

01-803-03

15.07.13 г.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

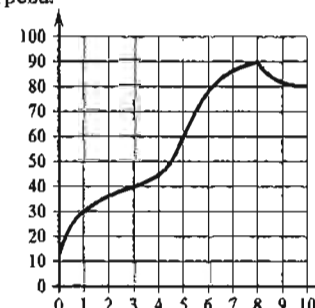
Желаем успеха!

Часть 1

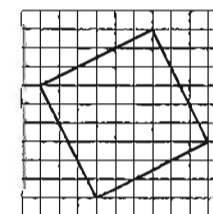
Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- B1** Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Андрея Сергеевича равна 13 500 рублей. Какую сумму он получит после вычета налога на доходы? Ответ дайте в рублях.

- B2** На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На ось абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, на сколько градусов нагреется двигатель с первой по восьмую минуту разогрева.



- B3** Найдите площадь квадрата, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



- B4** Независимое агентство каждый месяц определяет рейтинги R новостных сайтов на основе показателей информативности In , оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель оценивается целыми числами от -2 до 2 . Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

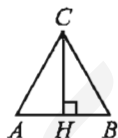
$$R = 25 \cdot \left(\frac{2In + Op + 3Tr}{6} + 2 \right).$$

В таблице даны оценки каждого показателя для нескольких новостных сайтов. Определите наивысший рейтинг новостных сайтов, представленных в таблице. Запишите его в ответ, округлив до целого числа.

Сайт	Информативность	Оперативность	Объективность
VoKak.ru	2	2	2
NashiNovosti.com	0	0	1
Bezvrak.ru	-2	1	0
Zhizni.net	2	2	0

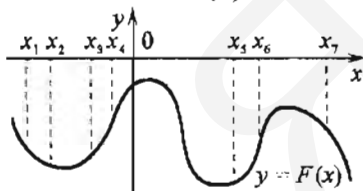
- B5** Найдите корень уравнения $2^{\log_4(2x+5)} = 2$.

- B6** В равностороннем треугольнике ABC высота CH равна $24\sqrt{3}$. Найдите AB .



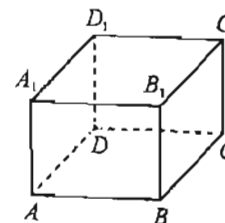
- B7** Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

- B8** На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?



21-803-03

- B9** В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $D_1 B = 2AB$. Найдите угол между диагоналями BD_1 и CA_1 . Ответ дайте в градусах.



- B10** В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что произведение выпавших очков — чётное число.

- B11** Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объём конуса, если объём цилиндра равен 162.



- B12** Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 85 - 5p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 300 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

- B13** На изготовление 77 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 99 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

- B14** Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 17$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1

а) Решите уравнение $3 \operatorname{tg}^2 x - \frac{5}{\cos x} + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

C2

В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M высота равна 3, а боковые рёбра равны 6. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AB и AC параллельно прямой MA .

C3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^x + 17 \cdot 2^{3-x} \leq 25, \\ \frac{x^2 - 3x - 5}{x - 4} + \frac{3x^2 - 15x + 2}{x - 5} \leq 4x + 1. \end{cases}$$

C4

Радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 равны соответственно 2 и 9. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных и прямой O_1O_2 , если $O_1O_2 = 21$.

C5

Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\frac{7a}{a-5} \cdot 2^{|x|} = 4^{|x|} + \frac{12a+17}{a-5}$$

имеет ровно два различных корня.

C6

Натуральные числа a , b , c и d удовлетворяют условию $a > b > c > d$.

а) Найдите числа a , b , c и d , если $a + b + c + d = 16$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 32$.

б) Может ли быть $a + b + c + d = 29$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 29$?

в) Пусть $a + b + c + d = 1400$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1400$. Найдите количество возможных значений числа a .

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

а) Решите уравнение $3 \operatorname{tg}^2 x - \frac{5}{\cos x} + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\frac{3 \sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5}{\cos x} + 1 = 0; \quad \frac{3 - 3 \cos^2 x - 5 \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$$

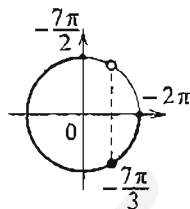
$$\frac{-2 \cos^2 x - 5 \cos x + 3}{\cos^2 x} = 0; \quad \frac{(2 \cos x - 1)(\cos x + 3)}{\cos^2 x} = 0.$$

Значит, либо $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, либо $\cos x = -3$ — нет корней.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Получим число $-\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$.



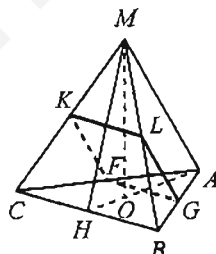
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2

В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M высота равна 3, а боковые рёбра равны 6. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AB и AC параллельно прямой MA .

Решение.

Пусть F и G — середины рёбер AC и AB соответственно. Отрезки FK и GL параллельны MA , где точки K и L — середины рёбер MC и MB соответственно. Поскольку $FK = \frac{MA}{2} = GL$, искомое сечение — параллелограмм $FGLK$.



Пусть MH — высота и медиана треугольника MBC , AN — медиана и высота треугольника ABC , тогда плоскость MNA перпендикулярна плоскости ABC , значит, прямая MA перпендикулярна прямой BC . Отрезок FK параллелен MA , отрезок FG параллелен BC , следовательно, $FGLK$ — прямоугольник.

Пусть MO — высота пирамиды, тогда $MO = 3$, $MA = 6$, откуда $OA = 3\sqrt{3}$. В правильном треугольнике ABC , где O — его центр, $BC = OA\sqrt{3} = 9$.

В прямоугольнике $FGLK$

$$FG = \frac{BC}{2} = \frac{9}{2}; \quad FK = \frac{MA}{2} = 3; \quad S_{FGLK} = FG \cdot FK = \frac{27}{2}.$$

Ответ: $\frac{27}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^x + 17 \cdot 2^{3-x} \leq 25, \\ \frac{x^2 - 3x - 5}{x - 4} + \frac{3x^2 - 15x + 2}{x - 5} \leq 4x + 1. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$2^x + 17 \cdot 2^{3-x} \leq 25; \quad 2^{2x} - 25 \cdot 2^x + 136 \leq 0.$$

Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид: $t^2 - 25t + 136 \leq 0$, откуда $8 \leq t \leq 17$; $8 \leq 2^x \leq 17$; $3 \leq x \leq \log_2 17$.

Решение первого неравенства исходной системы: $3 \leq x \leq \log_2 17$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{x^2 - 3x - 5}{x - 4} + \frac{3x^2 - 15x + 2}{x - 5} \leq 4x + 1;$$

$$\frac{(x-4)(x+1)}{x-4} - \frac{1}{x-4} + \frac{3x(x-5)}{x-5} + \frac{2}{x-5} \leq 4x + 1;$$

$$-\frac{1}{x-4} + \frac{2}{x-5} \leq 0; \quad \frac{x-3}{(x-4)(x-5)} \leq 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \leq 3$; $4 < x < 5$.

3. Поскольку $4 < \log_2 17 < 5$, получаем решение исходной системы неравенств: $x = 3$; $4 < x \leq \log_2 17$.

Ответ: $3; (4; \log_2 17]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

- C4** Радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 равны соответственно 2 и 9. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных и прямой O_1O_2 , если $O_1O_2 = 21$.

Решение.

Пусть O — центр третьей окружности, A — точка касания первой и третьей окружностей, B — второй и третьей, C — третьей окружности и прямой O_1O_2 . Точки O_1 , A и O лежат на одной прямой. Точки O_2 , B и O также лежат на одной прямой.

Пусть радиус третьей окружности равен x , тогда $OO_1 = 2 + x$, $OO_2 = 9 + x$.

В прямоугольном треугольнике OCO_1 имеем $O_1C = \sqrt{OO_1^2 - OC^2} = \sqrt{4 + 4x}$.

В прямоугольном треугольнике OCO_2 имеем $O_2C = \sqrt{OO_2^2 - OC^2} = \sqrt{81 + 18x}$.

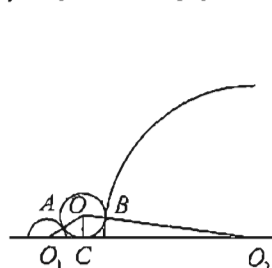


Рис. 1

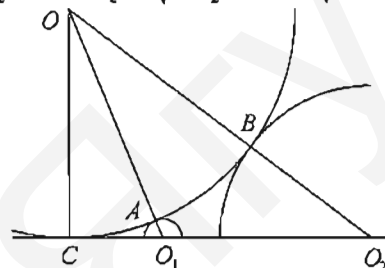


Рис. 2

Возможны два случая. Первый случай: точка C лежит между точками O_1 и O_2 (рис. 1), тогда

$O_1O_2 = O_1C + O_2C$; $\sqrt{4 + 4x} + \sqrt{81 + 18x} = 21$; $\sqrt{(4 + 4x)(81 + 18x)} = 178 - 11x$, откуда $x = 8$.

Второй случай: точка O_1 лежит между точками C и O_2 (рис. 2), тогда $O_1O_2 = O_2C - O_1C$; $\sqrt{81 + 18x} - \sqrt{4 + 4x} = 21$; $\sqrt{(4 + 4x)(81 + 18x)} = 11x - 178$, откуда $x = 80$.

Ответ: 8 или 80.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

- C5** Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\frac{7a}{a-5} \cdot 2^{|x|} = 4^{|x|} + \frac{12a+17}{a-5}$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Пусть $2^{|x|} = t$, $t \geq 1$.

Если $t > 1$, тогда $|x| = \log_2 t$; $x = \log_2 t$ и $x = -\log_2 t$.

Если $t = 1$, тогда $|x| = 0$; $x = 0$.

Обозначим $f(t) = t^2 - \frac{7a}{a-5} \cdot t + \frac{12a+17}{a-5}$.

Исходное уравнение имеет ровно два корня тогда и только тогда, когда уравнение $f(t) = 0$ имеет единственный корень, больший 1, или уравнение $f(t) = 0$ имеет два корня, один из которых больше 1, а другой меньше 1.

Уравнение $t^2 - \frac{7a}{a-5} \cdot t + \frac{12a+17}{a-5} = 0$ имеет ровно один корень, если дискриминант равен нулю:

$$\left(\frac{7a}{a-5}\right)^2 - 4 \cdot \frac{12a+17}{a-5} = 0; \frac{a^2 + 172a + 340}{(a-5)^2} = 0; a = -2 \text{ или } a = -170.$$

При $a = -2$ уравнение $t^2 - 2t + 1 = 0$ имеет единственный корень $t = 1$. В этом случае исходное уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

При $a = -170$ уравнение $t^2 - \frac{34}{5} \cdot t + \frac{289}{25} = 0$ имеет единственный корень $t = 3,4$. В этом случае исходное уравнение имеет два корня.

Графиком функции $f(t)$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Для того чтобы уравнение $f(t)=0$ имело два корня, один из которых больше 1, а другой меньше 1, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$f(1) < 0; 1 - \frac{7a}{a-5} + \frac{12a+17}{a-5} < 0; \frac{6a+12}{a-5} < 0; -2 < a < 5.$$

Ответ: $-170; (-2; 5)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a = -170$, $a = -2$, $a = 5$. Ответ отличается от верного включением точки $a = 5$	3
Обоснованно получено одно или два из значений $a = -170$, $a = -2$ или $a = 5$	2
Задача верно сведена к исследованию квадратного уравнения, но решение не завершено или получен неверный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6 Натуральные числа a , b , c и d удовлетворяют условию $a > b > c > d$.

а) Найдите числа a , b , c и d , если $a+b+c+d=16$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=32$.

б) Может ли быть $a+b+c+d=29$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=29$?

в) Пусть $a+b+c+d=1400$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=1400$. Найдите количество возможных значений числа a .

Решение.

а) Из условия получаем:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - 2a - 2b - 2c - 2d &= 0; \\ (a-b)(a+b) + (c-d)(c+d) - 2a - 2b - 2c - 2d &= 0; \\ (a-b-2)(a+b) + (c-d-2)(c+d) &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку $a-b-2 \geq -1$, $c-d-2 \geq -1$ и $a+b > c+d$, получаем: $a=b+2$ или $c=d+2$, откуда находим $a=7$, $b=5$, $c=3$ и $d=1$.

б) Из условия получаем:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + c^2 - d^2 &= a+b+c+d; \\ (a-b)(a+b) + (c-d)(c+d) &= a+b+c+d; \\ (a-b-1)(a+b) + (c-d-1)(c+d) &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку $a-b-1 \geq 0$, $a+b > 0$, $c-d-1 \geq 0$, $c+d > 0$, последнее равенство выполняется только при $a=b+1$ и $c=d+1$. Значит, $2b+2d+2=29$, что невозможно.

в) Из равенства $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = a+b+c+d$ получаем: $a=b+1$, $c=d+1$. Значит, $2a+2d=1400$; $d=700-a$. Получаем четвёрку чисел $(a; b; c; d) = (a; a-1; 701-a; 700-a)$. Поскольку $b > c$, получаем: $a > 351$. Кроме того, $d > 0$, откуда $a < 700$.

Значит, a принадлежит промежутку $(351; 700)$. Более того, для любого целого a из этого промежутка найденная четвёрка чисел удовлетворяет условию задачи. Таким образом, a может принимать 348 значений.

Ответ: а) $a=7$, $b=5$, $c=3$, $d=1$; б) нет; в) 348.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно выполнены все пункты: а, б и в	4
Обоснованное решение одного из пунктов а или б и обоснованное решение п. в	3
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пунктов а и б; — обоснованное решение п. в	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4