LXXI Московская математическая олимпиада

10 класс 09.03.2008

Задача №1. Аудитория имеет форму правильного шестиугольника со стороной $\mathbf{3}$ м. В каждом углу установлен храпометр, определяющий число спящих студентов на расстоянии, не превышающем $\mathbf{3}$ м. Сколько всего спящих студентов в аудитории, если сумма показаний храпометров равна $\mathbf{7}$?

Задача №2. Андрей и Борис играют в следующую игру. Изначально на числовой прямой в точке p стоит робот. Сначала Андрей говорит расстояние, на которое должен сместиться робот. Потом Борис выбирает направление, в котором робот смещается на это расстояние. И так далее. При каких p Андрей может добиться того, что за конечное число ходов робот попадет в одну из точек $\mathbf{0}$ или $\mathbf{1}$ вне зависимости от действий Бориса?

Задача №3. Все целые числа от $\mathbf{-33}$ до $\mathbf{100}$ включительно расставили в некотором порядке и рассмотрели суммы каждых двух соседних чисел. Оказалось, что среди них нет нулей. Тогда для каждой такой суммы нашли число ей обратное. Полученные числа сложили. Могло ли в результате получится целое число?

Задача №4. Некоторый многочлен с целыми коэффициентами принимает в k целых точках значения среди чисел от $\mathbf{1}$ до $k-\mathbf{1}$. Докажите, что если $k \geqslant \mathbf{6}$, то эти значения равны.

Задача №5. Высоты AA' и CC' остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка B_0 — середина стороны AC. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой $A'C'$.

Задача №6. Натуральные числа покрашены в N цветов. Чисел каждого цвета бесконечно много. Известно, что цвет полусуммы двух различных чисел одной четности зависит только от цветов слагаемых (например, полусумма синего и красного всегда жёлтая).

(а) Докажите, что полусумма чисел одной четности одного цвета всегда окрашена в тот же цвет.

(б) При каких N такая раскраска возможна?

Закрытие олимпиады пройдёт 23.03.2008 в Главном здании МГУ. Начало в 9.00.
Победители олимпиады будут приглашены на отборочный тур по формированию команды Москвы на Всероссийскую олимпиаду 24 марта 2008 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru

LXXI Московская математическая олимпиада
10 класс 09.03.2008
Задача №1. Аудитория имеет форму правильного шестиугольника со стороной 3 м. В каждом углу установлен храпометр, определяющий число спящих студентов на расстоянии, не превышающем 3 м. Сколько всего спящих студентов в аудитории, если сумма показаний храпометров равна 7?
Задача №2. Андрей и Борис играют в следующую игру. Изначально на числовой прямой в точке p стоит робот. Сначала Андрей говорит расстояние, на которое должен сместиться робот. Потом Борис выбирает направление, в котором робот смещается на это расстояние. И так далее. При каких p Андрей может добиться того, что за конечное число ходов робот попадет в одну из точек 0 или 1 вне зависимости от действий Бориса?
Задача №3. Все целые числа от −33 до 100 включительно расставили в некотором порядке и рассмотрели суммы каждых двух соседних чисел. Оказалось, что среди них нет нулей. Тогда для каждой такой суммы нашли число ей обратное. Полученные числа сложили. Могло ли в результате получится целое число?
Задача №4. Некоторый многочлен с целыми коэффициентами принимает в k целых точках значения среди чисел от 1 до k − 1. Докажите, что если k ⩾ 6, то эти значения равны.
Задача №5. Высоты AA′ и CC′ остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка B0 — середина стороны AC. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB0 и HB0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой A′C′.
Задача №6. Натуральные числа покрашены в N цветов. Чисел каждого цвета бесконечно много. Известно, что цвет полусуммы двух различных чисел одной четности зависит только от цветов слагаемых (например, полусумма синего и красного всегда жёлтая).
(а) Докажите, что полусумма чисел одной четности одного цвета всегда окрашена в тот же цвет.
(б) При каких N такая раскраска возможна?
Закрытие олимпиады пройдёт 23.03.2008 в Главном здании МГУ. Начало в 9.00.
Победители олимпиады будут приглашены на отборочный тур по формированию команды Москвы на Всероссийскую олимпиаду 24 марта 2008 года.
Подробную информацию смотрите на сайте http://www.mccme.ru