Международная олимпиада “Формула Единства” 2012/13

Решения задач второго тура для 9–10 классов

1. В числе 123456789 можно взять любые 2 цифры одинаковой четности и заменить каждую из них на среднее арифметическое. Можно ли такими операциями получить число, большее 800000000?

Решение. Да, можно. $123456789 \to 222456789 \to 322356789 \to 422346789 \to 522345789 \to 622345689 \to 722345679 \to 822345678$.

2. Сумма трех различных натуральных чисел равна 2013. Какое наибольшее значение может принимать их НОД?

Решение. Ответ: 183. Примером трех чисел с суммой 2013 и наибольшим общим делителем 183 могут служить $183, 183 \cdot 2 = 366, 183 \cdot 8 = 1464$. Докажем, что значение d наибольшего общего делителя не может быть больше 183. В самом деле, если обозначить наши числа da, db, dc, то $2013 = d(a+b+c)$. Заметим, что a, b, c — различные числа, поэтому их сумма $a+b+c$ строго больше 3. Но она делит 2013, а следующий после 3 делитель числа 2013 – это 11. Таким образом, $a+b+c \geq 11$, $d = 2013/(a+b+c) \leq 2013/11 = 183$, что и требовалось.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки X и Y соответственно. Пусть Z – точка пересечения AY и CX. Оказалось, что $AY = YC$ и $AB = CZ$. Докажите, что точки B, Y, Z, X лежат на одной окружности.

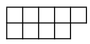
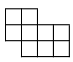
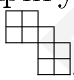
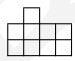
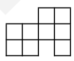
Решение. Рассмотрим описанные окружности треугольников CZY и ABY. Их хорды CZ и AB равны, а углы $\angle CYZ$ и $\angle AYB$, опирающиеся на эти хорды, составляют в сумме π. Отсюда следует, что равны сами окружности. Тогда углы $\angle CZY$ и $\angle ABY$, опирающиеся на равные хорды CY, AY этих равных окружностей, либо равны, либо дают в сумме π. Второй случай невозможен, поскольку тогда сумма четырех ($\angle CYZ$, $\angle AYB$, $\angle CZY$,$\angle ABY$) из шести углов треугольников CZY и ABY давала бы в сумме 2π, что невозможно: 2π есть сумма всех шести углов двух этих треугольников. Следовательно, $\angle CZY = \angle ABY$, тогда $\angle XBY + \angle XZY = \pi$, откуда и следует, что четырехугольник $BXZY$ вписан в окружность.

4. Для положительных чисел x, y и z докажите неравенство

$$(1 + x + 2x^2)(2 + 3y + y^2)(4 - 11z + 8z^2) \geq 7xyz.$$

Решение. Поделим на xyz и перепишем неравенство в равносильном виде $(1/x + 1 + 2x)(2/y + 3 + y)(4/z - 11 + 8z) \geq 7$. Оценим каждую из скобок по отдельности, применяя неравенство о средних $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ к парам чисел $(1/x, 2x), (2/y, y), (4/z, 8z)$. Получим, что

$$(1/x + 1 + 2x)(2/y + 3 + y)(4/z - 11 + 8z) \geq (2\sqrt{2} + 1)(2\sqrt{2} + 3)(8\sqrt{2} - 11) =$$
$$= (8\sqrt{2} + 11)(8\sqrt{2} - 11) = 128 - 121 = 7,$$

5. В конструкторе n плоских фигурок из 9 квадратиков, каждая из которых имеет вид , , , , или . Докажите, что если n нечетно, то из них нельзя сложить прямоугольник $9 \times n$.

Решение. Предположим, что n нечетно, но прямоугольник сложить удалось. Не умаляя общности, в нем 9 строк и n столбцов. Закрасим 5 строк через 1, тогда всего окажется закрашено $5n$ клеток, а в каждой фигурке, как легко видеть, не более 5. Следовательно, в каждой фигурке окажется закрашено ровно 5 клеток. Нетрудно убедиться, что каждая фигурка, содержащая ровно 5 закрашенных клеток, содержит четное число клеток в каждой незакрашенной строчке. Тогда, рассматривая любую одну незакрашенную строчку, убеждаемся, что наши фигурки занимают в ней четное число клеток — с другой же стороны, клеток в ней n. Отсюда n четно — противоречие.