Московский физико-технический институт

Неравенство Коши-Буняковского.

Методическое пособие
по подготовке к олимпиадам.

Составитель:
Паркевич Егор Вадимович

Москва 2014

Теоретический материал.

В этой работе мы рассмотрим неравенства, для доказательства которых будет применено неравенство Коши-Буняковского.

Сначала докажем его для чисел a_1, a_2, b_1, b_2. Пусть даны векторы $\overrightarrow{a}(a_1, a_2)$ и $\overrightarrow{b}(b_1, b_2)$ с углом между ними $\overrightarrow{a}\,\hat{}\,\overrightarrow{b}$. Из школьного курса известно, что их скалярное произведение выражается следующим образом:

$$(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 = |\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cos(\overrightarrow{a}\,\hat{}\,\overrightarrow{b})$$

Оценим модуль скалярного произведения $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$:

$$|(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})| = |\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cos(\overrightarrow{a}\,\hat{}\,\overrightarrow{b}) \le |\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|$$

С другой стороны $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |a_1b_1 + a_2b_2| \le |\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ или по-другому:

$$(1) \qquad (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

Это неравенство является частным случаем неравенства Коши — Буняковского для чисел a_1, a_2, b_1, b_2. Заметим, что равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a_1b_2 - a_2b_1 \ne 0$.

Обобщением неравенства (1) на числа $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_n$, называется неравенство Коши — Буняковского, которое имеет вид:

$$(2) \qquad (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Докажем это неравенство

Для случая, когда $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n \ge 0$. Пусть $x_k = \sqrt{(a_1^2 + ... + a_k^2)(b_1^2 + ... + b_k^2)}$, где $k = \{1, 2, ..., n\}$.

В этом случае

$$x_{k+1} = \sqrt{(a_1^2 + ... + a_k^2 + a_{k+1}^2)(b_1^2 + ... + b_k^2 + b_{k+1}^2)} = \sqrt{\left(\left(\sqrt{a_1^2 + ... + a_k^2}\right)^2 + a_{k+1}^2\right)\left(\left(\sqrt{b_1^2 + ... + b_k^2}\right)^2 + b_{k+1}^2\right)} \ge$$

$$\ge \sqrt{\left(\sqrt{a_1^2 + ... + a_k^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + ... + b_k^2} + a_{k+1}b_{k+1}\right)^2} = x_k + a_{k+1}b_{k+1}.$$

Таким образом, получим $x_{k+1} \ge x_k + a_{k+1}b_{k+1}$, где $k = 1, 2, ..., n-1$.

Складывая полученные неравенства получим: $\sqrt{(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2)} \ge a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$ или

$(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2) \ge a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$.

Рассмотрим случай, когда числа $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ являются произвольными действительными числами, неравенство при этом примет вид:

$$(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2) = (|a_1|^2 + ... + |a_n|^2)(|b_1|^2 + ... + |b_n|^2) \ge (|a_1b_1| + |a_2b_2| + ... + |a_nb_n|)^2 \ge$$
$$|a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n|^2 = (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n).$$

Примеры решения задач.

Задача №1 Докажите неравенство: $\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha + \cos\beta \le 2$.

Решение:

Представим сумму синусов и косинусов в следующем виде и сделаем её оценку:

$\sin\alpha\sin\beta + 1\cdot\cos\alpha + 1\cdot\cos\beta \le \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\beta + 1^2}\cdot\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\beta + 1^2} = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$.

Ч.т.д.

Задача №2 Докажите неравенство $a^3 + b^3 > a^2 + b^2$, если $a > 0, b > 0$ и $a^2 + b^2 > a + b$.

Решение:

Домножим $(a^3 + b^3)$ на $(a + b)$ и произведём некоторые оценки.

Имеем $(a^3 + b^3)(a + b) = \left(\left(a^{3/2}\right)^2 + \left(b^{3/2}\right)^2\right)\cdot\left(\left(a^{1/2}\right)^2 + \left(b^{1/2}\right)^2\right) \ge \left(a^{3/2}a^{1/2} + b^{3/2}b^{1/2}\right)^2 = (a^2 + b^2)^2$, здесь мы воспользовались неравенством Коши-Буняковского для векторов с координатами: $\overrightarrow{a}(a^{3/2}; b^{3/2})$ и $\overrightarrow{b}(a^{1/2}; b^{1/2})$.

Теперь поскольку $\dfrac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} \ge \dfrac{a^2 + b^2}{a + b} > 1$, то $a^3 + b^3 > a^2 + b^2$.

Ч.т.д.

Задача №3 Доказать неравенство: $\left(1 + \dfrac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right) > 5$, где $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Решение:

Представим выражение в скобках в следующем виде и воспользуемся неравенством К-Б, в итоге получим:

$$\left(1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha}}\right)^2\right)\left(1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}}\right)^2\right) \ge \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}}\right)^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\alpha}}\right)^2 \ge (1 + \sqrt{2})^2 > 5.$$

Ч.т.д.

Задача №4 Доказать неравенство для любого $n \in N$ $\quad (\sin\alpha_1 + ... \sin\alpha_n)^2 + (\cos\alpha_1 + ... + \cos\alpha_n)^2 \le n^2$.

Решение:

Запишем это неравенство следующим образом и воспользуемся неравенством Коши — Буняковского $\Rightarrow$

$(1\cdot\sin\alpha_1 + ... + 1\cdot\sin\alpha_n)^2 + (1\cdot\cos\alpha_1 + ... + 1\cdot\cos\alpha_n)^2 \le (n + \sum_{i=1}^n \sin^2\alpha_i) + (n + \sum_{i=1}^n \cos^2\alpha_i) = 3n$.

При $n > 3$ неравенство верно, докажем его для $n = 1, 2, 3$.

Если $n = 1$, то $\sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1 \le 1$ — верно.

Если $n = 2$, то $(\sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2)^2 + (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2)^2 = 2 + 2\sin\alpha_1\sin\alpha_2 + 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 = 2 + \dfrac{2}{2}\Big[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)\Big] + \dfrac{2}{2}\Big[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)\Big] = 2 + 2\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 4\cos^2\dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \le 4$ — верно.

Случай $n = 3$ также верен, в чём предоставляем убедиться самим.

Ч.т.д.

Задача №5 Пусть $a+b+c=1$, доказать, что $a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{1}{3}$.

Решение:

Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского, оценим сумму слагаемых следующим образом: $1 = 1\cdot a + 1\cdot b + 1\cdot c \leq \sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2+b^2+v^2}$, откуда приходим к: $a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{1}{3}$.

Ч.т.д.

Задача №6 Решите уравнение $(2x+3\sqrt{x})^2 = 13x(x+1)$

Решение:

1-ый способ

Заметим сразу, что $x=0$ — корень уравнения. Найдем остальные корни. Так как $13{=}3^2+2^2$, а $x(x+1) = x^2+x = x^2+(\sqrt{x})^2$, то рассматриваемое уравнение есть реализуемое со знаком равенства неравенство Коши-Буняковского для величин $a_1=2, a_2=3, b_1=x, b_2=\sqrt{x}$, то есть для векторов с координатами: $\overrightarrow{a}(2;3)$ и $\overrightarrow{b}(x;\sqrt{x})$. Значит, уравнение равносильно соотношению $\dfrac{2}{x} = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$. Отсюда найдем, что $x=\dfrac{4}{9}$ — единственный положительный корень уравнения.

2-ой способ

Замечаем, что $x=0$ решение, далее сократим на $\sqrt{x}$ и введём новую переменную $t=\sqrt{x}$, тогда уравнение примет вид: $(2t+3)^2 = 13(t^2+1)$. Раскрываем скобки, получаем: $9t^2-12t+4=0 \Leftrightarrow (3t-2)^2=0$, откуда $t=\dfrac{2}{3}$, то есть $x=\dfrac{4}{9}$.

Ответ: $\left\{0;\dfrac{4}{9}\right\}$.

Задача №7 Найдите наибольшее значение функции $y=\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}$.

Решение:

Рассмотрим два вектора со следующими координатами: $\overrightarrow{a}(\sqrt{x+7};\sqrt{11-x})$ и $\overrightarrow{b}(1;1)$.

Оценим их скалярное произведение: $|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}| \leq |\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|$, где $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x+7+11-x} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, а $|\overrightarrow{b}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, откуда $|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}| \leq 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 6$, то есть $|f(x)| \leq 6$, проверим теперь реализацию равенства: $\dfrac{\sqrt{x+7}}{1} = \dfrac{\sqrt{11-x}}{1}$, откуда находим $x=2$, то есть функция принимает своё наибольшее значение в точке $x=2$ и $f(2)=6$.

Ответ: $f_{\textit{наиб}}(2)=6$.

Задача №8 Докажите неравенство $\left(a_1+a_2+...+a_n\right)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n}\right) \geq n^2$, где $a_1, a_2, ..., a_n > 0$.

Решение:

Представим произведение слагаемых следующим образом и применим неравенство К-Б, получим:

$$\left(\left(\sqrt{a_1}\right)^2+...+\left(\sqrt{a_n}\right)^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)^2+...+\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2\right)\geq\left(\sqrt{a_1}\frac{1}{\sqrt{a_1}}+...+\sqrt{a_n}\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2=n^2$$

Ч.т.д.

Задача №9 Докажите неравенство $x^4+y^4\geq x^3y+xy^3$

Решение:

1-ый способ

Представим выражение x^4+y^4 следующим образом и воспользуемся неравенством К-Б, получим:
$x^4+y^4=\sqrt{x^4+y^4}\sqrt{x^4+y^4}\geq\sqrt{x^4+y^4}\sqrt{2x^2y^2}=\sqrt{(x^2)^2+(y^2)^2}\sqrt{(xy)^2+(xy)^2}\geq x^3y+xy^3$

2-ой способ

Перенесём правую часть неравенства в лево, получим: $x^3(x-y)+y^3(y-x)=(x^3-y^3)(x-y)=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)\geq 0$.
Ч.т.д.

Задача №10 Докажите неравенство $\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a}\leq 12$

Решение:

Представим эту сумму следующим образом и применим неравенство К-Б, получим:

$$1\cdot\sqrt{a+1}+1\cdot\sqrt{2a-3}+1\cdot\sqrt{50-3a}\leq\sqrt{\left(1^2+1^2+1^2\right)\left((\sqrt{a+1})^2+(\sqrt{2a-3})^2+(\sqrt{50-3a})^2\right)}=12$$

Ч.т.д.

Задача №11 Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2\geq 14$, если $a+2b+3c\geq 14$

Решение:

Рассмотрим два вектора с координатами $\overrightarrow{a}(a;b;c)$ и $\overrightarrow{b}(1;2;3)$ и применим к ним неравенство К-Б, получим:
$(a^2+b^2+c^2)(1^2+2^2+3^2)\geq(a+2b+3c)^2\geq 14^2$, откуда $a^2+b^2+c^2\geq 14$.

Ч.т.д.

Задача №12 Найдите наименьшее значение выражения $\left(u-v\right)^2+\left(\sqrt{2}-u^2-\dfrac{9}{v}\right)^2$, если $0<u<\sqrt{2}, v>0$.

Решение:

Имеем: $\left(u-v\right)+\left(\sqrt{2-u^2}-\dfrac{9}{v}\right)^2=2-2\left(uv+\dfrac{9}{v}\sqrt{2-u^2}\right)+v^2+\left(\dfrac{9}{v}\right)^2\geq 2-2\sqrt{\left(u^2+\left(\sqrt{2-u^2}\right)^2\left(v^2+\left(\dfrac{9}{v}\right)\right)\right)}+$
$v^2+\left(\dfrac{9}{v}\right)^2=\left(\sqrt{v^2+\dfrac{81}{v^2}}-\sqrt{2}\right)^2\geq\left(\sqrt{2\cdot 9}-\sqrt{2}\right)^2=8.$

Когда $v=3, u=1$, имеем $\left(u-v\right)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-\dfrac{9}{v}\right)^2=4+4=8$, следовательно, наименьшее значение данного выражения равно 8.

Ч.т.д.

Задача №13 Найдите наибольшее значение функции $y = a\sin x + b\cos x$, где $a > 0, b > 0, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

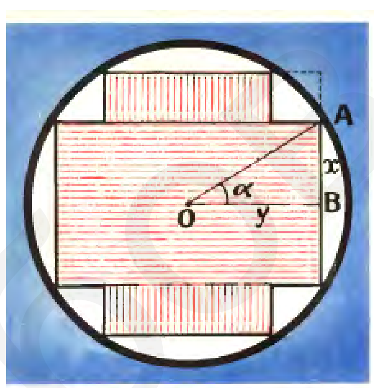
Решение:

В силу неравенства К-Б будем иметь $y = a\sin x + b\cos x \le \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{a^2+b^2}$.
Максимум достигается при условии $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, то есть $\operatorname{tg} x = \dfrac{a}{b}$.

Ответ: $y = \sqrt{a^2+b^2}$.

Замечание: в этой задаче можно было бы воспользоваться методом введения дополнительного угла: $y = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\varphi + x)$, где $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$.

Задача №14 Трансформатор переменного тока нужно сконструировать так, чтобы его крестообразный железный сердечник заполнял возможно большую часть внутренней полости круглой обмотки. Каковы должны быть размеры сечения сердечника, изображенного на рисунке, если радиус катушки равен R?



Решение:

Пусть $\angle AOB = \alpha$, тогда $\dfrac{1}{4}S = y^2 - (y-x)^2 = 2xy - x^2 = R^2(2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha)$. Отсюда $S = 2R^2(2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - 1)$.
Воспользуемся неравенством К-Б: $S \le 2R^2(\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2 2\alpha} - 1) = 2R^2(\sqrt{5} - 1)$.

Следовательно, $S_{max} = 2R^2(\sqrt{5}-1)$ и достигается при $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{2}{1}$, откуда $\alpha = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 2$.

Ответ: $S_{max} = 2R^2(\sqrt{5}-1)$, $\alpha = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 2$.

Задача №15 Рассмотрим три пары действительных чисел $(a_1; b_1), (a_2; b_2), (a_3, b_3)$. Доказать, что существует треугольник со сторонами $a = \sqrt{(a_2-a_3)^2 + (b_2-b_3)^2}$, $b = \sqrt{(a_3-a_1)^2 + (b_3-b_1)^2}$, $c = \sqrt{(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2}$.

Решение:

Для того чтобы a, b, c были сторонами треугольника необходимо, чтобы выполнялись неравенства $a + b > c, b + c > a, a + c > b$, каждое из которых эквивалентно неравенству $2ab \ge c^2 - a^2 - b^2$ или

$2\sqrt{(a_2-a_3)^2 + (b_2-b_3)^2}\cdot\sqrt{(a_3-a_1)^2 + (b_3-b_1)^2} \ge (a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2 - (a_2-a_3)^2 - (b_2-b_3)^2 - (a_3-a_1)^2 - (b_3-b_1)^2 = 2[(a_3-a_1)(a_2-a_3) + (b_3-b_1)(b_2-b_3)]$, сокращая на 2, получаем неравенство К-Б. Равенство достигается только, если числа $a_3 - a_1$, $b_3 - b_1$ пропорциональны числам $a_2 - a_3, b_2 - b_3$; проверьте, что в этом случае вершины треугольника должны лежать на одной прямой.

Аналогично доказывается, что $a + c \geq b, b + c \geq a$. Значит, треугольник со сторонами a, b, c существует, хотя и может выродиться в отрезок. Можно построить этот треугольник геометрически — в декартовой системе координат его вершины надо поместить в точки с координатами $(a_1; b_1), (a_2; b_2), (a_3; b_3)$.

Ч.т.д.

Упражнения.

Докажите неравенства

1) $ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leq 1$, если $|\, a \,| \leq 1, |\, b \,| \leq 1$

2) $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$, где $a, b > c > 0$

3) $a\sqrt{a^2+b^2} + b\sqrt{b^2+c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2$.

4) $\dfrac{1}{\sqrt{ab}} + \dfrac{1}{\sqrt{ca}} + \dfrac{1}{\sqrt{bc}} \leq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$, где $a > 0, b > 0, c > 0$.

5) $\dfrac{a_1^2 + ... + a_n^2}{n} \geq \left(\dfrac{a_1 + ... + a_n}{n}\right)^2$

6) $x^2 + y^4 \geq x^3y + xy^3$

7) $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, $a, b, c > 0$

8) Доказать, что $(a^2+b^2+c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2) \geq 36S^2$, где a, b, c — стороны треугольника; h_a, h_b, h_c — высоты треугольника, опущенные на эти стороны; S — площадь треугольника.

9) Доказать, что $ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leq 1, |\, a \,| \leq 1, |\, b \,| \leq 1$.

10) Решить систему уравнений: $\begin{cases} (x^3+y^3)^2 = x^2 + y^2 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$

11) Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — вещественные числа. Доказать, что $\left|\prod\limits_{i=1}^{n} \sin\alpha_i + \prod\limits_{i=1}^{n} \cos\alpha_i\right| \leq 1$.

12) Пусть $a_k = \sum\limits_{i=1}^{100} \dfrac{i^k}{i+1}$. Доказать, что $a_k \cdot a_{k+2} > a_{k+1}^2$.

13) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — вещественные числа. Доказать, что $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2} \geq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2}$

(неравенство треугольника).

14) Пусть $a_k = \sum\limits_{i=1}^{100} \dfrac{i^k}{i+1}$. Доказать, что $a_k \cdot a_{k+2} > a_{k+1}^2$.

15) Пусть a, b, c — положительные числа. Доказать, что $\dfrac{a}{2b+c} + \dfrac{b}{2c+a} + \dfrac{c}{2a+b} \geq 1$.

16) Пусть a, b, c, d — положительные числа. Доказать, что $\dfrac{a}{2b+c} + \dfrac{b}{2c+d} + \dfrac{c}{2d+a} + \dfrac{d}{2a+b} \geq \dfrac{4}{3}$.

Литература

[1] Алексеев Р. Б., Курляндчич Л. Д. Неравенства // Математика в школе, 1990, № 3.

[2] Волошинов А. В. Математики и искусство – М.: Просвещение, 1992.

[3] Глейзер Г. И. История математики в средней школе. – М.: Просвещение, 1970.

[4] Гольдман А., Звавич Л. Числовые средние и геометрия // Квант, 1990, № 9.

[5] Гомонов С. А. Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения. 10 – 11 классы: учебное пособие. – М.: Дрофа, 2006.

[6] Готман Э. Геометрические задачи на максимум и минимум // Квант, 2005, № 2.

[7] Дубровский В. Н. Задача об общей внешней касательной к окружностям, касающимся внешним образом // Квант, 1986, № 2.

[8] Егоров А. Треугольники и неравенства // Квант, 2005, № 2.

[9] Крейн М., Нудельман А. Замечательные пределы, порождаемые классическими средними // Квант, 1981, № 9.

[10] Кушнир И. А. Урок одной задачи // Квант, 1986, № 9.

[11] Савин А., Сендеров В. Описанная трапеция и средние //Квант, 1972, № 8.

[12] Седракян Н. О применении одного неравенства // Квант, 1997, № 2.

[13] Сивашинский И. Х. Неравенства в задачах. – М.: Наука, 1967.

[14] Скопец З. А. Сравнение различных средних двух положительных чисел // Квант, 1979, № 2.

[15] Соловьёв Ю. Неравенства // Математика, 2006, № 5.

[16] Сороки Г. Классические неравенства в задачах // Математика, 2005, № 15.

[17] Фалин Г., Фалин А. Сложные задачи вступительных экзаменов в МГУ: неравенства о средних // Математика, 2006, № 10.

[18] Шлейфер Ф. Г. Круговые неравенства // Математика в школе, 1994, № 3.

[19] Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А. П. Савин. – М.: Педагогика, 1989.

[20] Ярский А. Как доказать неравенство // Квант, 1997, № 2.

[21] Применение неравенства Буняковского-Коши к решению некоторых задач, В.К. Смышляев.