

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2015/2016 год. Первый тур

Задачи для 9 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Вершины правильного 12-угольника покрашены в красный и синий цвета. Известно, что если выбрать любые три вершины, образующие равносторонний треугольник, то как минимум две из них окрашены в красный цвет. Докажите, что найдётся квадрат, как минимум три вершины которого красные.
2. Натуральное число называется красивым, если оно равно произведению факториалов простых чисел (не обязательно различных). Положительное рациональное число называется практичным, если оно равно отношению двух красивых натуральных чисел. Докажите, что любое положительное рациональное число — практичное.
3. В тараканьих бегах участвуют 27 тараканов. В каждом забеге бегут три таракана. Скорости всех тараканов различны и постоянны в течение всех забегов. После каждого забега мы узнаём, в каком порядке его участники пришли к финишу. Мы хотели бы узнать двух самых быстрых тараканов (в правильном порядке). Хватит ли для этого 14 забегов?
4. В треугольнике ABC угол B равен 30° , а угол C равен 105° . Точка D — середина стороны BC . Найдите угол BAD .
5. У Васи есть 12 палочек, длина каждой из которых — натуральное число, не превосходящее 56. Докажите, что из каких-то трёх палочек можно сложить треугольник.
6. Найдите хотя бы одно число, произведение всех натуральных делителей которого равно 10^{90} .
7. Хорошо известно, что $3^2 + 4^2 = 5^2$. Менее известно, что $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. А существует ли 2015 последовательных натуральных чисел, таких что сумма квадратов первых 1008 из них равна сумме квадратов последних 1007?