66 Московская математическая олимпиада

Олимпиада состоялась 2 марта 2003 года.

Решения задач опубликованы здесь:
HTML: 8 класс, 9 класс, 10 класс, 11 класс

Условия задач

8 класс | 9 класс | 10 класс | 11 класс
(на выполнение заданий во всех классах отводилось 5 астрономических часов).

8 класс

1. В семье 4 человека. Если Маше удвоят стипендию, общий доход всей семьи возрастет на 5%, если вместо этого маме удвоят зарплату - на 15%, если же зарплату удвоят папе - на 25%. На сколько процентов возрастет доход всей семьи, если дедушке удвоят пенсию?

2. Придумайте десятизначное число, в записи которого нет нулей, такое что при прибавлении к нему произведения его цифр получается число с таким же произведением цифр.

3. Можно ли покрасить некоторые клетки доски 8*8 так, чтобы в любом квадрате 3*3 было ровно 5 закрашенных клеток, а в каждом прямоугольнике 2*4 (вертикальном или горизонтальном) - ровно 4 закрашенные клетки?

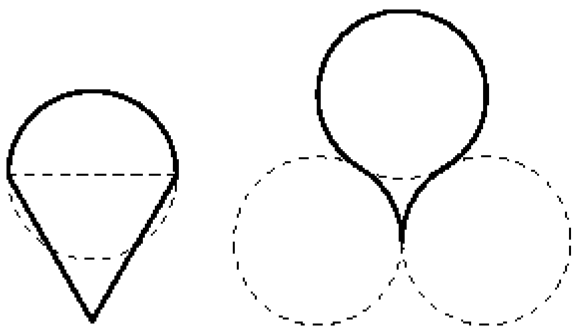
4. В треугольнике ABC на сторонах AC и BC взяты точки X и Y такие, что $\angle ABX = \angle YAC$, $\angle AYB = \angle BXC$, $XC = YB$. Найдите углы треугольника ABC.

5. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

6. Боря задумал целое число, большее чем 100. Кира называет целое число, большее чем 1. Если Борино число делится на это число, Кира выиграла, иначе Боря вычитает из своего числа названное, и Кира называет следующее число. Ей запрещается повторять числа, названные ранее. Если Борино число станет отрицательным - Кира проигрывает. Есть ли у нее выигрышная стратегия?

9 класс

1. Хулиганы Джей и Боб на уроке черчения нарисовали головастиков (четыре окружности на рисунке - одного радиуса, треугольник - равносторонний, горизонтальная сторона этого треугольника - диаметр окружности). Какой из головастиков имеет бо'льшую площадь?



2. Произведение пяти чисел не равно нулю. Каждое из этих чисел уменьшили на единицу, при этом их произведение не изменилось. Приведите пример таких чисел.

3. В магазине три этажа, перемещаться между которыми можно только на лифте. Исследование посещаемости этажей магазина показало, что с начала рабочего дня и до закрытия магазина:
1) из покупателей, входящих в лифт на втором этаже, половина едет на первый этаж, а половина - на третий;
2) среди покупателей, выходящих из лифта, меньше трети делает это на третьем этаже.
На какой этаж покупатели чаще ездили с первого этажа, на второй или на третий?

4. Есть шоколадка в форме равностороннего треугольника со стороной n, разделенная бороздками на равносторонние треугольники со стороной 1. Играют двое. За ход можно отломать от шоколадки треугольный кусок вдоль бороздки, съесть его, а остаток передать противнику. Тот, кто получит последний кусок - треугольник со стороной 1, - победитель. Тот, кто не может сделать ход, досрочно проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

5. В окружность вписан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. Пусть K - середина дуги BC, не содержащей точку A; N - середина отрезка AC, M - точка пересечения луча KN с окружностью. В точках A и C проведены касательные к окружности, которые пересекаются в точке E. Докажите, что $\angle EMK = 90^o$.

6. В тюрьму поместили 100 узников. Надзиратель сказал им:
"Я дам вам вечер поговорить друг с другом, а потом рассажу по отдельным камерам, и общаться вы больше не сможете. Иногда я буду одного из вас отводить в комнату, в которой есть лампа (вначале она выключена). Уходя из комнаты, вы можете оставить лампу как включенной, так и выключенной.

Если в какой-то момент кто-то из вас скажет мне, что вы все уже побывали в комнате, и будет прав, то я всех вас выпущу на свободу. А если неправ - скормлю всех крокодилам. И не волнуйтесь, что кого-нибудь забудут - если будете молчать, то все побываете в комнате, и ни для кого никакое посещение комнаты не станет последним."

Придумайте стратегию, гарантирующую узникам освобождение.

10 класс

1. Существуют ли такие натуральные числа a, b и c, что у каждого из уравнений
$ax^2+bx+c=0$,
$ax^2+bx-c=0$,
$ax^2-bx+c=0$,
$ax^2-bx-c=0$
оба корня - целые?

2. По рёбрам выпуклого многогранника с 2003 вершинами проведена замкнутая ломаная, проходящая через каждую вершину ровно один раз. Докажите, что в каждой из частей, на которые эта ломаная делит поверхность многогранника, количество граней с нечётным числом сторон нечётно.

3. Пусть P(x) - многочлен со старшим коэффициентом 1, а последовательность целых чисел a_1, a_2, ... такова, что $P(a_1)=0$, $P(a_2)=a_1$, $P(a_3)=a_2$ и т. д. Числа в последовательности не повторяются. Какую степень может иметь P(x)?

4. Пусть M - точка пересечения медиан в ΔABC. На перпендикулярах, опущенных из M на стороны BC, AC и AB, взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно, причём $A_1B_1 \perp MC$ и $A_1C_1 \perp MB$. Докажите, что M является точкой пересечения медиан и в $\Delta A_1B_1C_1$.

5. В стране несколько городов, соединённых дорогами с односторонним и двусторонним движением. Известно, что из каждого города в любой другой можно проехать ровно одним путём, не проходящим

два раза через один и тот же город. Докажите, что страну можно разделить на три губернии так, чтобы ни одна дорога не соединяла два города из одной губернии.

6. Дана бесконечная последовательность многочленов $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... Всегда ли существует конечный набор функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_N(x)$, композициями которых можно записать любой из них (например, $P_1(x)=f_2(f_1(f_2(x)))$)?

11 класс

1. Для положительных чисел x, y, z выполнено равенство

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}=\frac{x^2}{z}+\frac{z^2}{y}+\frac{y^2}{x}.$$

Докажите, что хотя бы два из чисел x, y, z равны между собой.

2. Дан многочлен P(x) степени 2003 с действительными коэффициентами, причем старший коэффициент равен 1. Имеется бесконечная последовательность целых чисел a_1, a_2, ..., такая что $P(a_1)=0$, $P(a_2)=a_1$, $P(a_3)=a_2$ и т. д. Докажите, что не все числа в последовательности a_1, a_2, ... различны.

3. Дан вписанный четырехугольник ABCD. Точки P и Q симметричны точке C относительно прямых AB и AD соответственно. Докажите, что прямая PQ проходит через ортоцентр (точку пересечения высот) H треугольника ABD.

4. По периметру круглого торта диаметром n/π метров расположены n вишенок. Если на концах некоторой дуги находятся вишенки, то количество остальных вишенок на этой дуге меньше, чем длина дуги в метрах. Докажите, что торт можно разрезать на n равных секторов так, что в каждом куске будет по вишенке.

5. У выпуклого многогранника внутренний двугранный угол при каждом ребре острый. Сколько может быть граней у многогранника?

6. На берегу круглого острова Гдетотам расположено 20 деревень, в каждой живет по 20 борцов. Был проведен турнир, в котором каждый борец встретился со всеми борцами из всех других деревень. Деревня А считается сильнее деревни Б, если хотя бы k поединков между борцами из этих деревень заканчивается победой борца из деревни А. Выяснилось, что каждая деревня сильнее следующей за ней по часовой стрелке. Какое наибольшее значение может иметь k? (У всех борцов разная сила, и в поединке всегда побеждает сильнейший.)

7. Дано равенство

$$(a^{m_1}-1)\ldots(a^{m_n}-1)=(a^{k_1}+1)\ldots(a^{k_l}+1),$$

где a, n, l и все показатели степени - натуральные числа, причем a>1. Найдите все возможные значения числа a.
