

LXXV МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

18 марта 2012 года • 11 класс, первый день

Задача 1. Алёша написал на доске 5 целых чисел — коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Боря стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4, -5 в каком-то порядке. Восстановите стёртое число и докажите, что было написано именно оно.

Задача 2. Для заданных значений a , b , c и d оказалось, что графики функций $y = 2a + \frac{1}{x-b}$ и $y = 2c + \frac{1}{x-d}$ имеют ровно одну общую точку. Докажите, что графики функций $y = 2b + \frac{1}{x-a}$ и $y = 2d + \frac{1}{x-c}$ также имеют ровно одну общую точку.

Задача 3. В треугольнике ABC высоты или их продолжения пересекаются в точке H , а R — радиус описанной около него окружности. Докажите, что если $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$, то $AH + BH \geq 2R$.

Задача 4. На собрание пришло n человек ($n > 1$). Оказалось, что у любых двух из них есть среди собравшихся ровно два других общих знакомых.

а) Докажите, что каждый из них знаком с одинаковым числом людей на этом собрании.

б) Покажите, что n может быть больше 4.

Задача 5. Для $n = 1, 2, 3$ будем называть числом n -го типа любое число, которое либо равно 0, либо входит в бесконечную геометрическую прогрессию $1, (n+2), (n+2)^2, \dots$, либо является суммой нескольких различных её членов. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы числа первого типа, числа второго типа и числа третьего типа.

Задача 6. Про бесконечный набор прямоугольников известно, что в нём для любого числа S найдутся прямоугольники суммарной площади больше S .

а) Обязательно ли этим набором можно покрыть всю плоскость, если при этом допускаются наложения?

б) Тот же вопрос, если дополнительно известно, что все прямоугольники в наборе являются квадратами.

Десятая устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов
состоится 8 апреля 2012 года.

Подробная информация на сайте <http://olympiads.mcsme.ru/ustn/>

Заккрытие LXXV Московской математической олимпиады
пройдёт в воскресенье 1 апреля 2012 года в Главном здании МГУ.
Подробная информация на сайте <http://www.mcsme.ru/mmo/>