

- 16** В треугольнике  $ABC$  точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  — середины сторон  $BC, AC$  и  $AB$  соответственно,  $AH$  — высота,  $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $\angle BCA = 45^\circ$ .
- Докажите, что точки  $A_1, B_1, C_1$  и  $H$  лежат на одной окружности.
  - Найдите  $A_1H$ , если  $BC = 2\sqrt{3}$ .

Ответ: б) 1.

- 16** Точка  $M$  — середина гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$ . Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет  $BC$  в точке  $N$ .
- Докажите, что  $\angle CAN = \angle CMN$ .
  - Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников  $ANB$  и  $CBM$ , если  $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{12}{5}$ .

Ответ: б)  $\frac{13}{12}$ .

- 16** Точка  $E$  — середина боковой стороны  $CD$  трапеции  $ABCD$ . На стороне  $AB$  взяли точку  $K$  так, что прямые  $CK$  и  $AE$  параллельны. Отрезки  $CK$  и  $BE$  пересекаются в точке  $O$ .
- Докажите, что  $CO = KO$ .
  - Найдите отношение оснований трапеции  $BC$  и  $AD$ , если площадь треугольника  $BCK$  составляет  $\frac{16}{81}$  площади трапеции  $ABCD$ .

Ответ: б) 4:5.

- 16** В трапеции  $ABCD$  основание  $AD$  в два раза больше основания  $BC$ . Внутри трапеции взяли точку  $M$  так, что углы  $ABM$  и  $DCM$  прямые.
- Докажите, что  $AM = DM$ .
  - Найдите угол  $BAD$ , если угол  $ADC$  равен  $55^\circ$ , а расстояние от точки  $M$  до прямой  $AD$  равно стороне  $BC$ .

Ответ: б)  $80^\circ$ .

- 16** В трапеции  $ABCD$  угол  $BAD$  прямой. Окружность, построенная на большем основании  $AD$  как на диаметре, пересекает меньшее основание  $BC$  в точках  $C$  и  $M$ .
- Докажите, что  $\angle BAM = \angle CAD$ .
  - Диагонали трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите площадь треугольника  $AOB$ , если  $AB = 6$ , а  $BC = 4BM$ .

Ответ: б) 20.

- 16** Две окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  и радиусами 3 и 4 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , причём точки  $O_1$  и  $O_2$  лежат по разные стороны от прямой  $AB$ . Через точку  $A$  проведена прямая, вторично пересекающая эти окружности в точках  $M$  и  $K$ , причём точка  $A$  лежит между точками  $M$  и  $K$ .
- Докажите, что треугольники  $MBK$  и  $O_1AO_2$  подобны.
  - Найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $MK$ , если  $MK = 7$ , а  $O_1O_2 = 5$ .

Ответ: б)  $\frac{84}{25}$ .

- 16** Две окружности касаются внутренним образом в точке  $A$ , причём меньшая окружность проходит через центр  $O$  большей. Диаметр  $BC$  большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке  $M$ , отличной от  $A$ . Лучи  $AO$  и  $AM$  вторично пересекают большую окружность в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Точка  $C$  лежит на дуге  $AQ$  большей окружности, не содержащей точку  $P$ .

а) Докажите, что прямые  $PQ$  и  $BC$  параллельны.

Ответ: б) 1:4.

- 16** Окружность, вписанная в трапецию  $ABCD$ , касается её боковых сторон  $AB$  и  $CD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Известно, что  $AM = 6MB$  и  $2DN = 3CN$ .

а) Докажите, что  $AD = 3BC$ .

б) Найдите длину отрезка  $MN$ , если радиус окружности равен  $\sqrt{105}$ .

Ответ: б) 18.

- 16** В треугольник  $ABC$ , в котором длина стороны  $AC$  меньше длины стороны  $BC$ , вписана окружность с центром  $O$ . Точка  $B_1$  симметрична точке  $B$  относительно прямой  $CO$ .

а) Докажите, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $O$  и  $B_1$  лежат на одной окружности.

б) Найдите площадь четырёхугольника  $AOBB_1$ , если  $AB = 10$ ,  $AC = 6$  и  $BC = 8$ .

Ответ: б) 18.