



Задание 1 (1 балл)

Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Задание 2 (1 балл)

Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

Задание 3 (1 балл)

Числовая функция f такова, что для любых x и y выполняется равенство

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2018xy.$$

Найдите $f(1)$, если $f(0, 25) = 2$.

Задание 4 (1 балл)

Найдите прямолинейные образующие однополостного гиперболоида $x^2 + 9y^2 - z^2 = 9$, проходящие через точку $M(3; \frac{1}{3}; -1)$.

Задание 5 (1 балл)

Вычислите $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5 - 4x}}$

Задание 6 (1 балл)

В выпуклом десятиугольнике независимо друг от друга выбраны две случайные диагонали. Найдите вероятность того, что эти диагонали пересекаются внутри десятиугольника (внутри – то есть не в вершине).

Задание 7 (1 балл)

Для целого n вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx$

Задание 8 (2 балла)

Найдите наибольшее действительное число z , удовлетворяющее условиям $x + y + z = 7$ и $xy + yz + zx = 11$.

Задание 9 (2 балла)

Для некоторой функции f функция $\frac{f(x)}{x}$ невозрастающая на луче $(0; +\infty)$. Докажите, что для $a, b > 0$ верно:

$$f(a + b) \leq f(a) + f(b)$$

Задание 10 (2 балла)

Является ли число $\sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$ рациональным?

Задание 11 (3 балла)

Найдите вершины квадрата, если точки $K(1; 8)$, $L(2; -5)$, $M(0; -9)$, $N(0; 1)$ лежат на прямых, содержащих его соответственные стороны AB , BC , CD , DA .

Задание 12 (3 балла)

Пусть определитель матрицы A размера 2×2 равен 1. Составим новую матрицу

$$B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 2A & 5A \end{pmatrix}$$

размером 4×4 (элементы A умножаются на 2 и 5). Докажите, что определитель матрицы B равен 1.

Задание 13 (4 балла)

При игре в Школковобол используют квадратные ворота со стороной 1 м и мяч диаметром 20 см. В качестве защиты ворот используется вратарь – конструкция в виде буквы T , спаянная из куса проволоки нулевой толщины длиной 1 м и установленная вертикально на середине линии ворот. Мяч считается отраженным, если он задевает вратаря. Был произведен удар в случайное место ворот, при этом мяч не коснулся границы. Какова максимальная вероятность отразить удар?

Задание 14 (4 балла)

Хорда параболы, совпадающая с нормалью, отсекает сегмент минимальной площади. Найдите угол, который она образует с осью параболы.

Задача 15 (3 балла)

а) Решите уравнение

$$\sqrt{2} \left(x^3 + \frac{1}{x^3} + 7x + \frac{7}{x^2} \right) = 49 + 7x^2 + \frac{7}{x} + x + \frac{2}{x}$$

б) Укажите наибольший корень данного уравнения.

Задача 16 (3 балла)

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, K – такая точка на отрезке $A_1 C_1$, что $A_1 C_1 : KC_1 = 4 : 1$. Диагонали куба пересекаются в точке Q .

а) Докажите, что прямые BK и CQ скрещиваются.

б) Найдите расстояние между прямыми BK и CQ , если ребро куба равно $\sqrt{74}$.

Задача 17 (3 балла)

Решите неравенство

$$3^{x-1} \cdot \log_3 x^3 - 3 \cdot x^{\frac{x}{\log_3 x}} \geq 6 \log_3 \left(\frac{x}{27} \right)$$

Задача 18 (4 балла)

В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK , BL , CM . Угол между биссектрисами AK и CM равен 30° .

а) Докажите, что треугольник KLM прямоугольный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM , если известно, что $AB = 3$, $BC = 5$.

Задача 19 (4 балла)

Гарри Поттер вылетает на метле из точки A и движется по прямой. Одновременно с этим из точки B , находящейся на расстоянии 1 км от точки A , перпендикулярно линии движения Гарри вылетает дементор, который также движется прямолинейно (см. рис). Известно, что скорость движения Гарри



Поттера равна 2 км/мин, а скорость движения дементора равна 1 км/мин. Гарри хочет поразить дементора заклинанием “Экспекто патронум”. Дементор считается пораженным, если патронус находится с ним в одной точке. Гарри, пользуясь своими магическими навыками, может рассчитывать направление движения патронуса так, чтобы в какой-то момент времени патронус и дементор оказались в одной точке. Через какое наименьшее время после вылета Гарри дементор может быть поражен? Считать, что патронус движется прямолинейно со скоростью 2 км/мин.

Задача 20 (5 баллов)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$a^{2x} \cdot \log_a x - 3a^{2x} + 6a^x - a^x \cdot \log_a^2 x + a^x \cdot \log_a x + 2\log_a^2 x - 6\log_a x \leq 0$$

имеет ровно 2018 целых решений.

Задача 21 (5 баллов)

Дан квадратичный трехчлен $f(x)$ и число a . Дана последовательность:

$$a, f(a), f(f(a)), \dots, \underbrace{f(f(\dots(f(a))\dots))}_{n \text{ раз}}$$

- а) Может ли при $n = 2$ последовательность быть непостоянной геометрической прогрессией?
- б) Может ли при $n = 2$ и $f(x) = bx^2 + c$ последовательность быть непостоянной геометрической прогрессией со знаменателем $q > 0$?
- в) При каком наибольшем n последовательность может быть непостоянной геометрической прогрессией со знаменателем $q > 0$?