Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут).

Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.
Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.
Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1–С6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны.
Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

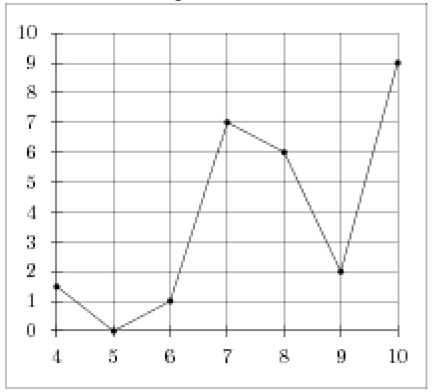
Вариант 1

Часть 1

Ответом на задания B1 – B14 должно быть некоторое целое число или конечная десятичная дробь

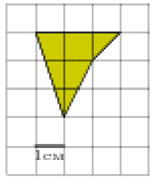
B1 На автозаправке клиент отдал кассиру 1500 рублей и попросил залить бензин до полного бака. Цена бензина 31 руб. 20 коп. за литр. Сдачи клиент получил 2 руб. 40 коп. Сколько литров бензина было залито в бак?

B2 На рисунке изображен график осадков в г.Калининграде с 4 по 10 февраля 1974 г. На оси абсцисс откладываются дни, на оси ординат — осадки в мм.



Определите по рисунку, сколько дней из данного периода выпадало не менее 1 мм осадков.

B3 Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



B4 В среднем гражданин А в дневное время расходует 100 кВт · ч электроэнергии в месяц, а в ночное время — 70 кВт · ч электроэнергии. Раньше у А в квартире был установлен однотарифный счетчик, и всю электроэнергию он оплачивал по тарифу 2,4 руб. за кВт · ч. Год назад А установил двухтарифный счётчик, при этом дневной расход электроэнергии оплачивается по тарифу 2,4 руб. за кВт · ч, а ночной расход оплачивается по тарифу 1,8 руб. за кВт · ч. В течение 12 месяцев режим потребления и тарифы оплаты электроэнергии не менялись. На сколько больше заплатил бы A за этот период, если бы не поменялся счетчик? Ответ дайте в рублях.

B5 Решите уравнение $\frac{2x+1}{5x+15}=\frac{7-x}{5x+15}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите сумму корней.

B6 В треугольнике ABC угол A равен $84°$, углы B и C — острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O. Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.

B7 Найдите значение выражения $0{,}2\cdot\sqrt{12}\cdot ctg\frac{5\pi}{4}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}$

B8 Прямая $y=-4x+1$ является касательной к графику функции $y=x^3+7x^2+7x+6$. Найдите абсциссу точки касания.

B9 Высота конуса равна 21, а образующая равна 35. Найдите диаметр основания конуса.

B10 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет менее 7 очков. Результат округлите до сотых.

B11 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 567 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 9 раз больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

B12 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q=150-10p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p)=pq$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит 260 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

B13 Из A в B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 60 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 18 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

B14 Найдите точку максимума функции $y=1+18x-\frac{8x^3}{3}$.

Часть 2

Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ

C1 а) Решите уравнение $2\cos 2x+8\sin x+3=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \pi\right]$.

C2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCT$ с вершиной M найдите расстояние от точки A до плоскости MCT, если $AT=6$, а $AM=BM=CM=TM=5$.

C3 Решите систему неравенств
$$\begin{cases}|x+1|-1\le\sqrt{8x^2-2x^3}\\ \dfrac{2^{6-\frac{5x}{2}}-2^{7-2x}-2^{-\frac{x}{2}-1}+1}{2-2^{2-\frac{x}{2}}}\ge 0\end{cases}$$

C4 В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, синус угла B равен $\frac{120}{169}$, а радиус описанной окружности равен 169. Найдите радиус вписанной окружности.

C5 Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|1-5\sqrt{x}\right|=3(x+a)$ имеет ровно два корня.

C6 В течение четверти учитель ставил школьникам отметки «1», «2», «3», «4» и «5». Среднее арифметическое отметок ученика оказалось равным $4{,}7$.
а) Какое наименьшее количество отметок могло быть у ученика?
б) На какое наибольшее число может увеличиться среднее арифметическое отметок этого ученика после замены четырёх отметок «3», «3», «5» и «5» двумя отметками «4»?

Вариант 1

Часть 2

С1 а) Решите уравнение $2\cos 2x + 8\sin x + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2},\ \pi\right]$.

Ответ: а) $x = (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6} + n\pi$, где $n \in Z$. б) $-\frac{5\pi}{6}$ и $-\frac{\pi}{6}$.

Решение.

а) Так как $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, то исходное уравнение примет вид $4\sin^2 x - 8\sin x - 5 = 0$, откуда находим, что $\sin x = \frac{5}{2} > 1$ – не подходит, или $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x = (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6} + n\pi$.

б) Используя единичную окружность (или с помощью графика, или путём решения двойных неравенств и т.п.) находим, что отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2},\ \pi\right]$ принадлежат корни $-\frac{5\pi}{6}$ и $-\frac{\pi}{6}$.

Замечание. Текст решения должен содержать обоснованный как-либо отбор корней.

Баллы	Критерии оценивания задания С1
2	Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)
1	Обоснованно получен верный ответ в п. а), но обоснование отбора корней в п. б) не приведено или задача в п. а) обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. б) приведен обоснованный отбор корней
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

С2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCT$ с вершиной M найдите расстояние от точки A до плоскости MCT, если $AT = 6$, а $AM = BM = CM = TM = 5$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{7}}{2}$.

Решение. Искомое расстояние равно высоте h, опущенной из вершины A пирамиды $AMCT$ на основание MCT. $h = 3\cdot\frac{V_{AMCT}}{S_{MCT}} = \frac{3V_{MABCT}}{2S_{MCT}}$.

Обозначим за O точку пересечения диагоналей AC и BT, а за K – середину CT.

Тогда $AO = 3\sqrt{2}$, $TK = 3$, $MO = \sqrt{AM^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{7}$, $MK = \sqrt{MT^2 - TK^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, $h = \frac{6\cdot 6\cdot\sqrt{7}}{4\cdot 6} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$.

Баллы	Критерии оценивания задания С2
2	Обоснованно получен правильный ответ
1	Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ, или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

С3 Решите систему неравенств
$$\begin{cases} |x+1| - 1 \le \sqrt{8x^2 - 2x^3} \\ \dfrac{2^{6-\frac{5x}{2}} - 2^{7-2x} - 2^{-\frac{x}{2}-1} + 1}{2 - 2^{2-\frac{x}{2}}} \ge 0 \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-2,\ 2) \cup \left\{\frac{7}{2}\right\}$..

Решение: рассмотрим второе неравенство системы. Разложив на множители числитель левой части этого неравенства, преобразуем неравенство к виду:
$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(2^{-\frac{x}{2}} - 2\right)\left(2^{7-2x} - 1\right)}{2 - 2^{2-\frac{x}{2}}} \ge 0.$$
Корнями числителя будут числа -2 и $\frac{7}{2}$, а корнем знаменателя будет 2. Методом интервалов находим: $x \in [-2,\ 2) \cup \left[\frac{7}{2},\ +\infty\right)$. Рассмотрим теперь при $x \in [-2,\ 2) \cup \left[\frac{7}{2},\ +\infty\right)$ первое неравенство с учётом его ОДЗ: $x \le 4$. 1) При $x \in [-1,\ 2) \cup \left[\frac{7}{2},\ 4\right]$ получим: $x \le \sqrt{8x^2 - 2x^3}$. Последнее неравенство верно при всех $x \in [-1,\ 0]$,

а при $x \in (0,\ 2) \cup \left[\frac{7}{2},\ 4\right]$ оно равносильно неравенству $x^2 \le 8x^2 - 2x^3$, то есть $x^2(2x-7) \le 0$ и $x \in (0,\ 2) \cup \left\{\frac{7}{2}\right\}$. 2) При $-2 \le x < -1$ получим: $-x-2 \le \sqrt{8x^2 - 2x^3}$. Последнее неравенство справедливо для всех $-2 \le x < -1$, так как при $x \ge -2$ левая часть неравенства не больше 0 а правая часть не меньше 0. В итоге получим: $x \in [-2,\ 2) \cup \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

Баллы	Критерии оценивания задания С3
3	Обоснованно получен правильный ответ
2	Все шаги решения выполнены. Дано верное и обоснованное решение одного из неравенств исходной системы, но при в целом правильном решении другого неравенства исходной системы допущена одна вычислительная ошибка
1	Дано верное и обоснованное решение одного из неравенств исходной системы
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

С4 В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, синус угла B равен $\frac{120}{169}$, а радиус описанной окружности равен 169. Найдите радиус вписанной окружности.

Ответ: 80 или 24.

Решение. 1-й случай (угол B – не тупой). Тогда точка K – центр описанной окружности и точка P – центр вписанной окружности лежат на биссектрисе BT равнобедренного треугольника ABC. Обозначим за 2α угол ABC. Тогда угол PAT равен $\frac{\pi - 2\alpha}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$. По теореме синусов находим, что

$\mathrm{AC} = 2\mathrm{R} \cdot \sin \mathrm{ABC} = 2 \cdot 169 \cdot \frac{120}{169} = 240$. Следовательно $\mathrm{AT} = 120$,

$\mathrm{PT} = \mathrm{AT} \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 120 \cdot \frac{1 - \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$. Вычислим $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, имеем:

$$\cos 2\alpha = \frac{119}{169},\ \cos\alpha = \frac{12}{13},\ \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, $\mathrm{PT} = 120 \cdot \frac{1 - \frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{5}} = 80$.

2-й случай (угол B – тупой). Тогда $\cos 2\alpha = -\frac{119}{169}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$,

$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{2}{3}$. $\mathrm{PT} = \mathrm{AT} \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 120 \cdot \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = 24$.

Баллы	Критерии оценивания задания С4
3	Обоснованно получен верный ответ
2	Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины, или рассмотрены обе конфигурации, для которых получены значения искомой величины, неправильные из-за арифметических ошибок
1	Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

С5 Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|1 - 5\sqrt{x}| = 3(x+a)$ имеет ровно два корня.

Ответ: $\frac{1}{3} < a < \frac{13}{36}$.

Решение: рассмотрим функции $f(x) = 3(x+a)$ и $g(x) = |1 - 5\sqrt{x}|$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$ при неотрицательных значениях x. Функция $f(x) = 3(x+a)$ всюду возрастает. Функция $g(x) = |1 - 5\sqrt{x}|$ убывает при $0 \le x \le \frac{1}{25}$; поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на этом промежутке не более одного решения. Так как при всех положительных значениях параметра $f\left(\frac{1}{25}\right) > 0 = g\left(\frac{1}{25}\right)$, то решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f(0) \le g(0)$, то есть при $a \le \frac{1}{3}$. Далее, при $x > \frac{1}{25}$ уравнение $f(x) = g(x)$

принимает вид $3(x+a)+1=5\sqrt{x}$. Поскольку $x>\frac{1}{25}$ и $a>0$, то это уравнение сводится к уравнению $\left(3(x+a)+1\right)^2=25x$. Корни этого уравнения неотрицательны, так как $25x=\left(3(x+a)+1\right)^2\ge 0$. При $0\le x\le\frac{1}{25}$ и $a>0$ получаем: $25x\le 1$, а $\left(3(x+a)+1\right)^2>1$. Значит, при $a>0$ все корни уравнения $\left(3(x+a)+1\right)^2=25x$ больше $\frac{1}{25}$. Уравнение $\left(3(x+a)+1\right)^2=25x$ равносильно квадратному уравнению $9x^2+(18a-19)x+(3a+1)^2=0$, дискриминант которого $D=(18a-19)^2-36(3a+1)^2=-25(36a-13)$, поэтому при $a>\frac{13}{36}$ это уравнение не имеет корней; при $a=\frac{13}{36}$ уравнение имеет единственный корень; при $0<a<\frac{13}{36}$ уравнение имеет два корня. Таким образом, уравнение $\left|1-6\sqrt{x}\right|=3(x+a)$ имеет следующее количество корней:

нет корней при $a>\frac{13}{36}$, один корень при $a=\frac{13}{36}$; два корня при $\frac{1}{3}<a<\frac{13}{36}$; три корня при $0<a\le\frac{1}{3}$.

Замечание. Задачу можно решить и по-другому, например, графическим методом.

Баллы	Критерии оценивания задания С5
4	Обоснованно получен правильный ответ
3	С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек
2	С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a
1	С помощью верного рассуждения получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

С6 В течение четверти учитель ставил школьникам отметки «1», «2», «3», «4» и «5». Среднее арифметическое отметок ученика оказалось равным 4,7.
а) Какое наименьшее количество отметок могло быть у ученика?
б) На какое наибольшее число может увеличиться среднее арифметическое отметок этого ученика после замены четырёх отметок «3», «3», «5» и «5» двумя отметками «4»?

Ответ: а) 10; б) $\frac{7}{90}$.

Решение.
Решение каждого пункта состоит из двух частей: оценка и пример. Обозначим за n общее количество отметок, а за S — их сумму. По условию $\frac{S}{n}=4{,}7$, откуда получаем: $S=4{,}7\cdot n$.

а) По условию $\frac{S}{n}=4{,}7=\frac{47}{10}$ и S — целое число. С учётом того, что 47 – простое число, получаем, что n делится на 10, а значит $n\ge 10$.
Набор из трёх отметок «4» и семи отметок «5» удовлетворяет условию задачи.

б) Среднее арифметическое набора отметок после замены равно $\frac{S-8}{n-2}=\frac{4{,}7n-8}{n-2}=4{,}7+\frac{1{,}4}{n-2}$. Значение этого выражения максимально при наименьшем возможном значении n, удовлетворяющем условию задачи. Если всего было 10 отметок, то их сумма равняется 47, но максимальная сумма 10 отметок, среди которых есть две отметки «3», равняется $S=2\cdot3+8\cdot5=46$. Значит, так как n кратно 10, то всего было не менее 20 отметок. Следовательно, среднее арифметическое отметок ученика после замены четырёх отметок «3», «3», «5» и «5» на две отметки «4» может увеличиться не более чем на
$\left(4{,}7+\frac{1{,}4}{n-2}\right)-4{,}7\le\left(4{,}7+\frac{1{,}4}{20-2}\right)-4{,}7=\frac{7}{90}$. Набор из двух отметок «3», двух отметок «4» и шестнадцати отметок «5» удовлетворяет условию задачи. В этом случае при замене четырёх отметок «3», «3», «5» и «5» двумя отметками «4» среднее арифметическое увеличивается на $\left(4{,}7+\frac{1{,}4}{20-2}\right)-4{,}7=\frac{7}{90}$.

Баллы	Критерии оценивания задания С6
4	Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты
3	Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов
2	Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов
1	Верно получен один из следующих результатов: — искомая оценка в п. *а*; — пример в п. *а*, обеспечивающий точность предыдущей оценки; — искомая оценка в п. *б*; — пример в п. *б*, обеспечивающий точность предыдущей оценки
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

№ задания	Вариант 1
B1	48
B2	6
B3	4
B4	504
B5	2
B6	96
B7	0,6
B8	-1
B9	56
B10	0,42
B11	7
B12	13
B13	72
B14	1,5