

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 6 КЛАСС.

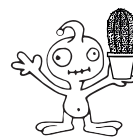
1. В гильдии ювелиров есть два кольца по цене 10 и 30 гулденов и 4 драгоценных камня по цене 60, 70, 80 и 90 гулденов. В гильдии можно заказать изготовление перстня Мудрости, для этого требуется кольцо и два драгоценных камня. Цена такого заказа равна произведению цен требуемых компонентов. У послушника Васи есть всего 200 000 гулденов. Сможет ли он заказать себе два перстня?

(А. Храбров, К. Сухов, К. Козась)

2. В сидячем вагоне поезда стоят трехместные скамейки для пассажиров: 20 рядов по 2 скамейки. Костя заметил, что на каждом ряду сидит 3 или 5 человек. Потом Костя подсчитал, на скольких скамейках сидит 3 человека и на скольких — один человек. Найдите сумму Костиных чисел.

(К. Козась)

3. На межпланетный фестиваль «Радуга» прибыли 107 зелёных и фиолетовых человечков. Зелёные человечки правильно воспринимают цвета, а фиолетовым, к сожалению, зелёный кажется фиолетовым, и наоборот. Посмотрев вокруг, каждый участник фестиваля подошёл к кому-то, сказал «Какой вы фиолетовый!» и подарил кактус. Докажите, что хотя бы один человек на фестивале не получил такого подарка.



(А. Чухнов)

4. Антиподом натурального числа называется число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Федя взял пятизначное число, в записи которого нет нулей и все цифры различны, причем первая цифра больше пятой. Далее Федя вычел из этого числа его антипод; результат оказался пятизначным числом. Этот результат Федя сложил с его антиподом. Какие ответы могли получиться у Феди? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

(Ф. Бахарев)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 7 КЛАСС.

1. В сидячем вагоне поезда стоят трехместные скамейки для пассажиров: 20 рядов по 2 скамейки. Костя заметил, что на каждом ряду сидит 3 или 5 человек. Потом Костя подсчитал, на скольких скамейках сидит 3 человека и на скольких — один человек. Найдите сумму Костиных чисел. (К. Козась)

2. На новогодний праздник пришли 99 мстительных детей. В гардеробе каждый из них обругал кого-то из остальных, причём никто не был обруган дважды. Когда Дед Мороз предложил всем загадать по два желания, первым желанием каждого ребенка было получить огромное мороженое, а вторым — чтобы его обидчик не получил мороженое. Докажите, что у кого-то из детей сбудется ровно одно из загаданных желаний. (А. Солюмин)

3. Можно ли прямоугольник разрезать на три прямоугольника A , B , C так, чтобы у A был самый большой периметр, у B самая большая площадь, а у C самая большая диагональ? Не забудьте обосновать ответ. (К. Козась)

4. На извилистой реке расположены три города A , B и C (не обязательно именно в таком порядке и не обязательно в одном часовом поясе). Между городами ходят катера, скорость катера в 6 раз больше скорости реки. Ниже приведен фрагмент расписания, время везде указано местное, каждое путешествие укладывается в один день.

Маршрут	Отправление	Прибытие
Из C в B	7:00	15:00
Из A в C	7:00	20:00
Из B в A	7:00	22:00

Таня, находясь в самом верхнем (по течению реки) из трёх городов, уронила мячик. Через какое время его увидят жители самого нижнего города, если мячу не мешать плыть по течению? (А. Солюмин)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 8 КЛАСС.

1. В сидячем вагоне поезда стоят трехместные скамейки для пассажиров: 20 рядов по 2 скамейки. Костя заметил, что на каждом ряду сидит 3 или 5 человек. Потом Костя подсчитал, на скольких скамейках сидит 3 человека и на скольких — один человек. Найдите сумму Костиных чисел. (К. Козась)

2. Какие простые числа можно представить в виде

$$|n - 1| + |n - 2| + |n - 3| + |n - 4| + |n - 5|$$

при целых n ?

(А. Храбров, В. Франк, Д. Ростовский)

3. На межпланетный фестиваль «Радуга» прибыло 107 зелёных и фиолетовых человечков. Зелёные человечки правильно воспринимают цвета, а фиолетовым, к сожалению, зелёный кажется фиолетовым, и наоборот. Посмотрев вокруг, каждый участник фестиваля подошёл к кому-то, сказал «Какой вы фиолетовый!» и подарил кактус. Какое наименьшее количество человечков могло не получить ни одного кактуса?

(А. Чухнов)

4. На извилистой реке расположены три города A , B и C (не обязательно именно в таком порядке и не обязательно в одном часовом поясе). Между городами ходят катера, скорость катера в 6 раз больше скорости реки. Ниже приведен фрагмент расписания, время везде указано местное, каждое путешествие укладывается в один день.

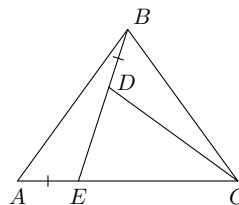
Маршрут	Отправление	Прибытие
Из C в B	7:00	15:00
Из A в C	7:00	20:00
Из B в A	7:00	22:00

Таня, находясь в самом верхнем (по течению реки) из трёх городов, уронила мячик. Через какое время его увидят жители самого нижнего города, если мячу не мешать плыть по течению?

(А. Солянин)

5. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка E , а на отрезке BE — точка D . Известно, что $BD = AE$, $CE = CD = BE$. Докажите, что $\angle B > 60^\circ$.

(А. Смирнов)



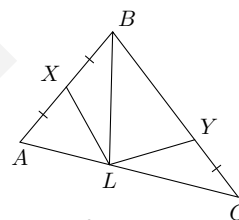
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 9 КЛАСС.

1. В сидячем вагоне поезда стоят трехместные скамейки для пассажиров: 20 рядов по 2 скамейки. Костя заметил, что на каждом ряду сидит 3 или 5 человек. Потом Костя подсчитал, на скольких скамейках сидит 3 человека и на скольких — один человек. Найдите сумму Костиных чисел. (К. Козась)

2. Даны 100 различных натуральных чисел. Они разбиты на 50 пар так, что сумма в каждой паре больше 1000. Докажите, что если выписать все 100 чисел в порядке возрастания, то сумма 40-го и 61-го чисел тоже больше 1000. (С. Берлов, А. Солянин)

3. Натуральные числа a, b таковы, что $p = 8a + 19b$ — простое число. Докажите, что число $n = ab - 7a - 18b + 1$ не делится на p . (Ф. Петров)

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL . Известно, что $\angle ABC = 2\angle ACB$. Точка X — середина стороны AB , а точка Y на стороне BC такова, что $CY = AX$. Докажите, что прямая XY касается описанной окружности треугольника LCY .



(А. Пастор)

5. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$, где $p, q \geq 0$, имеющий два различных вещественных корня. Натуральные числа a и b таковы, что $f(a) < f(b) < 1,001f(a)$. Докажите, что $f(b) - f(a) > 4001$.

(А. Храбров)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 10 КЛАСС.

1. Дано 100 различных натуральных чисел. Они разбиты на 50 пар так, что сумма чисел в каждой паре больше 1000. Докажите, что если выписать все 100 чисел в порядке возрастания, то сумма 50-го и 51-го чисел тоже окажется больше 1000. (С. Берлов)

2. На сторонах AB и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно. Отрезки MD и ND пересекают диагональ AC в точках P и Q соответственно. Оказалось, что четырехугольники $BMPC$, $BNQA$ и $AMNC$ вписанные. Докажите, что $\angle BDN = \angle BDM$. (А. Смирнов)

3. Натуральные числа a, b таковы, что $p = 8a + 19b$ — простое число. Докажите, что число $n = ab - 7a - 18b + 1$ не делится на p . (Ф. Петров)

4. У Саши на калькуляторе есть лишь три кнопки. Они запрограммированы на вычисление трех функций:

$$\frac{x+2}{2x+3}, \quad \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} \quad \text{и} \quad \sin(5x)$$

(при $x = -3/2$ первая кнопка не работает). Никаких других действий этот калькулятор делать не умеет. Изначально на экране горит число $1/2$. Может ли Саша получить на экране число, большее миллиона?

(А. Храбров, А. Смирнов, Ф. Петров)

5. В таблице 8×10 отмечены клетки, лежащие в двух левых столбцах, а также клетки, лежащие в двух нижних строках (всего 32 клетки). Юный шахматист Алёша хочет обойти все эти клетки по разу ходом шахматного короля, начав и закончив движение в левом нижнем углу. Сколькими способами Алёша может осуществить задуманное?

(А. Федотов)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 11 КЛАСС.

1. В выборах царя зверей в зоопарке участвовало четыре кандидата: Кабан, Лев, Медведь и Носорог. Число проголосовавших за Кабана оказалось ровно в 3 раза больше, чем результат Льва в процентах. Число проголосовавших за Льва в 3 раза больше результата Медведя в процентах; число проголосовавших за Медведя в 3 раза больше результата Носорога в процентах. Наконец, число проголосовавших за Носорога в 3 раза больше результата Кабана в процентах. Сколько зверей проголосовало за Кабана? (А. Чухнов)

2. У Саши на калькуляторе всего четыре кнопки. С их помощью можно вычислять функции $x + 5$, x^3 , $\sin x$, $\cos x$. Никаких других действий этот калькулятор делать не умеет. Изначально на экране горело число 2. Можно ли получить на экране число 3? (А. Храбров)

3. В прямоугольной таблице с 21 строками и 70 столбцами расставлены вещественные числа. Известно, что сумма чисел в каждой фигурке вида  равна 1 (при этом фигурка может быть как угодно повернута и перевернута). Найдите сумму чисел в нижней строке.

(С. Берлов, А. Храбров, Д. Ростовский)

4. Найдите все пары натуральных чисел p и q , для которых

$$p^3 - p^2q - 18p = 2q^2 - 3q + 1$$

и число p — простое.

(А. Сольнин, А. Храбров, С. Берлов)

5. Могут ли четыре диагонали параллелепипеда (не обязательно прямоугольного) иметь длины 2, 3, 5 и 11? (Ф. Петров, А. Смирнов)