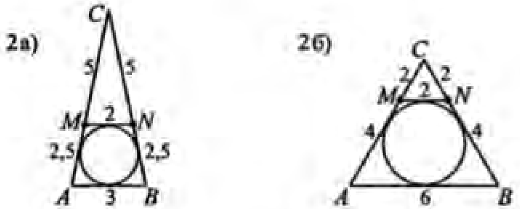
3) Выполняя подстановку $CM + CN = 16 - 2x$ в равенство $\dfrac{CM + CN}{18 - x} = \dfrac{2}{x}$ (см. пункт 1), получаем уравнение: $\dfrac{16 - 2x}{18 - x} = \dfrac{2}{x}$.

Упростим и решим это уравнение: $\dfrac{8 - x}{18 - x} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow (8 - x)x = 18 - x$, $x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ или $x = 6$.

Несложно проверить, что обе найденные возможности для длины стороны AB ($AB = 3$ и $AB = 6$) действительно реализуются на практике, например, для равнобедренных треугольников, изображённых на рисунках 2а) и 2б) (см. на следующей странице).

Из выполнения равенства $AM + BN = MN + AB$ в обоих случаях, изображённых на рис. 2а) и 2б), следует, что для каждого из этих случаев в трапецию $AMNB$ можно вписать окружность, т.е. оба этих треугольника действительно соответствуют всем условиям задачи.

Ответ: 3 или 6



Тест №51

21 Сократите дробь $\frac{4^n - 16}{2^n + 4}$.

Решение.

Так как $4^n = (2^2)^n = (2^n)^2$, то $\frac{4^n - 16}{2^n + 4} = \frac{(2^n)^2 - 4^2}{2^n + 4} =$
$= \frac{(2^n - 4)\cdot(2^n + 4)}{2^n + 4} = 2^n - 4.$

Ответ: $2^n - 4$

22 Сплав золота и серебра, содержащий 80% золота, сплавили с некоторым количеством серебра, в результате чего было получено 20 кг нового сплава, содержащего 70% серебра. Определите, сколько килограммов серебра было добавлено.

Решение.

Пусть x кг первоначальная масса сплава, y кг масса добавленного серебра. Тогда из условия задачи имеем: $x + y = 20$, $0{,}2x + y = 20 \cdot 0{,}7$. Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 0{,}2x + y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ 0{,}8x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ x = 7{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12{,}5 \\ x = 7{,}5. \end{cases}$$

Значит, масса добавленного серебра равна 12,5 кг.

Ответ: 12,5

23 Прямая $y = kx$ касается параболы $y = x^2 + bx + c$ в точке с координатами $(1; 2)$. Найдите все возможные значения коэффициентов b и c.

Решение.

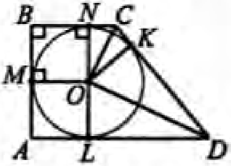
Прямая $y = kx$ касается параболы $y = x^2 + bx + c$ лишь в том случае, когда уравнение $x^2 + bx + c = kx$ имеет единственный корень, а это выполнено тогда, когда дискриминант трёхчлена $x^2 + (b - k)x + c$ равен нулю. Таким образом, $(b-k)^2 - 4c = 0$ (*). Из того, что точкой касания является точка $(1;2)$ (т.е. эта точка принадлежит и прямой $y = kx$ и параболе $y = x^2 + bx + c$), следуют равенства: $k \cdot 1 = 2$, $1^2 + b \cdot 1 + c = 2$, $b = 1 - c$. Подставляя $k = 2$ и $b = 1 - c$ в соотношение (*), получаем: $(c+1)^2 - 4c = 0$, $c^2 - 2c + 1 = 0$, $c = 1$. Отсюда $b = 1 - c = 0$.

Ответ: $b = 0, c = 1$

24 Вокруг окружности описана прямоугольная трапеция, длины оснований которой равны 8 и 12. Найдите радиус данной окружности.

Решение.

1) Пусть $ABCD$ – данная трапеция с основаниями $BC = 8$, $AD = 12$, O – центр её вписанной окружности, M, N, K, L – точки касания вписанной окружности со сторонами трапеции, см. рисунок. Искомый радиус вписанной окружности обозначим через r.



Так как трапеция $ABCD$ прямоугольная, то $MBNO$ и $AMOL$ – прямоугольники и, значит, $BN = OM$, $AL = OM$ т.е. $BN = AL = r$. Отсюда имеем: $CN = BC - BN = 8 - r$, $DL = AD - AL = 12 - r$. Заметим, что $CK = CN$ и $DK = DL$ – как отрезки касательных.

2) Так как центр вписанной окружности является точкой пересечения биссектрис, то CO и DO – биссектрисы углов C и D. Поэтому $\angle DCO + \angle CDO = \frac{1}{2}(\angle C + \angle D) = 90^\circ$ и, значит, треугольник COD – прямоугольный.

Заметим, что отрезок OK перпендикулярен CD (как радиус, проведённый в точку касания) и воспользуемся свойством высоты к гипотенузе прямоугольного треугольника: $OK^2 = CK \cdot DK$. Подставляя в это равенство $CK = 8 - r$, $DK = 12 - r$, получаем: $r^2 = (8 - r)(12 - r)$, $20r = 96$,

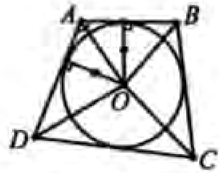
$r = 4{,}8$.

Ответ: 4,8

25 Докажите, что если в четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром в точке O, то $\angle AOB + \angle COD = 180°$.

Решение.

Если точка O — центр вписанной в четырёхугольник $ABCD$ окружности, то она равноудалена от сторон AB и AD, поэтому AO — биссектриса угла A, см. рисунок.



Аналогично, BO, CO и DO — биссектрисы углов B, C и D соответственно. Поэтому из треугольников AOB и COD имеем:

$$\angle AOB = 180° - \angle BAO - \angle ABO = 180° - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle B,$$

$$\angle COD = 180° - \angle CDO - \angle DCO = 180° - \frac{1}{2}\angle C - \frac{1}{2}\angle D.$$

Отсюда получаем: $\angle AOB + \angle COD = 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$.

Так как сумма внутренних углов выпуклого четырёхугольника равна $360°$, то $\frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 180°$ и, значит, $\angle AOB + \angle COD = 360° - 180° = 180°$, что и требовалось доказать.

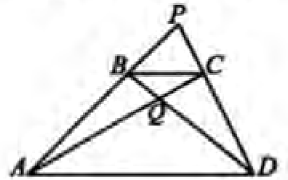
26 Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, Q — точка пересечения диагоналей этой трапеции. Найдите отношение площади треугольника ADQ к площади треугольника BCP, если известно, что $AD = 3BC$.

Решение.

Заметим, что $\triangle ADQ$ подобен $\triangle CBQ$, поэтому отношение площадей этих треугольников равно $\frac{S_{ADQ}}{S_{CBQ}} = \frac{AD^2}{BC^2} = 9$ (отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия).

Пусть S — площадь $\triangle CBQ$, тогда площадь $\triangle ADQ$ равна $9S$. Заметим, что у треугольников CBQ и CDQ общая высота, см. рисунок, поэтому отношение их площадей равно $\frac{S_{CDQ}}{S_{CBQ}} = \frac{DQ}{BQ} = 3 \Rightarrow S_{CDQ} = 3S$. Абсолютно аналогично, $S_{ABQ} = 3S$. Значит, площадь трапеции $ABCD$

равна $S_{ADQ}+S_{CDQ}+S_{ABQ}+S_{CBQ}=9S+3S+3S+S=16S$.



Далее заметим, что поскольку $\triangle BCP$ подобен $\triangle ADP$, то $\frac{S_{BCP}}{S_{ADP}}=$ $=\left(\frac{BC}{AD}\right)^2=\frac{1}{9}\Rightarrow S_{BCP}=\frac{1}{9}S_{ADP}\Rightarrow S_{ABCD}=S_{ADP}-S_{BCP}=\frac{8}{9}S_{ADP}\Rightarrow$ $\Rightarrow S_{BCP}:S_{ABCD}=1:8,\ S_{BCP}=\frac{1}{8}S_{ABCD}=\frac{1}{8}\cdot16S=2S$. Таким образом, искомое отношение площади $\triangle ADQ$ к площади $\triangle BCP$ равно $\frac{S_{ADQ}}{S_{BCP}}=\frac{9S}{2S}=4{,}5$.

Ответ: 4,5

Тест №53

21 Сократите дробь $\frac{12^n-3^n}{2^n+1}$.

Решение.

Так как $12^n-3^n=4^n\cdot3^n-3^n=3^n\cdot(4^n-1)$ и $4^n-1=2^{2n}-1=$ $=(2^n-1)\cdot(2^n+1)$, то $\frac{12^n-3^n}{2^n+1}=\frac{3^n\cdot(2^n-1)\cdot(2^n+1)}{2^n+1}=$ $=3^n\cdot(2^n-1)=6^n-3^n$.

Ответ: 6^n-3^n

22 В химической лаборатории в двух сосудах содержится раствор борной кислоты различной концентрации. В первом сосуде содержится 3 литра раствора, а во втором — 5 литров. Если растворы, находящиеся в этих сосудах, смешать, то получится 44% раствор кислоты. А если смешать равные объёмы этих растворов, то получится 40% раствор. Какова концентрация раствора в первом сосуде?

Решение.

Пусть концентрация раствора в первом сосуде равна $p\cdot100\%$, а во втором — $t \cdot 100\%$. Тогда в первом сосуде кислоты $3p$ литров, а во втором — $5t$ литров. После смешивания растворов обоих сосудов получится 8 литров раствора, в котором $3p+5t$ литров кислоты, т.е. раствор с концентрацией $\frac{3p+5t}{8} \cdot 100\%$. По условию, концентрация этого раствора равна 44%, и, значит, $\frac{3p+5t}{8} \cdot 100 = 44$, $3p+5t = 3{,}52$. Если же смешать по 1 литру каждого из растворов, то получится 2 литра раствора, в котором $p+t$ литров кислоты, т.е. раствор с концентрацией $\frac{p+t}{2} \cdot 100\%$. По условию имеем: $\frac{p+t}{2} \cdot 100 = 40$, $p+t = 0{,}8$. Итак, из условий задачи получена система: $\begin{cases} 3p+5t = 3{,}52 \ (1) \\ p+t = 0{,}8 \ (2). \end{cases}$ Умножая обе части уравнения (2) на 5 и вычитая из результата уравнение (1), приходим к равенству: $5p+5t-3p-5t = 4-3{,}52$, откуда $2p = 0{,}48$, $p = 0{,}24$. Таким образом, концентрация раствора в первом сосуде равна $0{,}24 \cdot 100\% = 24\%$.

Ответ: 24

23 Прямая $3x+4y=c$, где c — некоторое число, касается гиперболы $y = \frac{12}{x}$ в точке с отрицательной абсциссой. Найдите число c.

Решение.

1) Изобразим прямую $3x+4y=0$ и график функции $y=\frac{12}{x}$, см. рис. 1.

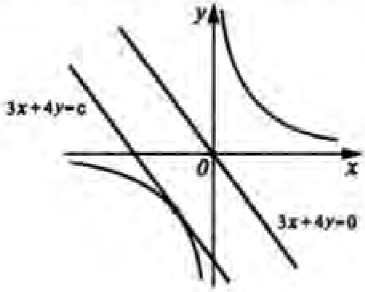


Рис. 1.

Прямые $3x+4y=c$ и $3x+4y=0$ параллельны при любом значении c. Поэтому на основании рисунка 1 делаем вывод, что прямая $3x+4y=c$ касается графика $y=\frac{12}{x}$ в том и только том случае, когда она имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

2) Прямая $3x + 4y = c$ и график $y = \dfrac{12}{x}$ имеют ровно одну общую точку $\Leftrightarrow$ система уравнений $\begin{cases} 3x + 4y = c \\ y = \dfrac{12}{x} \end{cases}$ имеет ровно одно решение. Подставляя $y = \dfrac{12}{x}$ в первое уравнение системы, получаем:

$$3x + \frac{48}{x} = c \Leftrightarrow 3x^2 - cx + 48 = 0.$$

Каждому корню x_0 уравнения $3x^2 - cx + 48 = 0$ соответствует ровно одно решение $x = x_0$, $y = \dfrac{12}{x_0}$ указанной выше системы, и наоборот.

Уравнение $3x^2 - cx + 48 = 0$ имеет единственный корень ($x_0 = c/6$) в том и только том случае, когда его дискриминант $D = c^2 - 12 \cdot 48$ равен нулю.

На основании изложенного выше получаем, что прямая $3x + 4y = c$ касается графика $y = \dfrac{12}{x}$ $\Leftrightarrow$ $c^2 - 12 \cdot 48 = 0$, $c^2 = 12^2 \cdot 4$, $c = \pm 24$. Так как по условию абсцисса точки касания $x_0 = \dfrac{c}{6}$ отрицательна, то $c < 0$, т.е. $c = -24$.

Ответ: $c = -24$.

Примечание 1. Заметим, что если прямая $ax + by = c$ имеет ровно одну общую точку с некоторой линией на плоскости Oxy, то это ещё не означает, что она касается этой линии. В качестве примера рассмотрим прямую $y = x + 6$ и график функции $y = x^3$, см. рис. 2.

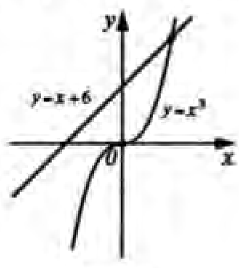


Рис. 2.

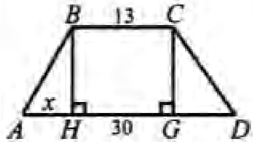
Можно доказать, что система $\begin{cases} y = x + 6 \\ y = x^3 \end{cases}$ имеет единственное решение, но очевидно, что о касании прямой $y = x + 6$ и графика $y = x^3$ речь идти не может. Таким образом, приведённое выше решение без ссылки на рисунок 1 было бы неполным.

Примечание 2. Для строгого доказательства (без ссылки на рисунок) равносильности утверждений – «прямая $3x+4y=c$ касается графика $y=\frac{12}{x}$» и «прямая $3x+4y=c$ имеет ровно одну общую точку с графиком $y=\frac{12}{x}$», необходимо уточнить понятие «касания» прямой и графика функции. Как это делается, вы узнаете в 11-м классе при изучении темы «Геометрический смысл производной».

24 Длины боковых сторон трапеции равны 25 и 26, а длины оснований равны 13 и 30. Найдите площадь этой трапеции.

Решение.

Пусть $ABCD$ – данная трапеция, причём $AB=25, CD=26, BC=13$, $AD=30$, а BH, CG – её высоты, см. рисунок.



Так как $BCGH$ – прямоугольник, то $BC=HG=13$. Из равенства $AH+HG+GD=AD$ получаем, что $AH+GD=AD-HG=30-13=17$. Пусть $AH=x$, тогда $GD=17-x$.

Из треугольников ABH и CDG по теореме Пифагора имеем:

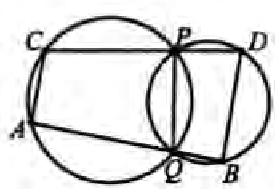
$$BH^2=AB^2-AH^2=625-x^2,\ CG^2=CD^2-GD^2=26^2-(17-x)^2.$$

В силу равенства $BH=CG$ получаем: $625-x^2=26^2-(17-x)^2$, $625-x^2=676-289+34x-x^2$, $34x=238$, $x=7$.

Подставляя $x=7$ в равенство $BH^2=625-x^2$, находим, что $BH=24$. Искомая площадь трапеции равна $\frac{1}{2}(BC+AD)\cdot BH=516$.

Ответ: 516

25 Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точки P, Q проведены прямые, пересекающие одну из окружностей в точках A и C, а другую – в точках B и D, см. рисунок. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.



Решение.

Пусть $\angle CAQ = \alpha$. Так как четырёхугольник $ACPQ$ вписан в окружность, то сумма его противоположных углов равна $180°$, то есть $\angle CAQ + \angle CPQ = 180°$. Отсюда $\angle CPQ = 180° - \alpha$. Далее имеем: $\angle DPQ = 180° - \angle CPQ = \alpha$. Четырёхугольник $BDPQ$ также вписан в окружность, следовательно, $\angle DBQ = 180° - \angle DPQ = 180° - \alpha$. Осталось заметить, что $\angle CAQ + \angle DBQ = \alpha + 180° - \alpha = 180°$ — прямые AC и BD параллельны, т.к. сумма односторонних углов при секущей AB равна $180°$.

26 Через вершину B правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $3 : 5$. Найдите отношение $CK : KF$.

Решение.

Пусть P — точка пересечения проведённой прямой с одной из сторон шестиугольника, S — площадь шестиугольника. По условию, прямая BP разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $3 : 5$, т.е. меньшая из них равна $\frac{3}{8}S$.

Заметим, что точка P не может лежать на сторонах AF и CD, так как площади треугольников ABF и BCD равны $\frac{1}{6}S$, что меньше, чем $\frac{3}{8}S$. Следовательно, возможны только два случая: точка P лежит на стороне EF — см. рисунок 1; точка P лежит на стороне DE — см. рисунок 2.

рис. 1

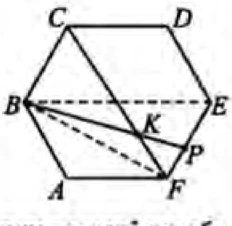
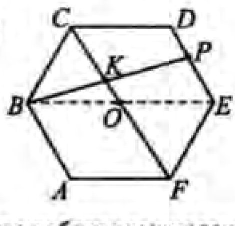


рис. 2



Рассмотрим поочерёдно оба эти случая. Для удобства вычислений будем считать, что $S = 48$.

1) Пусть P лежит на стороне EF — см. рисунок 1. Тогда из подобия треугольников BCK и PKF следует, что $\frac{CK}{KF} = \frac{BC}{PF}$. Но $\frac{BC}{PF} = \frac{EF}{PF}$, а отношение отрезков EF и PF равно отношению площадей треугольни-

ков BEF и BPF. Найдём это отношение. По условию, площадь $BPFA$ равна $S_{BPFA}=\frac{3}{8}S=\frac{3}{8}\cdot 48=18$ ($S=48$ – приняли для удобства). Площадь BPF равна $S_{BPF}=S_{BPFA}-S_{ABF}=18-\frac{1}{6}\cdot 48=10$. Остаётся заметить, что площадь BEF равна $S_{BEF}=S_{ABEF}-S_{ABF}=24-8=16$. Итак, в случае 1 имеем: $\frac{CK}{KF}=\frac{EF}{PF}=\frac{S_{BEF}}{S_{BPF}}=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$.

2) Пусть P лежит на стороне DE – см. рисунок 2. В силу симметричности правильного шестиугольника $ABCDEF$ относительно диагонали BE, отношение $\frac{DE}{DP}$ равно вычисленному в случае 1 отношению $\frac{EF}{PF}$, т.е. $\frac{DE}{DP}=\frac{8}{5}$. Пусть сторона шестиугольника равна a, тогда $DP=\frac{5a}{8}$, $EP=DE-DP=\frac{3a}{8}$, $OK=\frac{1}{2}EP=\frac{3a}{16}$ (т.к. CF параллельна DE и $BO=OE$, то OK – средняя линия треугольника BEP). Осталось заметить, что $CK=CO-OK=a-\frac{3a}{16}=\frac{13a}{16}$, $KF=OF+OK=a+\frac{3a}{16}=$ $=\frac{19a}{16}$. Итак, в случае 2 имеем: $\frac{CK}{KF}=\frac{13a}{16}:\frac{19a}{16}=\frac{13}{19}$.

Ответ: $\frac{8}{5}$ или $\frac{13}{19}$

Тест №55

21 Сократите дробь $\frac{4^n-2^{n+1}+1}{4^n-1}$.

Решение.

Так как $4^n-2^{n+1}+1=2^{2n}-2\cdot 2^n+1=\left(2^n-1\right)^2$ и $4^n-1=2^{2n}-1=$ $=\left(2^n-1\right)\cdot\left(2^n+1\right)$, то $\frac{4^n-2^{n+1}+1}{4^n-1}=\frac{\left(2^n-1\right)^2}{\left(2^n-1\right)\cdot\left(2^n+1\right)}=\frac{2^n-1}{2^n+1}$.

Ответ: $\frac{2^n-1}{2^n+1}$

22 Бассейн можно наполнять через четыре трубы. Если открыть вторую, третью и четвёртую трубу, то бассейн наполнится за 1 час, если открыть первую, третью и четвёртую трубу – бассейн наполнится за 1 час 15 минут, а если открыть только первую и вторую трубу – бассейн будет наполняться 1 час 40 минут. За какое время наполнится бассейн, если открыть все четыре трубы?

Решение.

Пусть x, y, z, t — объём, наполняемый за 1 час через 1-ю, 2-ю, 3-ю и 4-ю трубу соответственно, а V — объём всего бассейна. Так как 1 час 15 минут составляет $\frac{5}{4}$ часа, а 1 час 40 минут составляет $\frac{5}{3}$ часа, то из условия задачи имеем систему:

$$\begin{cases} 1 \cdot (y+z+t) = V \\ \frac{5}{4} \cdot (x+z+t) = V \\ \frac{5}{3} \cdot (x+y) = V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z+t = V \\ x+z+t = \frac{4}{5} \cdot V \\ x+y = \frac{3}{5} \cdot V. \end{cases}$$

Сложив почленно все три уравнения последней системы, получим равенство: $2(x+y+z+t) = \left(1+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right) \cdot V = \frac{12}{5} \cdot V \Leftrightarrow \frac{5}{6} \cdot (x+y+z+t) = V.$ Из этого равенства следует, что если открыть все четыре трубы, то бассейн наполнится за $\frac{5}{6}$ часа, т.е. за 50 минут.

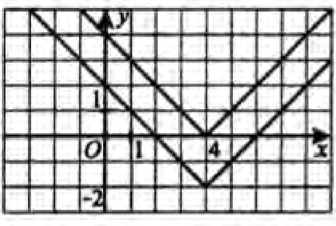
Ответ: 50

$\boxed{23}$ Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ пересекает график функции $y = ||x-4|-2|$ в четырёх различных точках.

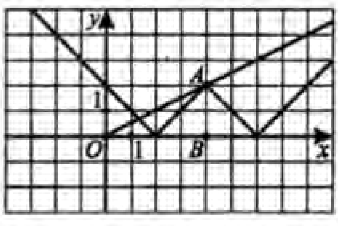
Решение.

Построим график функции $y = ||x-4|-2|$ последовательными преобразованиями (смещениями и отражениями) графика функции $y = |x|$. На рисунке а) изображены графики функции $y = |x-4|$ и $y = |x-4|-2$, а на рисунке б) — окончательный вид графика функции $y = ||x-4|-2|$.

а)



б)

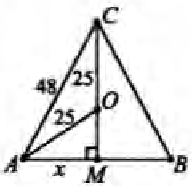


Из рисунка б) очевидно, что прямая $y = kx$ пересекает график функции $y = ||x-4|-2|$ в четырёх различных точках в том и только том случае, если она содержится внутри угла AOB. А это, в свою очередь, равносильно тому, что угловой коэффициент k положителен, но меньше углового коэффициента прямой OA, равного $\frac{AB}{OB} = 0{,}5$. *Ответ:* $0 < k < 0{,}5$

24 Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 48, а радиус описанной окружности этого треугольника равен 25. Найдите длину основания этого треугольника.

Решение.

Пусть ABC – данный равнобедренный треугольник, точка O – центр его описанной окружности, CM – медиана к основанию AB. Так как центром описанной окружности является точка пересечения серединных перепендикуляров к сторонам треугольника, медиана к основанию равнобедренного треугольника является и его высотой, т.е. совпадает с серединным перпендикуляром, то точка O лежит на прямой CM, см. рисунок.



Отрезки OA и OC – радиусы описанной окружности $\triangle ABC$, поэтому $AO = CO = 25$. Пусть $AM = x$, по теореме Пифагора из треугольников OAM и CAM получаем: $OM = \sqrt{25^2 - x^2}$, $CM = \sqrt{48^2 - x^2}$. Но $CM = CO + OM$, поэтому имеем следующее уравнение:

$$\sqrt{2304 - x^2} = 25 + \sqrt{625 - x^2}.$$

Возведя левую и правую части в квадрат, получаем:

$$2304 - x^2 = 625 + 625 - x^2 + 50\sqrt{625 - x^2},\ 1054 = 50\sqrt{625 - x^2},$$

$$\sqrt{625 - x^2} = \frac{527}{25},\ 625 - x^2 = \frac{527^2}{625},\ x^2 = 625 - \frac{527^2}{625},\ x = 13{,}44.$$

Таким образом, $AB = 2AM = 26{,}88$.

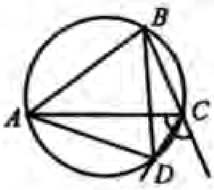
Ответ: 26,88

Примечание. Покажем, что для решения уравнения $x^2 = 625 - \dfrac{527^2}{625}$ калькулятор не является насущно необходимым: $x^2 = 625 - \dfrac{527^2}{625} =$

$$= \frac{(625 - 527)(625 + 527)}{625} = \frac{98 \cdot 1152}{625} = \frac{49 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 576}{625} = \frac{7^2 \cdot 2^2 \cdot 24^2}{25^2},$$

$$x = \frac{7 \cdot 2 \cdot 24}{25} = 13{,}44.$$

25 Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает описанную окружность треугольника в точке D, см. рисунок. Докажите, что $AD = BD$.



Решение.

Пусть P — произвольная точка, лежащая на луче BC, см. данный выше рисунок. Так как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны, то в случае, изображённом на рисунке к условию задачи, имеем:

$$\angle ABD = \angle ACD = \frac{1}{2}\angle ACP,$$

$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \angle BDC + \angle DBC = \angle DCP = \frac{1}{2}\angle ACP.$$

Следовательно, $\angle ABD = \angle BAD$ и, значит, $AD = BD$, что и требовалось доказать.

Заметим, что случай, изображённый на рисунке к условию задачи, реализуется тогда, когда угол ABC больше угла BAC, т.е. когда $AC > BC$.

Если $AC < BC$, то реализуется случай, изображённый на данном ниже рисунке 1. В этом случае доказательство абсолютно аналогично (достаточно в предыдущих выкладках всюду заменить букву A на букву B и наоборот).

Если же $AC = BC$, как на рисунке 2, то отрезок CO является биссектрисой угла ACB (т.к. треугольники AOC и BOC равны по трём сторонам).

рис. 1

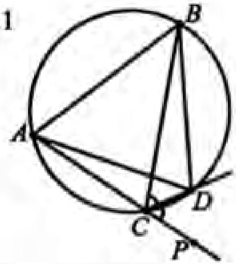
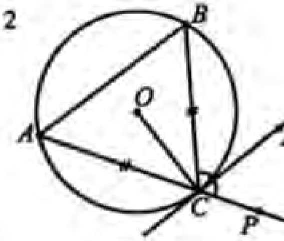


рис. 2



Поэтому $\angle BCO = \frac{1}{2}\angle ACB$ и, значит, $\angle BCO + \angle BCL =$
$= \frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle BCP = 90°$, т.е. $OC \perp CL$. Таким образом, в случае $AC = BC$ биссектриса внешнего угла при вершине C является касатель-

ной к описанной окружности треугольника ABC и равенство $AD = BD$ выполняется в силу совпадения точек C и D.

26 Две окружности, расстояние между центрами которых равно 21, а радиусы равны 13 и 20, пересекаются в точках P и Q. На меньшей из этих окружностей взята точка L так, что прямая LQ касается большей окружности. Найдите площадь треугольника LPQ.

Решение.

1) Найдём длину отрезка PQ. Пусть O_1 – центр меньшей окружности, O_2 – центр большей, H – точка пересечения прямых PQ и O_1O_2, см. рис. 1. Тогда, $PH \perp O_1O_2$ и H – середина отрезка PQ — в силу симметричности точек P и Q относительно линии O_1O_2.

рис.1

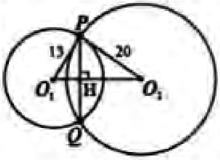
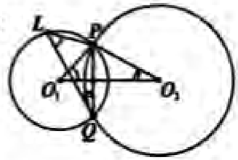


рис.2



Пусть $O_1H = x$, тогда $O_2H = 21 - x$ (т.к. по условию $O_1O_2 = 21$). Из треугольников PHO_1 и PHO_2 по теореме Пифагора имеем:

$$PH^2 = O_1P^2 - O_1H^2 = 169 - x^2,$$

$$PH^2 = O_2P^2 - O_2H^2 = 400 - (21 - x)^2 = 42x - x^2 - 41.$$

Таким образом, $169 - x^2 = 42x - x^2 - 41$, $42x = 210$, $x = 5$. Подставляя $x = 5$ в равенство $PH^2 = 169 - x^2$, получаем, что $PH^2 = 144$, $PH = 12$. Значит, $PQ = 2PH = 24$.

2) Покажем, что треугольники LPQ и O_1PO_2 подобны, см. рис. 2.

$\angle PLQ = \frac{1}{2}\angle PO_1Q$ – вписанный угол PLQ опирается на ту же дугу, которую стягивает центральный угол PO_1Q.

$\angle PO_1O_2 = \frac{1}{2}\angle PO_1Q$ – в силу симметричности точек P и Q относительно прямой O_1O_2.

Из двух предыдущих равенств следует, что $\angle PLQ = \angle PO_1O_2$.

$\angle LQP = \frac{1}{2}\angle PO_2Q$ – угол LQP, как угол между касательной и хордой, равен половине дуги большей окружности, которую стягивает центральный угол PO_2Q.

$\angle PO_2O_1 = \frac{1}{2}\angle PO_2Q$ – в силу симметричности точек P и Q относительно прямой O_1O_2.

Из двух предыдущих равенств следует, что $\angle LQP = \angle PO_2O_1$.

Таким образом, треугольники LPQ и O_1PO_2 действительно подобны (по двум равным углам).

3) Площадь $\triangle O_1PO_2$ равна $S_{O_1PO_2} = \frac{1}{2} PH \cdot O_1O_2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 21 = 126$. Искомую площадь $\triangle LPQ$ найдём по формуле $S_{LPQ} = k^2 \cdot S_{O_1PO_2}$, где k – коэффициент подобия треугольников LPQ и O_1PO_2. Имеем: $k = \frac{PQ}{PO_2} = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$, $S_{LPQ} = \frac{6^2}{5^2} \cdot 126 = \frac{4536}{25}$.

Ответ: $\frac{4536}{25}$

Тест №57

21 Сократите дробь $\dfrac{8^n + 27^n}{9^n - 6^n + 4^n}$.

Решение.

Заметим, что $8^n + 27^n = (2^3)^n + (3^3)^n = (2^n)^3 + (3^n)^3$. Воспользовавшись формулой суммы кубов, получим: $8^n + 27^n = (2^n + 3^n) \cdot (2^{2n} - 2^n \cdot 3^n + 3^{2n}) = (2^n + 3^n) \cdot (4^n - 6^n + 9^n)$. Отсюда следует, что $\dfrac{8^n + 27^n}{9^n - 6^n + 4^n} = 2^n + 3^n$.

Ответ: $2^n + 3^n$

22 Велосипедист ехал сначала 3 минуты с горы, а затем 5 минут в гору. Обратный путь он проделал за 16 минут, двигаясь с горы и в гору с теми же скоростями, что и прежде. Во сколько раз скорость велосипедиста при движении с горы была больше, чем скорость в гору?

Решение.

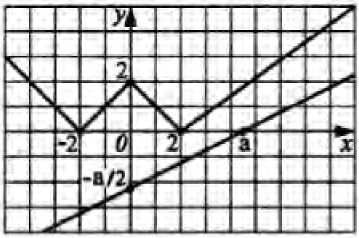
Пусть v_1 м/мин – скорость движения велосипедиста при движении с горы, а v_2 м/мин – скорость его движения в гору (отметим, что по смыслу задачи, $v_1 > v_2$). Тогда участок на котором велосипедист ехал с горы имеет длину $3v_1$ метров, а участок на котором он ехал в гору – $5v_2$ метров. На обратном пути велосипедист ехал с горы $5v_2$ метров, а в гору – $3v_1$ метров. Так как по условию скорость движения велосипедиста с горы и в гору не изменилась, то он преодолел эти участки за $\frac{5v_2}{v_1}$ и $\frac{3v_1}{v_2}$ минут соответственно. По условию, время на обратный путь равно 16 минут, отсюда имеем: $\frac{5v_2}{v_1} + \frac{3v_1}{v_2} = 16$. Вводя новую неизвестную $t = \frac{v_1}{v_2}$, получаем уравнение: $3t + \frac{5}{t} = 16 \Leftrightarrow 3t^2 + 5 = 16t \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$ или $t = 5$. Осталось заметить, что поскольку $v_1 > v_2$, то $t = \frac{v_1}{v_2} > 1 \Rightarrow t = 5$, $v_1 = 5v_2$ – скорость велосипедиста с горы была в 5 раз больше, чем в гору.

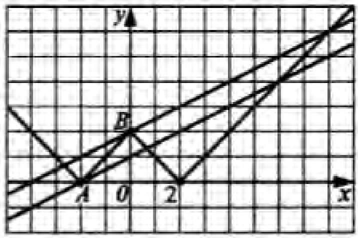
Ответ: 5

23 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $||x| - 2| = \frac{x - a}{2}$ имеет ровно 3 корня.

Решение.

Решаем данное уравнение графически. На рис. а) изображён эскиз графика $y = ||x| - 2|$ и прямой $y = \frac{x - a}{2}$. Несложно заметить, что эти графики имеют ровно три общие точки $\Leftrightarrow$ прямая $y = \frac{x - a}{2}$ проходит через точку $A(-2; 0)$ или через точку $B(0; 2)$, см. рис. б).

а) 

б) 

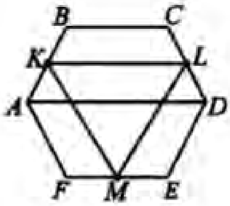
Подставляя в уравнение прямой $y = \frac{x - a}{2}$ значения $x = -2, y = 0$, получаем условие того, что эта прямая содержит точку $A(-2; 0)$: $0 = \frac{-2 - a}{2}$, $a = -2$. Аналогично, из условия того, что прямая $y = \frac{x - a}{2}$ содержит точку $B(0; 2)$, находим: $a = -4$. Таким образом, искомыми значениями a являются числа -2 и -4.

Ответ: $a = -2$, $a = -4$

24 Точки K, L, M являются серединами сторон AB, CD, EF правильного шестиугольника $ABCDEF$. Найдите длину стороны этого шестиугольника, если площадь треугольника KLM равна $9\sqrt{3}$.

Решение.

Заметим, что треугольник KLM – правильный, а его сторона KL является средней линией трапеции $ABCD$, см. рисунок. Обозначим длину стороны шестиугольника через a, тогда: $AD = 2BC = 2a$, $KL = \frac{1}{2}(BC + AD) = \frac{3}{2}a$. Так как по условию площадь ΔKLM равна $S_{KLM} = 9\sqrt{3}$, а по формуле площади равностороннего треугольника $S_{KLM} = \frac{(KL)^2\sqrt{3}}{4}$, то $(KL)^2 = 36$, $KL = 6$, $a = \frac{2}{3}KL = 4$.



Ответ: 4

25 Отрезки BB_1, CC_1 – высоты непрямоугольного треугольника ABC. Докажите, что треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия, равным $|\cos\angle A|$.

Решение.

Возможны следующие три различных случая:
1) треугольник ABC – остроугольный, см. рис. 1;
2) в треугольнике ABC угол A больше 90°, см. рис. 2;
3) в треугольнике ABC один из углов B или C (например, угол C) больше 90°, см. рис. 3.

рис.1

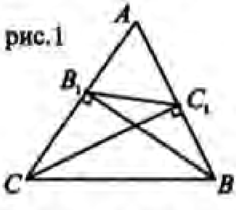


рис.2

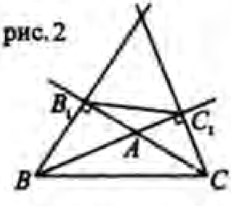
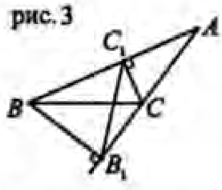


рис.3



Заметим, что поскольку $\angle BB_1C = \angle BC_1C = 90°$, то во всех трёх случаях точки B_1 и C_1 лежат на окружности, диаметром которой является отрезок BC.

В случае 1) имеем: $\angle ABC + \angle C_1B_1C = 180°$ (как сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника). С другой стороны, $\angle C_1B_1C + \angle AB_1C_1 = 180°$ Из двух предыдущих равенств следует, что

$\angle ABC = \angle AB_1C_1$, поэтому треугольники AB_1C_1 и ABC подобны по двум углам (угол A — общий). При этом коэффициент подобия этих треугольников равен $\dfrac{AC_1}{AC} = \cos\angle A$, т.к. $\triangle ACC_1$ — прямоугольный треугольник с гипотенузой AC.

В случае 2) имеем: $\angle C_1B_1C = \angle C_1BC$ — как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, $\angle B_1AC_1 = \angle BAC$ — как вертикальные углы. Следовательно, треугольники AB_1C_1 и ABC подобны по двум углам. При этом коэффициент подобия этих треугольников равен $\dfrac{AC_1}{AC} =$ $= \cos\angle C_1AC = \cos(180° - \angle BAC) = -\cos\angle BAC$.

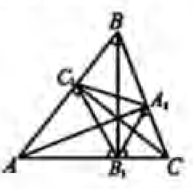
В случае 3) имеем: $\angle C_1B_1C = \angle C_1BC$ — как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, поэтому треугольники AB_1C_1 и ABC подобны по двум углам (угол A — общий). При этом коэффициент подобия этих треугольников равен $\dfrac{AC_1}{AC} = \cos\angle A$.

Итак, во всех возможных случаях доказано, что треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC, причём если $\angle A$ — острый, то коэффициент подобия равен $\cos\angle A$, а если $\angle A$ — тупой, то коэффициент подобия равен $-\cos\angle A$, т.е. равен $|\cos\angle A|$.

$\boxed{26}$ В треугольнике ABC $\cos\angle ABC = \dfrac{1}{3}$, $AB = 4$, $BC = 3$. Точки A_1, B_1, C_1 — основания высот треугольника ABC. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение.

Для сокращения записи введём обозначение $\angle ABC = \beta$. Поскольку точки A_1, C_1 — основания высот треугольника ABC, то $\angle AB_1C_1 = \beta$ и $\angle CB_1A_1 = \beta$ (см. выше задание №25).



Следовательно, $\angle A_1B_1C_1 = 180° - 2\beta$. По теореме синусов, радиус описанной окружности $\triangle A_1B_1C_1$ равен $R = \dfrac{A_1C_1}{2\sin\angle A_1B_1C_1}$. По условию, $\cos\beta = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin\angle A_1B_1C_1 = \sin(180° - 2\beta) = \sin 2\beta =$

$= 2\sin\beta\cos\beta = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$. Итак, $\sin\angle A_1B_1C_1 = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$, и чтобы найти R, остаётся вычислить A_1C_1.

В силу подобия треугольников ABC и A_1BC_1 с коэффициеном подобия, равным $\cos\angle B$ (снова используем задание №25 текущего теста), имеем: $\dfrac{A_1C_1}{AC} = \cos\beta \Rightarrow A_1C_1 = \dfrac{1}{3}AC$.

Найдём AC по теореме косинусов:
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos\beta$, $AC^2 = 4^2 + 3^2 - 2\cdot 4\cdot 3\cdot\frac{1}{3} = 17$, $AC = \sqrt{17}$. Значит, $A_1C_1 = \dfrac{\sqrt{17}}{3}$ и окончательно получаем:
$R = \dfrac{A_1C_1}{2\sin\angle A_1B_1C_1} = \dfrac{\sqrt{17}}{3} : \dfrac{8\sqrt{2}}{9} = \dfrac{3\sqrt{17}}{8\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{34}}{16}$. *Ответ:* $\dfrac{3\sqrt{34}}{16}$

Тест № 59

21 Сократите дробь $\dfrac{9^n + 3^n - 12}{3^{n-1} - 1}$.

Решение.

Так как $9^n = (3^n)^2$, то относительно $t = 3^n$ выражение $9^n + 3^n - 12$ является квадратным трёхчленом. А поскольку $t^2 + t - 12 = (t+4)(t-3)$, то $9^n + 3n - 12 = (3^n + 4)\cdot(3^n - 3)$. Следовательно, $\dfrac{9^n + 3^n - 12}{3^{n-1} - 1} =$
$= \dfrac{(3^n + 4)\cdot(3^n - 3)}{3^{n-1} - 1} = \dfrac{(3^n + 4)\cdot 3\cdot(3^{n-1} - 1)}{3^{n-1} - 1} = 3\cdot(3^n + 4) = 3^{n+1} + 12.$

Ответ: $3^{n+1} + 12$

22 Из города A в город B одновременно выехали два автомобиля. Скорость первого автомобиля — 60 км/ч, а скорость второго — 90 км/ч. Спустя 30 минут из города A в город B выехал третий автомобиль, который догнал сначала первый автомобиль, а через час после этого догнал второй автомобиль. Найдите скорость третьего автомобиля.

Решение.

Пусть v км/ч — скорость третьего автомобиля, а t часов — время, понадобившееся ему, чтобы догнать первый автомобиль. Тогда первый автомобиль до того момента, как его догнал третий, был в пути $(t + 0{,}5)$ ч. Поэтому $60(t+0{,}5) = vt$. Так как третий автомобиль догнал второй спустя ещё час, то до этого момента он был в пути $(t+1)$ ч, а второй — $(t + 1{,}5)$ ч.

Отсюда имеем: $90(t+1{,}5) = v(t+1) \Rightarrow$ v и t удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} 60t + 30 = vt \ \ (1) \\ 90t + 135 = vt + v \ \ (2). \end{cases}$$

Выполняя в уравнении (2) подстановку $vt = 60t + 30$ и приводя подобные, получаем: $30t + 105 = v$ (3). Из соотношения (3) и уравнения (1) следует, что $60t + 30 = (30t + 105)t$, $30t^2 + 45t - 30 = 0$, $2t^2 + 3t - 2 = 0$. Полученное квадратное уравнение имеет корни $t = -2$ и $t = 0{,}5$. Значение $t = -2$ не удовлетворяет смыслу задачи, а при $t = 0{,}5$ имеем: $v = 30 \cdot 0{,}5 + 105 = 120$.

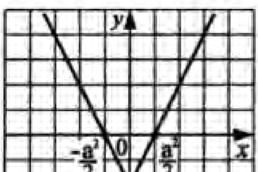
Ответ: 120 км/ч

$\boxed{23}$ Найдите все значения a, при которых уравнение $|2|x| - a^2| = x - 2a$ имеет четыре различных решения.

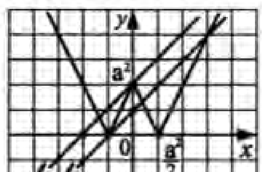
Решение.

Будем решать данное уравнение (точнее, определять количество его решений при различных a) графически. При всех $a \neq 0$ график функции $y = 2|x| - a^2$ имеет вид, изображённый на рисунке а), график функции $y = |2|x| - a^2|$ имеет вид, изображённый на рисунке b) (при $a = 0$ эти графики «вырождаются» в график функции $y = 2|x|$).

a)



b)



Уравнение $|2|x| - a^2| = x - 2a$ имеет четыре различных решения $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ прямая $y = x - 2a$ пересекает график $y = |2|x| - a^2|$ в четырёх различных точках. Легко видеть, что последнее выполнено лишь тогда, когда прямая $y = x - 2a$ содержится между прямыми l_1 и l_2, изображёнными на рисунке b). А это, в свою очередь, выполнено тогда, когда точка пересечения прямой $y = x - 2a$ с осью Oy лежит между точками пересечения оси Oy с прямыми l_1, l_2.

Прямая $y = x - 2a$ пересекает ось Oy в точке с ординатой $-2a$, прямые l_1, l_2 пересекают ось Oy в точках с ординатами a^2 и $\frac{a^2}{2}$. Значит, искомыми a являются решения системы неравенств:

$$\begin{cases} -2a < a^2 & (1) \\ -2a > \frac{a^2}{2} & (2). \end{cases}$$

Из неравенства (2) следует, что $a < 0$, поэтому деля неравенства на a, получим, что равносильной системой является система:

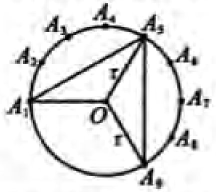
$$\begin{cases} -2 > a \\ -2 < \frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \ -4 < a < -2.$$

Ответ: $a \in (-4; -2)$

$\boxed{24}$ Точка O – центр правильного двенадцатиугольника $A_1A_2...A_{12}$. Найдите длину диагонали A_1A_5, если площадь треугольника A_5OA_9 равна $3\sqrt{3}$.

Решение.

Пусть r – радиус окружности, описанной вокруг правильного многоугольника $A_1A_2...A_{12}$. Поскольку между вершинами A_1, A_5 и вершинами A_5, A_9 расположено одинаковое количество вершин многоугольника $A_1 \ldots A_{12}$, то дуги $A_1A_3A_5$ и $A_5A_7A_9$ равны, см. рисунок. Следователь-

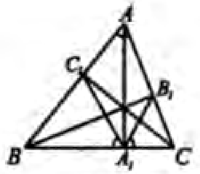


но, $A_1A_5 = A_5A_9$ – как отрезки стягивающие равные дуги. Найдём A_5A_9 из $\triangle A_5OA_9$. Заметим, что $\angle A_5OA_9 = 4\angle A_5OA_6 = 4 \cdot \frac{360°}{12} = 120°$. Значит, $S_{A_5OA_9} = \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin 120° = \frac{\sqrt{3}r^2}{4}$. По условию, $S_{A_5OA_9} = 3\sqrt{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{3}r^2 = 4 \cdot 3\sqrt{3}$, $r^2 = 12$. Применяя к $\triangle A_5OA_9$ теорему косинусов, получаем: $A_5A_9^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos 120° = 3r^2 = 36$, $A_5A_9 = 6$. *Ответ:* 6

$\boxed{25}$ Докажите, что высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC являются биссектрисами треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение.

Заметим, что $\angle BA_1C_1 = \angle A$ и $\angle CA_1B_1 = \angle A$ (доказательство этого см. в решении задачи №25 теста №57). Поэтому $\angle BA_1C_1 = \angle CA_1B_1$, см. рисунок.

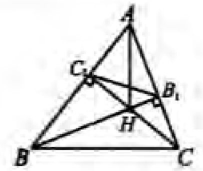


А поскольку $\angle AA_1C_1 = 90^\circ - \angle BA_1C_1$ и $\angle AA_1B_1 = 90^\circ - \angle CA_1B_1$, то из равенства $\angle BA_1C_1 = \angle CA_1B_1$ следует, что $\angle AA_1C_1 = \angle AA_1B_1$, т.е. AA_1 – биссектриса угла $B_1A_1C_1$, что и требовалось доказать.

Абсолютно аналогично доказывается, что BB_1 и CC_1 – биссектрисы углов $A_1B_1C_1$ и $A_1C_1B_1$ соответственно.

26 Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что отрезок AH короче стороны BC ровно в два раза. Найдите $\angle BAC$.

Решение.



Пусть BB_1, CC_1 – высоты данного в условии треугольника, $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$, см. рисунок. Воспользуемся следующим фактом: треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия, равным $|\cos\alpha|$ (см. задание №25 теста №57). Отсюда получаем, что

$$\frac{B_1C_1}{BC} = |\cos\alpha|,\ B_1C_1 = a\cdot|\cos\alpha|\ (1).$$

С другой стороны, по теореме синусов из треугольника AB_1C_1 имеем: $B_1C_1 = \sin\alpha\cdot 2R$, где R – радиус окружности, описанной вокруг треугольника AB_1C_1. Заметим, что $\angle AC_1H + \angle AB_1H = 180^\circ$, поэтому точки A, B_1, C_1, H лежат на одной окружности. А поскольку $\angle AC_1H = 90^\circ$, то AH – диаметр этой окружности, т.е. $AH = 2R$. Таким образом,

$B_1C_1 = \sin\alpha\cdot AH$ ($AH = \frac{1}{2}BC$ – по условию), $B_1C_1 = \sin\alpha\cdot\frac{a}{2}$ (2).

Приравнивая друг другу правые части равенств (1) и (2), получаем уравнение для нахождения α: $|\cos\alpha| = \frac{\sin\alpha}{2}$. Подставим в основное тригонометрическое тождество $\sin\alpha = 2|\cos\alpha|$: $\cos^2\alpha + 4\cos^2\alpha = 1$, $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Таким образом, $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$ (если угол α – острый) или $\alpha = \pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$ (если угол α – тупой).

§ 3. Геометрический тренинг

Определите, какие из приведённых ниже утверждений верны, а какие нет. Дайте обоснованный ответ.

1. Если катет и один из острых углов прямоугольного треугольника равны катету и углу другого прямоугольного треугольника, то эти треугольники равны.

2. Если два прямоугольных треугольника имеют равные площади и равные гипотенузы, то эти треугольники равны.

3. Если два угла четырёхугольника тупые, то другие два угла этого четырёхугольника — острые.

4. Выпуклый четырёхугольник имеет не более двух острых углов.

5. Если все углы одного параллелограмма равны углам другого параллелограмма, то такие параллелограммы подобны.

6. Если каждая из сторон одного параллелограмма ровно вдвое больше стороны другого, то такие параллелограммы подобны.

7. Если два прямоугольника подобны друг другу и площади этих прямоугольников равны, то эти прямоугольники равны.

8. Если удвоенная площадь треугольника равна произведению длин двух его сторон, то этот треугольник является прямоугольным.

9. Если площадь прямоугольника равна половине произведения его диагоналей, то этот прямоугольник является квадратом.

10. Если диагонали четырёхугольника перпендикулярны друг другу и равны, то этот четырёхугольник — квадрат.

11. Если параллелограмм имеет хотя бы одну ось симметрии, то он является ромбом.

12. Если у фигуры есть центр симметрии, то у неё есть и ось симметрии.

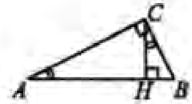
13. Если выпуклый многоугольник имеет и центр симметрии и ось симметрии, то этот многоугольник является правильным.

14. Если некоторая прямая делит пополам периметр правильного пятиугольника, то она проходит через его центр.

15. Если некоторая прямая делит пополам периметр правильного шестиугольника, то она проходит через его центр.

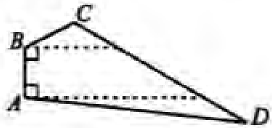
Ответы и краткие решения

1. Нет. На рисунке справа приведён контрпример: у прямоугольных треугольников ACH и BCH катет CH является общим, а угол CAH равен углу BCH, но очевидно, что эти треугольники не равны.

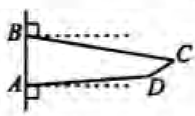


2. Верно. См. решение задачи 25 теста №23 на стр.73.

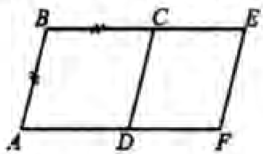
3. Нет. См. контрпример на рисунке справа: в четырёхугольнике $ABCD$ углы A, B, C тупые.



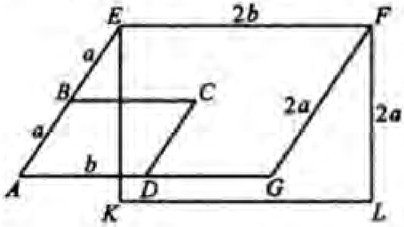
4. Нет. См. контрпример на рисунке справа: в четырёхугольнике $ABCD$ углы A, B, C острые.



5. Нет. См контрпример на данном ниже рисунке: у параллелограммов $ABCD$ и $ABEF$ все углы равны, но параллелограмм $ABEF$ не может быть получен растяжением в несколько раз параллелограмма $ABCD$, поскольку у параллелограмма $ABCD$ все стороны равны, а у $ABEF$ – нет.



6. Нет. См контрпример на данном ниже рисунке: параллелограмм $AEFG$ получен гомотетией параллелограмма $ABCD$ с коэффициентом 2 и центром гомотетии в точке A, а прямоугольник $EFLK$ построен на отрезке EF так, что $FL = FG$. Очевидно, что $FL = 2AB$, $EF = 2AD$, но параллелограмм $EFLK$ не может быть получен растяжением (гомотетией) параллелограмма $ABCD$, поскольку $EFLK$ – прямоугольник, а у параллелограмма $ABCD$ два угла острые, а два – тупые.



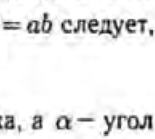
7. Верно. Если x, y – длины сторон прямоугольника $ABCD$, а x_1, y_1 – длины сторон прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$, который подобен прямоугольнику $ABCD$ с коэффициентом подобия, равным k, то $x_1 = kx$, $y_1 = ky$.

Тогда из равенства площадей прямоугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ имеем: $xy = x_1y_1 = k^2xy$. Отсюда получаем, что $k = 1$, т.е. прямоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны.

8. Верно. Пусть a, b – длины двух сторон треугольника, причём $ab = 2S$, где S – площадь треугольника, а γ – градусная мера угла, заключённого между этими сторонами. Так как по формуле площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$, то $2S = ab \cdot \sin\gamma$. Поэтому из равенства $2S = ab$ следует, что $\sin\gamma = 1$ и, значит, $\gamma = 90°$.

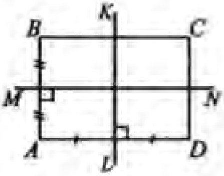
9. Верно. Пусть d_1, d_2 – длины диагоналей прямоугольника, а α – угол между ними. Тогда по известной формуле площади четырёхугольника имеем: $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \cdot \sin\alpha$. Поэтому из равенства $S = \frac{1}{2}d_1d_2$ следует, что $\sin\alpha = 1$, $\alpha = 90°$. Но если диагонали прямоугольника перпендикулярны, то соседние стороны такого прямоугольника равны, т.е. он является квадратом.

10. Нет. Из равенства длин отрезков AC, BD и перпендикулярности этих отрезков друг другу вовсе не следует, что четырёхугольник $ABCD$ – квадрат. Один из возможных контрпримеров см. на рисунке справа.



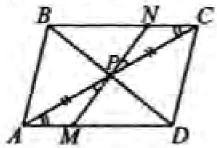
11. Нет. Любой прямоугольник (а прямоугольник – это частный случай параллелограмма) имеет как минимум две оси симметрии, см. рисунок, на

котором изображён прямоугольник $ABCD$ и его оси симметрии – прямые MN и KL. Ромбом этот прямоугольник $ABCD$ не является. Таким образом, из того, что параллелограмм имеет ось симметрии, ещё не следует, что этот параллелограмм является ромбом (верным будет следующее утверждение – если параллелограмм имеет ось симметрии, то он является либо прямоугольником, либо ромбом).



12. Нет. Любой параллелограмм, не являющийся ни прямоугольником ни ромбом, представляет собой пример фигуры, у которой есть центр симметрии, но нет ни одной оси симметрии.

Легко доказать, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии, см. на данном ниже рисунке иллюстрацию этого факта.



На стороне AD паралеллограмма $ABCD$ взята точка M и через точку P (точку пересечения диагоналей) проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке N. Т.к. треугольники APM и CPN равны, то $PM = PN$, т.е. точки M и N симметричны относительно точки P.

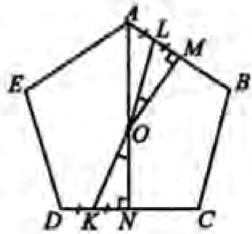
Наглядно видно, что ни одной оси симметрии параллелограмм $ABCD$, изображённый на рисунке, не имеет.

В качестве упражнения докажите, что если параллелограмм имеет ось симметрии, то он является прямоугольником или ромбом.

Указание. Воспользуйтесь тем, что если прямая MN является осью симметрии паралеллограмма $ABCD$, то при симметрии относительно прямой MN вершина A переходит в одну из вершин B, C, D или остаётся на месте (переходит сама в себя). Покажите, что если вершина A переходит в вершину B или вершину D, то паралеллограмм $ABCD$ является прямоугольником, а если вершина A переходит в вершину C или остаётся на месте, то $ABCD$ – ромб.

13. Нет. Контрпримером служит любой ромб, отличный от квадрата. У любого ромба есть и центр симметрии и ось симметрии, но правильным четырёхугольником (по определению) является только квадрат.

14. Нет. См. контрпример на рисунке справа: $ABCDE$ – правильный пятиугольник, точки M и N – середины сторон AB и CD, точки L и K – середины отрезков AM и DN.



Прямая KL делит периметр пятиугольника пополам: если a – длина стороны пятиугольника, то $AE + DE + AL + DK = 2{,}5a$ – половина периметра пятиугольника.

Докажем (методом от противного), что прямая KL не проходит через центр пятиугольника – точку O. Если предположить, что прямая KL проходит через точку O, то получим, что $\angle AOL = \angle NOK$ – как вертикальные углы. Но в силу равенства треугольников NOK и MOL имеем: $\angle NOK = \angle MOL$. Из равенств $\angle AOL = \angle NOK = \angle MOL$, следует, что отрезок OL является биссектрисой угла AOM. А по построению, OL – это медиана треугольника AOM. Если OL является одновременно биссектрисой и медианой, то треугольник AOM равнобедренный, $AO = OM$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что на самом деле прямая KL не проходит через точку O.

15. Верно. Докажем, что если некоторая прямая делит пополам периметр правильного шестиугольника, то она проходит через его центр. Обозначим вершины данного шестиугольника точками A, B, C, D, E, F, а точки пересечения этого шестиугольника с данной прямой через K и L, причём так, чтобы точка K лежала на стороне AB. Пусть $AB = a$ и пусть $AK = x$. Тогда из равенства $AK + AF + FE + EL = 3a$, равносильного тому, что прямая KL делит периметр шестиугольника пополам, следует, что точка L лежит на стороне DE, причём $EL = a - x$, см. данный ниже рисунок 1.

рис. 1

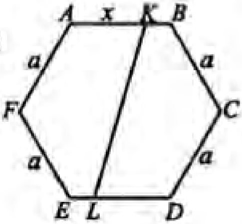
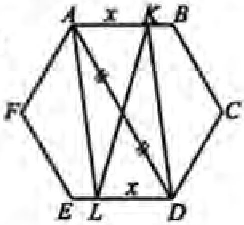


рис. 2



Из равенства $EL = a - x$ следует, что $DL = x$, т.е. $DL = AK$. Поэтому четырёхугольник $AKDL$ – паралллелограмм, см. рисунок 2, и его диагонали AD и KL точкой пересечения делятся пополам. Осталось заметить, что поскольку середина отрезка AD является центром шестиугольника $ABCDEF$, то прямая KL, пересекающая отрезок AD точно посередине, проходит через этот центр, ч.т.д.

Примечание. Несложно заметить, что результат задач №15 и №14 можно обобщить для правильного многоугольника с произвольным числом сторон следующим образом: если некоторая прямая делит пополам периметр правильного N-угольника и число N чётно, то такая прямая обязательно проходит через центр данного N-угольника, а если число N нечётно, то этого утверждать нельзя. (Доказательство требуемого утверждения для многоугольника с чётным числом сторон при любом $N \geqslant 4$ и построение контрпримера для многоугольника с нечётным числом сторон при любом $N \geqslant 3$ проводятся абсолютно аналогично решению задач №15 и №14.)

Для заметок

Издательство «Афина»
Ростов-на-Дону
тел.: (863) 247-57-55
www.afina-r.ru

«Народное образование»
тел./факс: (495) 345-52-00
www.narobraz.ru
www.народное-образование.рф

Индекс по каталогу агентства «Роспечать»:
47257, 81352, 82351

ISBN – 978-5-87953-414-6