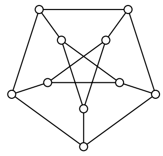
LXX МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

4 марта 2007 года — 10 класс

1. На сторонах единичного квадрата отметили точки K, L, M и N так, что прямая KM параллельна двум сторонам квадрата, а прямая LN — двум другим сторонам квадрата. Отрезок KL отсекает от квадрата треугольник периметра 1. Треугольник какой площади отсекает от квадрата отрезок MN?



2. Можно ли покрасить 15 отрезков, изображенных на рисунке, в 3 цвета так, чтобы никакие 2 отрезка одного цвета не имели общего конца?

3. Существуют ли такие натуральные числа x и y, что x^2+x+1 является натуральной степенью y, а y^2+y+1 — натуральной степенью x?

4. Капитан Врунгель в своей каюте раскладывает пасьянс. Перетасованная колода из 52 карт разложена по кругу, одно место свободно. Матрос Фукс, не отходя от штурвала и не зная начальной раскладки, называет карту. Если эта карта лежит рядом со свободным местом, Врунгель передвигает ее на это место, не сообщая Фуксу. Иначе ничего не происходит. Потом Фукс называет еще одну карту, Врунгель совершает аналогичное действие, и так сколько угодно раз, пока Фукс не скажет «хватит». Фукс выиграет, если скажет «хватит» в тот момент, когда каждая карта окажется не на том месте, на котором была вначале. Может ли Фукс выиграть наверняка?

5. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в O. X — произвольная точка внутри треугольника ABC, такая, что $\angle XAB = \angle XBC = \varphi$, а P — такая точка, что $PX \perp OX$, $\angle XOP = \varphi$, причем углы $\angle XOP$ и $\angle XAB$ одинаково ориентированы. Доказать, что все такие точки P лежат на одной прямой.

6. С ненулевым числом разрешается проделывать следующие операции: $x \mapsto \frac{1+x}{x}$, $x \mapsto \frac{1-x}{x}$. Верно ли, что из каждого ненулевого рационального числа можно получить каждое рациональное число с помощью конечного числа таких операций?

Закрытие олимпиады состоится 18 марта 2007 г. Подробная информация (задачи, решения, результаты, информация о закрытии) на сайте www.mccme.ru