

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 9 КЛАСС.

1. Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(f(\sqrt{2})) = 0$? (А. Храбров)

2. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Известно, что $AD > BC$. На ее описанной окружности отмечена точка E , такая, что $BE \perp AD$. Докажите, что $AE + BC > DE$. (А. Пастор)

3. Клетки квадрата 2015×2015 раскрашены в 4 цвета. Рассматриваются все способы размещения внутри этого квадрата четырехклеточной фигурки вида $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ (фигурку можно поворачивать). Докажите, что фигурка содержит клетки четырех разных цветов менее чем в 51% из этих способов. (Д. Карпов)

4. Положительные числа x, y, z удовлетворяют условию

$$xy + yz + zx + 2xyz = 1.$$

Докажите, что $4x + y + z \geq 2$. (А. Храбров)

.....

Олимпиада 2015 года. II тур. 9 класс. Выводная аудитория.

5. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Описанная окружность треугольника ABC пересекает стороны AD и DC в точках P и Q соответственно. Описанная окружность треугольника ADC пересекает стороны AB и BC в точках S и R соответственно. Оказалось, что четырёхугольник $PQRS$ — параллелограмм. Докажите, что и четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. (С. Берлов)

6. В межгалактической империи 10^{2015} планет, любые две из которых соединены двусторонней прямой космической линией. Этими линиями владеют 2015 транспортных компаний. Император хочет закрыть k компаний так, чтобы, пользуясь только рейсами оставшихся, можно было бы с любой планеты добраться до любой другой. При каком наибольшем k он гарантированно сможет осуществить свой план? (Д. Карпов)

7. Последовательность натуральных чисел определена следующим образом: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, a_n — наименьшее натуральное число, не встречавшееся раньше, взаимно простое с a_{n-1} и не взаимно простое с a_{n-2} . Докажите, что в этой последовательности встречаются ровно по одному разу все натуральные числа. (М. Иванов)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 10 КЛАСС.

1. Не менее половины всех палат в лагере — четырёхместные, остальные — трёхместные. Не менее двух третей всех девочек в лагере живут в трёхместных палатах. Докажите, что более 35 % личного состава составляют мальчики. (Все палаты заполнены, мальчики и девочки в одной палате не живут.) (А. Солянин)

2. Шахматная фигура бобёр ходит на две клетки по вертикали или по горизонтали в любом направлении. В какое наименьшее число цветов можно раскрасить доску 100×100 так, чтобы любые две клетки, отстоящие на ход коня или на ход бобра, были разного цвета? (А. Голованов)

3. Биссектрисы углов A и D выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K ; биссектрисы углов B и C — в точке L . Докажите, что

$$2KL \geq |AB - BC + CD - DA|.$$

(А. Смирнов, Ф. Петров)

4. Назовем натуральное число n олимпиадным, если найдется такой квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(f(\sqrt{n})) = 0$. Найдите наибольшее олимпиадное число, не превосходящее 2015. (А. Храбров)

.....

Олимпиада 2015 года. II тур. 10 класс. Выводная аудитория.

5. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ выполнены равенства $\angle BCA = \angle BEA = \frac{1}{2}\angle BDA$, $\angle BDC = \angle EDA$. Докажите, что $\angle DEB = \angle DAC$.

(Ф. Петров, по мотивам задачи 11.7)

6. Последовательность натуральных чисел определена следующим образом: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, a_n — наименьшее натуральное число, не встречавшееся раньше, взаимно простое с a_{n-1} и не взаимно простое с a_{n-2} . Докажите, что в этой последовательности встречаются ровно по одному разу все натуральные числа.

(М. Иванов)

7. В выпуклом n -угольнике провели все стороны, а также все диагонали из одной вершины. На полученных $2n - 3$ отрезках написали положительные числа. Разрешается взять четырехугольник $ABCD$ такой, что все его стороны и диагональ AC — проведенные отрезки, стереть диагональ AC , провести диагональ BD и написать на ней число $(xz + yt)/w$, где x, y, z, t, w — числа на отрезках AB, BC, CD, DA, AC соответственно. Докажите, что если в какой-то момент проведенными окажутся те же $2n - 3$ отрезка, что в начале, то на них будут написаны те же числа, что и в начале. (фольклор)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
II ТУР. 11 КЛАСС.

1. Числа x и y удовлетворяют условиям $x^2 + y^2 = 1$ и $20x^3 - 15x = 3$. Найдите $|20y^3 - 15y|$. (К. Тыщук)
2. Натуральные числа a и b больше 1. Известно, что числа $a^2 + b$ и $a + b^2$ простые. Докажите, что числа $ab + 1$ и $a + b$ взаимно простые. (С. Берлов)
3. Набор разновесов содержит по одной гире каждого из весов 1, 3, 5, 7, 9, ... граммов. Для натурального $n > 1$ докажите, что количество способов набрать этими гирями n граммов не больше, чем количество способов набрать $n + 1$ грамм. (Ф. Петров)
4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Описанная окружность треугольника ABC пересекает стороны AD и DC в точках P и Q соответственно. Описанная окружность треугольника ADC пересекает стороны AB и BC в точках S и R соответственно. Оказалось, что четырёхугольник $PQRS$ — параллелограмм. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — также параллелограмм. (С. Берлов)

.....
Олимпиада 2015 года. II тур. 11 класс. Выводная аудитория.

5. Бумажный квадрат со стороной 100 разрезали 99 вертикальными и 99 горизонтальными прямыми, получив таким образом 10 000 прямоугольников (необязательно с целыми сторонами). У какого наименьшего количества прямоугольников площадь может оказаться меньшей или равной 1? (Н. Филонов, Д. Ростовский)
6. В стране Центумии некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит ровно 100 дорог. Пучком называется набор из 10 дорог, выходящих из одного города. Докажите, что все дороги можно разбить на несколько пучков. (С. Берлов)
7. На биссектрисе BL остроугольного треугольника ABC выбрали такую точку K , что $\angle AKC - \angle ABC = 90^\circ$. На продолжении биссектрисы BL за точку L выбрали такую точку S , что $\angle ASC = 90^\circ$. Точка T диаметрально противоположна точке K на описанной окружности треугольника AKC . Докажите, что прямая ST проходит через середину дуги ABC . (С. Берлов)