**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 . 

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

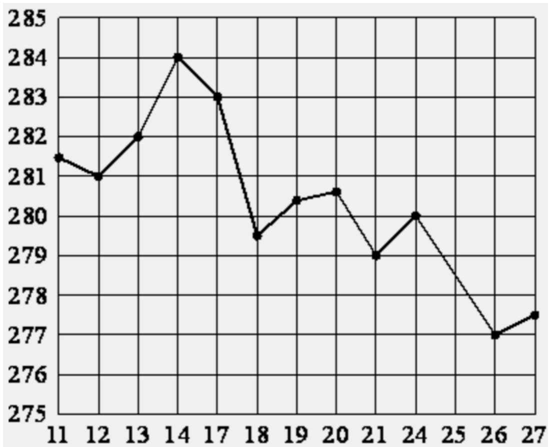
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В школе 400 учеников, из них 30% – ученики начальной школы. Среди учеников средней и старшей школы 15% изучают французский язык. Сколько учеников в школе изучает французский язык, если в начальной школе французский язык не изучается?

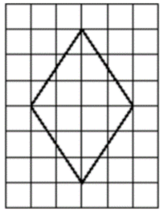
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показана цена унции золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 11 по 27 июля 2000 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена унции золота на момент закрытия торгов была наибольшей за указанный период.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите его площадь.



Ответ: ___________________________.

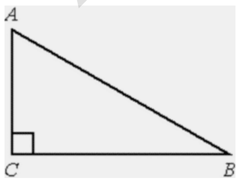
4 В фирме такси в наличии 60 легковых автомобилей; 27 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на боках, остальные – жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения
$(6x-13)^2=(6x-11)^2$.

Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB=15$, $BC=9$. Найдите $\cos A$.

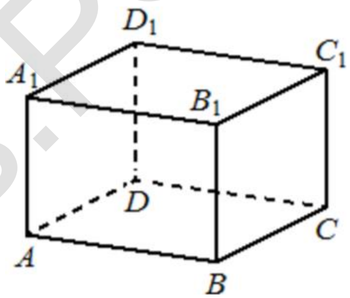


Ответ: ___________________________.

7 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{2}t^2+4t+27$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=2$ с.

Ответ: ___________________________.

8 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB=5$, $BC=4$, $AA_1=3$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A_1, B_1.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения
$\frac{-6\sin 374°}{\sin 14°}$.

Ответ: ___________________________.

10 Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $v = 2$ моля воздуха объёмом $V_1 = 10$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле
$A = \alpha v T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$, где $\alpha = 13{,}3 \ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ – постоянная, а $T = 300$ К – температура воздуха. Найдите, какой объём V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии воздуха была совершена работа в 15960 Дж.

Ответ: ___________________________.

11 Заказ на изготовление 154 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час изготавливает второй рабочий, если известно, что первый за час изготавливает на 3 детали больше?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции
$y = \ln(x+6)^3 - 3x$ на отрезке $[-5{,}5; 0]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение
$\sqrt{2}\sin^3 x - \sin^2 x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0.$
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку
$\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

15 Решите неравенство
$\log_3^2(x^2-16) - 5\log_3(x^2-16) + 6 \geq 0.$

16 Две окружности касаются внутренним образом в точке K, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C. Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L.

а) Докажите, что $CN : CM = LB : LA$.
б) Найдите MN, если $LB : LA = 2 : 3$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S **– целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	$0{,}2S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором общая сумма выплат будет больше 10 млн рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3+x^2-9a^2x-2x+a}{x^3-9a^2x}=1$$

имеет ровно один корень.

19 Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a>b>c>d$.

а) Найдите числа a, b, c и d, если $a+b+c+d=19$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=25$.
б) Может ли быть $a+b+c+d=27$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=27$?
в) Пусть $a+b+c+d=1800$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=1800$. Найдите количество возможных решений числа a.

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	6 лет репетиторской деятельности
Регалии:	Основатель и руководитель проекта Школа Пифагора
Аккаунт ВК:	https://vk.com/eugene10
Сайт и доп. информация:	https://youtube.com/ШколаПифагора

Система оценивания
Ответы к заданиям 1-19

Каждое из заданий 1–12 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

Верно выполненные задания 13-15 максимум оцениваются в 2 балла, задания 16-17 – в 3 балла, а задания 18-19 – в 4 балла.

№ задания	Ответ
1	42
2	14
3	12
4	0,55
5	2
6	0,8
7	6
8	30
9	-6
10	2,5
11	11
12	15
13	а) $\frac{\pi}{4}+2\pi n, \frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ n\in Z.$ б) $\frac{9\pi}{4}$
14	44
15	$(-\infty;-\sqrt{43}]\cup[-5;-4)\cup(4;5]\cup[\sqrt{43};+\infty)$
16	$\frac{115}{6}$
17	7
18	$\left\{-\frac{7}{9};0;\frac{5}{9};1\right\}$
19	а) $a=7, b=6, c=4$ и $d=2$, б) нет, в) 448

Решения и критерии оценивания заданий 13–19

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.
Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.
Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение
$\sqrt{2}\sin^3 x-\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x-1=0.$
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку
$\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right].$

.

Решение:
а)
$\sin^2 x\cdot(\sqrt{2}\sin x-1)+(\sqrt{2}\sin x-1)=0$
$(\sqrt{2}\sin x-1)\cdot(\sin^2 x+1)=0$

$\sqrt{2}\sin x-1=0$ $\sqrt{2}\sin x=1$ $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ n\in Z$ $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ n\in Z$	$\sin^2 x+1=0$ $\sin^2 x=-1$ Нет решений

б)
Подберём корни для $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$
Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{4} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$
Если $n = 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4} \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$
Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{17\pi}{4} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Подберём корни для $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$
Если $n = 0$, то $x = \frac{3\pi}{4} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$
Если $n = 1$, то $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4} \notin \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

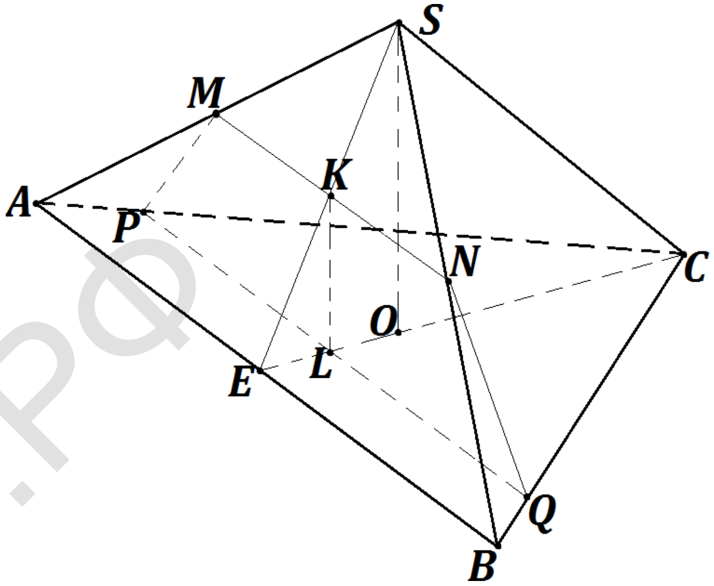
Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ n \in Z$. б) $\frac{9\pi}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C.
б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.
.

Решение:
а)



Пусть O — центр основания пирамиды
Рассмотрим $\triangle ABS$ — равнобедренный:
Проведём медиану SE, являющуюся ещё и биссектрисой и высотой
Пусть $(SEC) \cap MN = K$
Построим прямую KL такую, что $KL \parallel SO$
Построим прямую PQ через точку L такую, что $PQ \parallel AB$
Построим прямую NQ, т.к. точки N и Q лежат в одной плоскости
Построим прямую PM, т.к. точки P и M лежат в одной плоскости
$MNQP$ — сечение пирамиды плоскостью α

Рассмотрим $\triangle SOE$ — прямоугольный:
Т.к. K — середина SE и $KL \parallel SO$, то KL — средняя линия $\triangle SOE$
$=> L$ — середина OE
Пусть $EL = OL = x$
Т.к. CE — медиана в $\triangle ABC$, то:
$$\frac{OC}{OE} = 2:1$$
$=> OC = 2 \cdot OE = 2 \cdot (EL + OL) = 2 \cdot (x + x) = 4x$

$$=> \frac{CL}{LE} = \frac{OC + OL}{LE} = \frac{4x + x}{x} = 5:1$$

■

б)
Найдём основания и высоту трапеции $MNQP$:

$MN = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (т.к. MN – средняя линия $\triangle ABS$)

$PQ = \frac{5}{6} \cdot AB = \frac{5}{6} \cdot 12 = 10$ (т.к. $\frac{CL}{LE} = 5:1$)

$OC = \frac{2}{3} \cdot CE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{12}{\sqrt{3}}$

$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{13^2 - \left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^2} = 11$ (по теореме Пифагора)

$KL = \frac{1}{2} \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 11 = 5{,}5$ (т.к. KL – средняя линия $\triangle SOE$)

$S = \frac{MN + PQ}{2} \cdot KL = \frac{6 + 10}{2} \cdot 5{,}5 = 44$

Ответ: б) 44

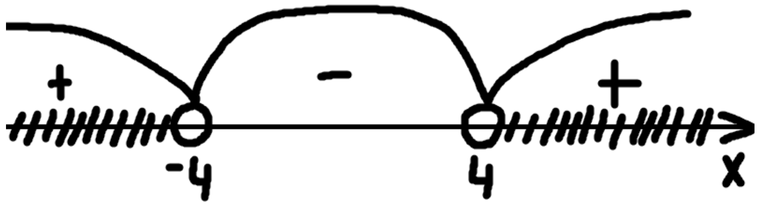
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ в обоих пунктах	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$\log_3^2(x^2 - 16) - 5\log_3(x^2 - 16) + 6 \geq 0.$

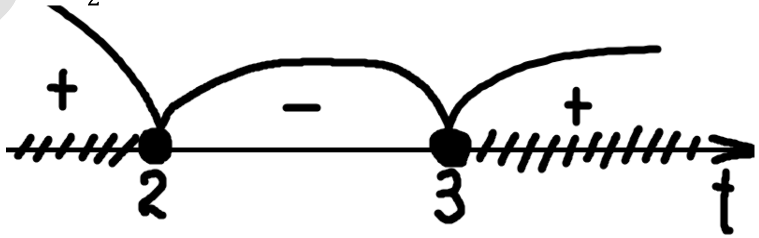
Решение:

ОДЗ:
$x^2 - 16 > 0$
$(x - 4)(x + 4) > 0$
$(x - 4)(x + 4) = 0$
$x = 4$
$x = -4$



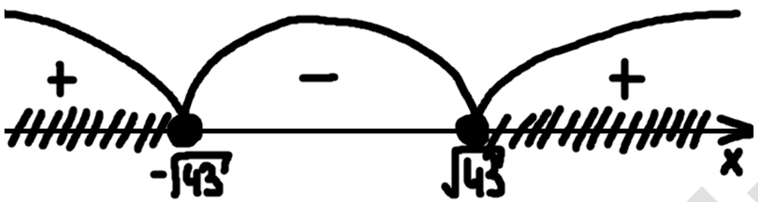
Пусть $\log_3(x^2 - 16) = t$

$t^2 - 5t + 6 \geq 0$
$t^2 - 5t + 6 = 0$
$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$
$t_1 = \frac{5 + 1}{2} = 3$
$t_2 = \frac{5 - 1}{2} = 2$



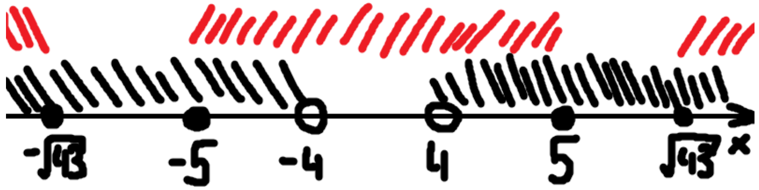
1.
$t \leq 2$
$\log_3(x^2 - 16) \leq 2$
$\log_3(x^2 - 16) \leq \log_3 9$
$x^2 - 16 \leq 9$
$x^2 - 25 \leq 0$
$(x - 5)(x + 5) \leq 0$
$(x - 5)(x + 5) = 0$
$x = 5$
$x = -5$

2.
$t \geq 3$
$\log_3(x^2-16) \geq 3$
$\log_3(x^2-16) \geq \log_3 27$
$x^2-16 \geq 27$
$x^2-43 \geq 0$
$(x-\sqrt{43})(x+\sqrt{43}) \geq 0$
$(x-\sqrt{43})(x+\sqrt{43}) = 0$
$x = \sqrt{43}$
$x = -\sqrt{43}$



3.
ОДЗ:
$x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$

Объединим все найденные корни и промежутки на числовой прямой



Ответ: $(-\infty; -\sqrt{43}] \cup [-5; -4) \cup (4; 5] \cup [\sqrt{43}; +\infty)$

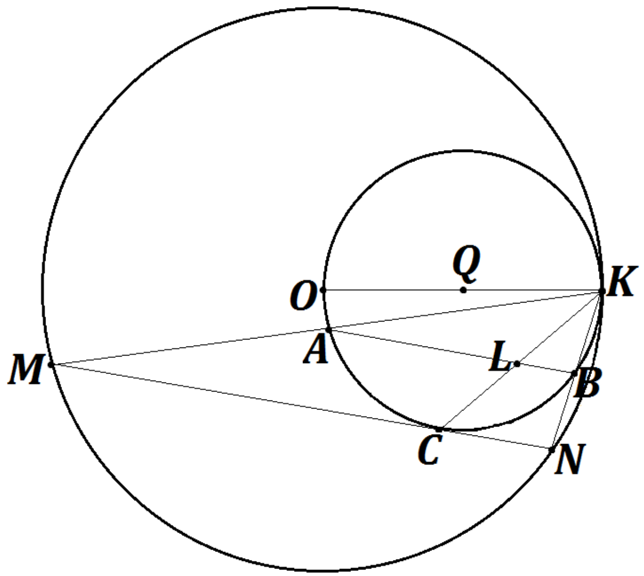
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Две окружности касаются внутренним образом в точке K, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда MN большей окружности касается меньшей в точке C. Хорды KM и KN пересекают меньшую окружность в точках A и B соответственно, а отрезки KC и AB пересекаются в точке L.

а) Докажите, что $CN : CM = LB : LA$.
б) Найдите MN, если $LB : LA = 2 : 3$, а радиус малой окружности равен $\sqrt{23}$.

Решение:
а)

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180225



Пусть
O — центр большей окружности
Q — центр меньшей окружности

KO — диаметр меньшей окружности

Рассмотрим $\triangle MOK$
$MO = KO$
(т.к. это радиусы большей окружности)
=>
$\triangle MOK$ — равнобедренный
$\angle OAK = 90°$
(т.к. это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности)
=>
OA — высота $\triangle MOK$
=>
OA — медиана $\triangle MOK$
(по свойству равнобедренного треугольника)
=>
$AM = AK$

Аналогично

Рассмотрим $\triangle ONK$
$ON = OK$
(т.к. это радиусы большей окружности)
=>
$\triangle ONK$ — равнобедренный
$\angle OBK = 90°$
(т.к. это вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности)
=>
OB — высота $\triangle ONK$
=>
OB — медиана $\triangle ONK$
(по свойству равнобедренного треугольника)
=>
$BN = BK$

=>
A — середина MK
B — середина KN
=>
AB — средняя линия $\triangle MNK$

$LB \parallel CN$ (т.к. $AB \parallel MN$)
$BN = BK$
=>
LB — средняя линия $\triangle CNK$

$LA \parallel CM$ (т.к. $AB \parallel MN$)
$AM = AK$
=>
LA — средняя линия $\triangle CMK$

$\triangle BLK \sim \triangle CNK$ по двум углам
=>
$$\frac{CN}{LB} = \frac{CK}{LK}$$

$\triangle ALK \sim \triangle CMK$ по двум углам
=>
$$\frac{CM}{LA} = \frac{CK}{LK}$$

=>

$\frac{CN}{LB} = \frac{CM}{LA} \quad \Big|: CM$

$\frac{CN}{LB \cdot CM} = \frac{1}{LA} \quad \Big| \cdot LB$

$\frac{CN}{CM} = \frac{LB}{LA}$

■

б)
$OQ = \sqrt{23}$
=>
$KO = 2\sqrt{23}$

Пусть
$LB = 2x$
$LA = 3x$

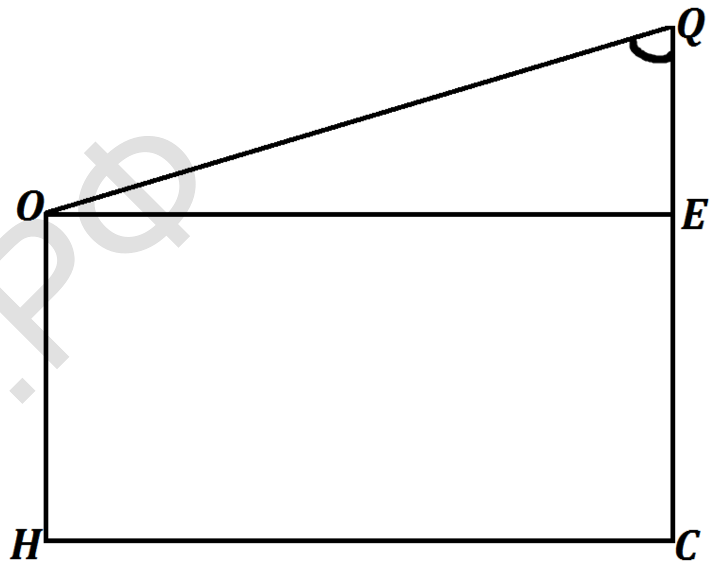
Тогда
$CN = 2LB = 4x$
$CM = 2LA = 6x$
$MN = CN + CM = 10x$

Опустим перпендикуляр OH на прямую MN
Рассмотрим $\triangle\, OMN$
$OM = ON$
(т.к. это радиусы большей окружности)
=>
$\triangle\, OMN$ — равнобедренный
=>
OH — высота, медиана и биссектриса $\triangle\, OMN$
=>

$MH = \frac{1}{2} \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 10x = 5x$

$OH = \sqrt{OM^2 - MH^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{23}\right)^2 - (5x)^2} = \sqrt{92 - 25x^2}$ (по теореме Пифагора)

Рассмотрим четырёхугольник $OQCH$:
$OH \perp MN$
$CQ \perp MN$
=>
$OH \parallel CQ$
=>
$OQCH$ — прямоугольная трапеция
Опустим перпендикуляр OE на прямую OC



$QE = CQ - CE = CQ - OH = \sqrt{23} - \sqrt{92 - 25x^2}$
$OE = CH = NH - CN = 5x - 4x = x$
$OQ = \sqrt{23}$

По теореме Пифагора из $\triangle\, OQE$:

$OQ^2 = OE^2 + QE^2$
$\sqrt{23}^2 = x^2 + \left(\sqrt{23} - \sqrt{92 - 25x^2}\right)^2$
$23 = x^2 + 23 - 2\sqrt{2116 - 575x^2} + 92 - 25x^2$
$2\sqrt{2116 - 575x^2} = 92 - 24x^2$
$\sqrt{2116 - 575x^2} = 46 - 12x^2 \quad \Big|^2$
$2116 - 575x^2 = 2116 - 1104x^2 + 144x^4$
$144x^4 - 529x^2 = 0$
$x^2(144x^2 - 529) = 0$

$x^2 = 0$	$144x^2 - 529 = 0$

$x = 0$ (посторонний корень)	$144x^2 = 529$ $x^2 = \frac{529}{144}$ $x = \frac{23}{12}$ $x = -\frac{23}{12}$ (посторонний корень)

$$x = \frac{23}{12}$$

$$MN = 10x = 10 \cdot \frac{23}{12} = \frac{230}{12} = \frac{115}{6}$$

Ответ: $\frac{115}{6}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	$0{,}2S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором общая сумма выплат будет больше 10 млн рублей.
.

Решение:
Пусть
1 января – день начисления процентов
1 апреля – день выплаты части долга

Составим таблицу как изменялась сумма долга:

Число	Сумма долга
01.07.2016	S

2017 год

01.01.2017	$\left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot S = 1{,}2 \cdot S$
01.04.2017	
01.07.2017	$0{,}7 \cdot S$

=>

01.04.2017	$1{,}2 \cdot S - 0{,}7 \cdot S = 0{,}5 \cdot S$

2018 год

01.01.2018	$1{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot S = 0{,}84 \cdot S$

01.04.2018	
01.07.2018	$0{,}4 \cdot S$

=>

01.04.2018	$0{,}84 \cdot S - 0{,}4 \cdot S = 0{,}44 \cdot S$

2019 год

01.01.2019	$1{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot S = 0{,}48 \cdot S$
01.04.2019	
01.07.2019	$0{,}2 \cdot S$

=>

01.04.2019	$0{,}48 \cdot S - 0{,}2 \cdot S = 0{,}28 \cdot S$

20209 год

01.01.2020	$1{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot S = 0{,}24 \cdot S$
01.04.2020	
01.07.2020	0

=>

01.04.2020	$0{,}24 \cdot S - 0 = 0{,}24 \cdot S$

Общая сумма выплат должна быть больше 10 млн рублей (по условию)

=>

$0{,}5 \cdot S + 0{,}44 \cdot S + 0{,}28 \cdot S + 0{,}24 \cdot S > 10$ млн

$1{,}46 \cdot S > 10$

$S > \frac{1000}{146}$

$S > \frac{500}{73}$

$S > 6\frac{62}{73}$

Требуется найти наименьшее подходящее целое S

=>

$S = 7$

Ответ: 7

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3 + x^2 - 9a^2x - 2x + a}{x^3 - 9a^2x} = 1$$

имеет ровно один корень.

Решение:

$$\frac{x^3 + x^2 - 9a^2x - 2x + a}{x^3 - 9a^2x} - 1 = 0$$

$$\frac{x^3 + x^2 - 9a^2x - 2x + a - x^3 + 9a^2x}{x^3 - 9a^2x} = 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + a}{x^3 - 9a^2x} = 0$$

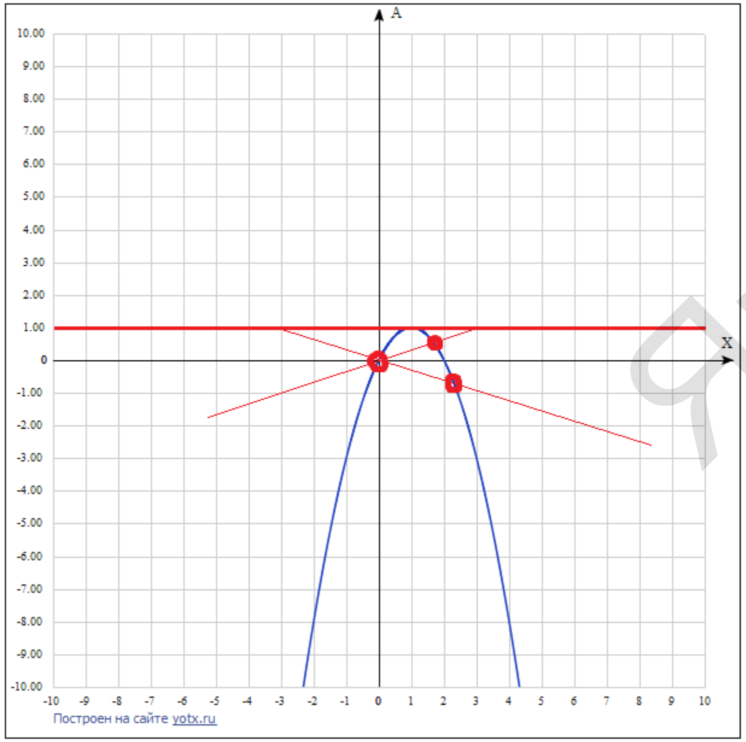
$$\begin{cases} x^2 - 2x + a = 0 \\ x^3 - 9a^2x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -x^2 + 2x \\ x(x^2 - 9a^2) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -x^2 + 2x \\ x(x - 3a)(x + 3a) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -x^2 + 2x \\ x \neq 0 \\ a \neq \dfrac{1}{3}x \\ a \neq -\dfrac{1}{3}x \end{cases}$$

Решим систему графически в системе координат xOa



Графиком функции $a = -x^2 + 2x$ является парабола, ветви вниз

$x_0 = \dfrac{-2}{-2} = 1$

$y_0 = -1^2 + 2 \cdot 1 = 1$

Найдём значение параметра a при пересечении прямой $a = \frac{1}{3}x$ и параболы:

$-x^2 + 2x = \dfrac{1}{3}x$

$-x^2 + \dfrac{5}{3}x = 0$

$x\left(\dfrac{5}{3} - x\right) = 0$

$x = 0$

$x = \dfrac{5}{3}$

=>

$a = \dfrac{1}{3} \cdot 0 = 0$

$a = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{9}$

Найдём значение параметра a при пересечении прямой $a = -\frac{1}{3}x$ и параболы:

$-x^2 + 2x = -\dfrac{1}{3}x$

$-x^2 + \dfrac{7}{3}x = 0$

$x\left(\dfrac{7}{3} - x\right) = 0$

$x = 0$

$x = \dfrac{7}{3}$

=>

$a = -\dfrac{1}{3} \cdot 0 = 0$

$a = -\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{7}{3} = -\dfrac{7}{9}$

Одно решение уравнения $a = -x^2 + 2x$ будет при:

$a = 0$

$a = \frac{5}{9}$

$a = -\frac{7}{9}$

Также одно решение уравнения $a = -x^2 + 2x$ будет в вершине параболы
=>
$a = 1$

При $a > 1$ решений нет, во всех других случаях решений будет два

Ответ: $a \in \left\{-\frac{7}{9}; 0; \frac{5}{9}; 1\right\}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений а	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a > b > c > d$.

а) Найдите числа a, b, c и d, если $a + b + c + d = 19$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 25$.
б) Может ли быть $a + b + c + d = 27$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 27$?
в) Пусть $a + b + c + d = 1800$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1800$. Найдите количество возможных решений числа a.

Решение:

а)
Запишем два уравнения в систему:

$$-\begin{cases} a + b + c + d = 19 \\ a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 25 \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое

$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - a - b - c - d = 6$

$(a^2 - b^2) + (c^2 - d^2) - (a + b) - (c + d) = 6$

$(a - b)(a + b) + (c - d)(c + d) - (a + b) - (c + d) = 6$

$(a + b)(a - b - 1) + (c + d)(c - d - 1) = 6$

Выражения $(a - b - 1)$ и $(c - d - 1)$ не могут быть отрицательными, т.к. если бы они могли быть отрицательными, то a было бы равно b или a было бы меньше b, что противоречит условию
=>
$(a - b - 1) \geq 0$
$(c - d - 1) \geq 0$

Вернёмся к первому уравнению системы:
$(a + b) + (c + d) = 19$
$(a + b) \cdot 1 + (c + d) \cdot 1 = 19$

Теперь рассмотрим данное уравнение:
$(a + b)(a - b - 1) + (c + d)(c - d - 1) = 6$

Очевидно, что одно из выражений $(a - b - 1)$ и $(c - d - 1)$ равно нулю
=>

$a - b - 1 = 0$ $a = b + 1$ Тогда $(c + d)(c - d - 1) = 6$ Произведение каких натуральных чисел может дать 6? $\boxed{1}$ 6 и 1 $\begin{cases} c + d = 6 \\ c - d - 1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} c + d = 6 \\ c = d + 2 \end{cases}$	$c - d - 1 = 0$ $c = d + 1$ Тогда $(a + b)(a - b - 1) = 6$ Произведение каких натуральных чисел может дать 6? $\boxed{1}$ 6 и 1 $\begin{cases} a + b = 6 \\ a - b - 1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a + b = 6 \\ a = b + 2 \end{cases}$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 180225

$\begin{cases} d+2+d=6 \\ c=d+2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2d=4 \\ c=d+2 \end{cases}$

$\begin{cases} d=2 \\ c=4 \end{cases}$

Подставим в уравнение:
$(a+b)+(c+d)=19$
$(a+b)+6=19$
$a+b=13$
$a=7$
$b=6$
$c=4$
$d=2$

Подходящий пример найден, но разберём оставшиеся варианты

$\boxed{2}$ 3 и 2
$\begin{cases} c+d=3 \\ c-d-1=2 \end{cases}$

$\begin{cases} c+d=3 \\ c=d+3 \end{cases}$

$\begin{cases} d+3+d=3 \\ c=d+3 \end{cases}$

$\begin{cases} 2d=0 \\ c=d+3 \end{cases}$

$\begin{cases} d=0 \\ c=3 \end{cases}$
=>
$c+d\neq 3$
Т.к. c и d натуральные числа

$\begin{cases} b+2+b=6 \\ a=b+2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2b=4 \\ a=b+2 \end{cases}$

$\begin{cases} b=2 \\ a=4 \end{cases}$
=>
$a+b=6$

Но $a+b$ это сумма больших из четырёх слагаемых 19-ти
=>
$a+b\neq 6$
Т.к. $a+b>9{,}5$

$\boxed{2}$ 3 и 2
$\begin{cases} a+b=3 \\ a-b-1=2 \end{cases}$

$\begin{cases} a+b=3 \\ a=b+3 \end{cases}$

$\begin{cases} b+3+b=3 \\ a=b+3 \end{cases}$

$\begin{cases} 2b=0 \\ a=b+3 \end{cases}$

$\begin{cases} b=0 \\ a=3 \end{cases}$
=>
$a+b\neq 3$
Т.к. a и b натуральные числа

б)
Запишем два уравнения в систему:
$-\begin{cases} a+b+c+d=27 \\ a^2-b^2+c^2-d^2=27 \end{cases}$

Вычтем из второго уравнения первое

$a^2-b^2+c^2-d^2-a-b-c-d=0$

$(a^2-b^2)+(c^2-d^2)-(a+b)-(c+d)=0$

$(a-b)(a+b)+(c-d)(c+d)-(a+b)-(c+d)=0$

$(a+b)(a-b-1)+(c+d)(c-d-1)=0$

Мы знаем, что
$(a+b)\neq 0$
$(c+d)\neq 0$

=>
Выражения $(a-b-1)$ и $(c-d-1)$ должны быть равны нуля одновременно

$\begin{cases} a-b-1=0 \\ c-d-1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} a=b+1 \\ c=d+1 \end{cases}$

Подставим полученные выражения a и c в первое уравнение системы
$a+b+c+d=27$
$b+1+b+d+1+d=27$
$2b+2d=25 \quad |:2$
$b+d=12{,}5$
Т.к. b и d натуральные числа
=>
Не может

в)
Запишем два уравнения в систему:
$-\begin{cases} a+b+c+d=1800 \\ a^2-b^2+c^2-d^2=1800 \end{cases}$
Вычтем из второго уравнения первое

$a^2-b^2+c^2-d^2-a-b-c-d=0$

$(a^2-b^2)+(c^2-d^2)-(a+b)-(c+d)=0$

$(a-b)(a+b)+(c-d)(c+d)-(a+b)-(c+d)=0$

$(a+b)(a-b-1)+(c+d)(c-d-1)=0$

Мы знаем, что
$(a+b)\neq 0$
$(c+d)\neq 0$

=>
Выражения $(a-b-1)$ и $(c-d-1)$ должны быть равны нуля одновременно

$\begin{cases} a-b-1=0 \\ c-d-1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} a=b+1 \\ c=d+1 \end{cases}$

Подставим полученные выражения a и c в первое уравнение системы
$a+b+c+d=1800$
$b+1+b+d+1+d=1800$
$2b+2d=1798 \quad |:2$
$b+d=899$
=>
Из уравнения $a+b+c+d=1800$:
$a+c=901$
$c=901-a$

Из уравнения $c=d+1$:
$d=c-1=901-a-1=900-a$

Из уравнения $a=b+1$:
$b=a-1$

Получаем четвёрку чисел:
$(a;b;c;d)$

$(a;a-1;901-a;900-a)$

Из условия $a>b>c>d$ следует, что:

$\begin{cases} a>b \\ b>c \\ c>d \end{cases}$

$\begin{cases} a>a-1 \\ a-1>901-a \\ 901-a>900-a \end{cases}$

$\begin{cases} 0\cdot a>-1 \\ 2a>902 \\ 0\cdot a>-1 \end{cases}$

$\begin{cases} a - \text{любое} \\ a>451 \\ a - \text{любое} \end{cases}$
=>
$a>451$
=>
$a\geq 452$
Из условия натуральности a, b, c и d следует, что

$\begin{cases} a\geq 1 \\ b\geq 1 \\ c\geq 1 \\ d\geq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} a\geq 1 \\ a-1\geq 1 \\ 901-a\geq 1 \\ 900-a\geq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} a\geq 1 \\ a\geq 2 \\ a\leq 900 \\ a\leq 899 \end{cases}$

Итак
$452\leq a\leq 899$

452 453 ... 499 (99-51 = 48 чисел)
500 501 ... 599 (100 чисел)
600 601 ... 699 (100 чисел)
700 701 ... 799 (100 чисел)

$800 \quad 801 \quad ... \quad 899$ (100 чисел)

=>
a может принимать 448 значений

Ответ: а) $a = 7$, $b = 6$, $c = 4$ и $d = 2$, б) нет, в) 448

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: - обоснованное решение п. а; - обоснованное решение п. б; - искомая оценка в п. в; - пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4