

Всесибирская олимпиада школьников 2012-2013 г.г. по математике
Второй этап
11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Какие натуральные числа можно представить в виде дроби $\frac{x^2}{y^3}$, где x и y – некоторые натуральные числа?

11.2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины A , равен 60 градусов. Найти углы треугольника ABC .

11.3. Найти все решения уравнения: $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} = \frac{1}{3}$ в действительных числах. Здесь $[x]$ – целая часть x – обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x , а $\{x\}$ – дробная часть x – равна $x - [x]$. Например, $[\sqrt{2}] = 1, [-\frac{1}{2}] = -1, \{\sqrt{10}\} = \sqrt{10} - 3$.

11.4. Известно, что длины сторон треугольника – последовательные натуральные числа, а радиус его вписанной окружности равен 4 . Найти радиус описанной окружности этого треугольника.

11.5. Найти все решения уравнения $(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b})(1 + \frac{1}{c}) = 3$ в целых числах.