65 Московская математическая олимпиада

Олимпиада состоялась 3 марта 2002 года.

Список победителей смотрите здесь, результаты проверки работ (список оценок по регистрационным номерам участников) - здесь.

Информацию о формировании команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду (Майкоп, 21-29.04.2002) смотрите здесь.

Условия и решения задач

8 класс | 9 класс | 10 класс | 11 класс
(на выполнение заданий во всех классах отводилось 5 астрономических часов).

8 класс

(решения задач 8 класса смотрите здесь)

1. На острове 2/3 всех мужчин женаты и 3/5 всех женщин замужем. Какая доля населения острова состоит в браке?

2. Квадрат суммы цифр числа A равен сумме цифр числа A^2. Найдите все такие двузначные числа A.

3. Данао кружность с диаметром AB. Другая окружность с центром в A пересекает отрезок AB в точке C, причём AC<(1/2)AB. Общая касательная двух окружностей касается первой окружности в точке D. Докажите, что прямая CD перпендикулярна AB.

4. Двое игроков по очереди выставляют на доску 65*65 по одной шашке. При этом ни в одной линии (горизонтали или вертикали) не должно быть больше двух шашек. Кто не может сделать ход - проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

5. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются в точке M.
Докажите, что если угол AMB
а) прямой;
б) острый;
то AC+BC>3AB.

6. В клетчатом прямоугольнике m*n каждая клетка может быть либо живой, либо мёртвой. Каждую минуту одновременно все живые клетки умирают, а те мёртвые, у которых было нечётное число живых соседей (по стороне), оживают.
Укажите все пары (m, n), для которых найдётся такая начальная расстановка живых и мёртвых клеток, что жизнь в прямоугольнике будет существовать вечно (то есть в каждый момент времени хотя бы одна клетка будет живой)?

9 класс

(решения задач 9 класса смотрите здесь)

1. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде "налево" некоторые повернулись налево, некоторые - направо, а остальные - кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

2. Пусть a, b, c - стороны треугольника, Докажите неравенство
$a^3+b^3+3abc>c^3$

3. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках E и D соответственно. Отрезок DE пересекает стороны AB и BC соответственно в точках F и G. Пусть I - точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Докажите, что четырёхугольник BFIG - ромб.

4. Найдите все целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению
$x^4-2y^2=1$.

5. В ряд расположили n лампочек и зажгли некоторые из них. Каждую минуту после этого все лампочки одновременно меняют состояние по следующему правилу. Те лампочки, которые горели на прошлой минуте, гаснут. Те, которые на прошлой минуте не горели и соседствовали ровно с одной горящей лампочкой, загораются. При каких n можно так зажечь некоторые лампочки в начале, чтобы потом в любой момент нашлась хотя бы одна горящая лампочка?

6. Остроугольный треугольник разрезали прямолинейным разрезом на две (не обязательно треугольные) части, затем одну из этих частей - опять на две части, и так далее: на каждом шаге выбирали любую из уже имеющихся частей и разрезали её (по прямой) на две. Через несколько шагов оказалось, что исходный треугольник распался на несколько треугольников. Могут ли все они быть тупоугольными?

10 класс

(решения задач 10 класса смотрите здесь)

1. Тангенсы углов треугольника - натуральные числа. Чему они могут быть равны.

2. Про положительные числа a, b, c известно, что $(1/a)+(1/b)+(1/c)\geq a+b+c$. Докажите, что $a+b+c\geq 3abc$.

3. В выпуклом четырёхугольнике ABCD точки E и F являются серединами сторон BC и CD соответственно. Отрезки AE, AF, BF делят четырёхугольник на 4 треугольника, площади которых равны последовательным натуральным числам. Каково наибольшее значение площади треугольника ABD?

4. Каждый зритель, купивший билет в первый ряд кинотеатра, занял одно из мест в первом ряду. Оказалось, что все места в первом ряду заняты, но каждый зритель сидит не на своём месте. Билетёр может менять местами соседей, если оба сидят не на своих местах. Всегда ли он может рассадить всех на свои места?

5. В городе Удоеве выборы мэра проходят следующим образом. Если в очередном туре голосования никто из кандидатов не набрал больше половины голосов, то проводится следующий тур с участием всех кандидатов, кроме последнего по числу голосов. (Никогда два кандидата не набирают голосов поровну; если кандидат набрал больше половины голосов, то он становится мэром и выборы заканчиваются.) Каждый избиратель в каждом туре голосует за одного из кандидатов. Если это кандидат вышел в следующий тур, то избиратель снова голосует за него. Если же кандидат выбыл, то все его избиратели голосуют за одного и того же кандидата из числа оставшихся.
На очередных выборах баллотировалось 2002 кандидата. Мэром стал Остап Бендер, занявший в первом туре k-е место по числу голосов. Определите наибольшее возможное значение k, если Остап Бендер был избран
а) в 1002-м туре;
б) в 1001-м туре.

6. Можно ли раскрасить все точки квадрата и круга в чёрный и белый цвета так, чтобы множества белых точек этих фигур были подобны друг другу и множества чёрных точек также были подобны друг другу (возможно с различными коэффициентами подобия).

11 класс

(решения задач 11 класса смотрите здесь)

1. Тангенсы углов треугольника - натуральные числа. Чему они могут быть равны.

2. Докажите, что на графике функции $y=x^3$ можно отметить такую точку A, а на графике функции $y=x^3+|x|+1$ - такую точку B, что расстояние AB не превышает 1/100.

3. Каждый зритель, купивший билет в первый ряд кинотеатра, занял одно из мест в первом ряду. Оказалось, что все места в первом ряду заняты, но каждый зритель сидит не на своём месте. Билетёр может менять местами соседей, если оба сидят не на своих местах. Всегда ли он может рассадить всех на свои места?

4. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2002-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в последовательности найдётся некоторое число, начиная с которого каждое число равно сумме всех предыдущих.

5. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 - высоты остроугольного треугольника ABC; O_A, O_B, O_C центры вписанных окружностей треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1, соответственно; T_A, T_B, T_C - точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, CA, AB соответственно. Докажите, что все стороны шестиугольника $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ равны.

6. В городе Удоеве выборы мэра проходят следующим образом. Если в очередном туре голосования никто из кандидатов не набрал больше половины голосов, то проводится следующий тур с участием всех кандидатов, кроме последнего по числу голосов. (Никогда два кандидата не набирают голосов поровну; если кандидат набрал больше половины голосов, то он становится мэром и выборы заканчиваются.) Каждый избиратель в каждом туре голосует за одного из кандидатов. Если это кандидат вышел в следующий тур, то избиратель снова голосует за него. Если же кандидат выбыл, то все его избиратели голосуют за одного и того же кандидата из числа оставшихся.
На очередных выборах баллотировалось 2002 кандидата. Мэром стал Остап Бендер, занявший в первом туре k-е место по числу голосов. Определите наибольшее возможное значение k, если Остап Бендер был избран
а) в 1002-м туре;
б) в 1001-м туре.