а) Решите уравнение $1+\log_3\left(x^4+16\right)=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{21x^2+18}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right]$.

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax+\sqrt{-27-12x-x^2}=7a+3$$

имеет единственный корень.

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 200 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите r, если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причём в первый год будет выплачено 130 000 рублей, а во второй год — 150 000 рублей.

а) Решите уравнение

$$27^x-2\cdot 9^x-3^x+2=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0{,}5\,;\ 2]$.

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t ($t=1;\ 2;\ \ldots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1+r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы
в конце двадцатого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце девятого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2-4x}=a-3\left|x\right|$$

имеет более двух корней.

Костя должен был умножить трёхзначное число на четырёхзначное число (числа с нуля начинаться не могут). Вместо этого он просто приписал четырёхзначное число справа к трёхзначному, получив семизначное число, которое оказалось в N раз (N — натуральное число) больше правильного результата.

а) Могло ли N равняться 2?

б) Могло ли N равняться 10?

в) Каково наибольшее возможное значение N?

Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.
В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2\,t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5\,t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей.

Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Решите неравенство $\dfrac{1}{5^x+31} \leq \dfrac{4}{5^{x+1}-1}$.

Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-5)^2+(y-4)^2=9, \\ (x+2)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2-|x+2+a|=|x-a-2|-(a+2)^2$$

имеет единственный корень.

Решите неравенство $\dfrac{3^x-1}{3^x-3} \leq 1+\dfrac{1}{3^x-2}$.

15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\,\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

а) Решите уравнение

$$\sin 2x+\sqrt{2}\sin x=2\cos x+\sqrt{2}$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\,\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

а) Решите уравнение $(27^{\cos x})^{\sin x} = 3^{\frac{3\cos x}{2}}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

В ряд выписаны числа: 1^2, 2^2, ..., $(N-1)^2$, N^2. Между ними произвольным образом расставляют знаки «$+$» и «$-$» и находят получившуюся сумму. Может ли такая сумма равняться:

а) 12, если $N=12$?

б) 0, если $N=70$?

в) 0, если $N=48$?

г) -3, если $N=90$?

Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x \le 2a+6, \\ 6x \ge x^2+a^2, \\ x+a>0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[1;\ 2]$.

В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC на продолжение боковой стороны BC опущена высота AH. Из точки H на сторону AB и основание AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что отрезки AM и MK равны.

б) Найдите MK, если $AB=5$, $AC=8$.

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые BH и ED параллельны.

б) Найдите отношение BH к ED, если $\angle BCD = 120^\circ$.

В треугольнике ABC угол ABC равен 60°. Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AC в точке M.

а) Докажите, что отрезок BM не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.

б) Найдите $\sin \angle BMC$, если известно, что отрезок BM в 2,5 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = 30^\circ$.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC = 9$.

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3 + x^2 - 9a^2x - 2x + a}{x^3 - 9a^2x} = 1$$

имеет ровно один корень.

а) Решите уравнение $\dfrac{4^{\sin 2x} - 2^{2\sqrt{3}\sin x}}{\sqrt{7\sin x}} = 0$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{13\pi}{2}; -5\pi\right]$.

Решите неравенство $\dfrac{\log_2(8x)\cdot\log_3(27x)}{x^2 - |x|} \le 0$.

а) Решите уравнение $\dfrac{\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x)}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t ($t = 1;\ 2;\ \ldots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться на 25%.
В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счёте была наибольшей?

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 7 млн рублей на срок
10 лет. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем.

Найдите наименьшую возможную ставку r, если известно, что последний платёж будет не менее 0,819 млн рублей.

Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\frac{4a}{a\quad 6}\cdot 3^{|x|} = 9^{|x|} + \frac{3a+4}{a\quad 6}$$

имеет ровно два различных корня.

а) Решите уравнение $25^{x-\frac{3}{2}} - 12 \cdot 5^{x-2} + 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(2;\ \frac{8}{3}\right)$.

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на r % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58 564 рубля, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 рубля, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r.