

**МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ОЛИМПИАДА
«ФОРМУЛА ЕДИНСТВА», 2012–13 Г.**

Задачи 1 тура для учащихся 9 и 10 классов

1. Толик умножил пятизначное число на сумму его цифр. Потом Толик умножил результат на сумму его (результата) цифр. Удивительно, но получилось опять пятизначное число. Какое число Толик умножал в первый раз? (Найдите все возможные варианты ответа.)
2. В квадрате 7×7 каждый квадратик 1×1 покрасили в красный, желтый или зеленый цвет. Докажите, что существуют строка, столбец и цвет, такие что и в строке, и в столбце есть по крайней мере 3 квадратика этого цвета.
3. Сколько есть способов выписать в строку n букв А и n букв В так, чтобы в строке не встречался фрагмент АВВ?
4. В остроугольном треугольнике ABC угол C равен 45° градусам, AA_1 и BB_1 — высоты. Докажите, что $A_1B_1 = \sqrt{(A_1B^2 + A_1C^2)}/2$.
5. Вдоль окружности расставлено 100 чисел, каждое из которых равно либо 2, либо 5, либо 9, причем никакие два равных числа не стоят рядом. Числа разбили на 50 пар рядом стоящих. Числа в парах перемножили и полученные 50 произведений записали на первую доску. Затем эти же 100 чисел разбили на 50 пар рядом стоящих другим способом, числа в парах снова перемножили и произведения записали на вторую доску. Докажите, что суммы чисел, написанных на первой и второй досках, равны.
6. Натуральные числа n и k таковы, что $k^2 + n^2 - k$ делится на kn . Докажите, что k — точный квадрат.