САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2014 года ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 6 класс.

1. Разрежьте клетчатый прямоугольник размерами 9×10 клеток на несколько квадратов так, чтобы среди них было ровно два квадрата с нечетной стороной. Разрезы должны идти по сторонам клеток.

(*К. Сухов*)

2. Дана дробь $2/3$. Разрешается много раз выполнять следующие операции: прибавлять 2013 к числителю или прибавлять 2014 к знаменателю. Можно ли с помощью только этих операций получить дробь, равную $3/5$? (*К. Кохась*)

3. В ящике у Гарри Поттера 20 шариков — красных, белых и зеленых. Три из них — волшебные, они время от времени меняют цвет (на любой из этих трех). Однажды Гарри Поттер заглянул в ящик и увидел, что красных шариков больше, чем белых, а белых больше, чем зеленых. Заглянув через минуту, он увидел, что все стало наоборот: зеленых больше, чем белых, а белых больше, чем красных. Сколько белых шариков он увидел, когда заглядывал в ящик первый раз? Не забудьте обосновать свой ответ. (*Д. Максимов*)

4. Джентльмены всегда говорят правду знакомым и лгут незнакомым. Собрались как-то 50 джентльменов и каждый сказал каждому из остальных какую-то из фраз: *У меня чётное число знакомых в этой компании* или *У меня нечётное число знакомых в этой компании.* Может ли так быть, что первая фраза была произнесена ровно 2013 раз?

(*А. Солынин*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2014 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 7 класс.

1. Закрасьте несколько клеток таблицы 6×6 так, чтобы в каждой строке было ровно три закрашенных клетки, а в каждом столбце — либо одна, либо четыре. (*Д. Максимов*)

2. Дана дробь 2/3. За одну операцию можно либо прибавить 2013 к числителю имеющийся дроби, либо прибавить 2014 к знаменателю, либо сократить дробь на общий делитель числителя и знаменателя. Можно ли такими операциями получить дробь 3/5? (*К. Кохась*)

3. В ящике у Гарри Поттера 100 шариков — красных, белых и зеленых. Три из них — волшебные, они время от времени меняют цвет (на любой из этих трех). Однажды Гарри Поттер заглянул в ящик и увидел, что красных шариков больше чем белых, а белых больше, чем зеленых. Заглянув через минуту, он увидел, что все стало наоборот: зеленых больше, чем белых, а белых больше, чем красных. Сколько белых шариков он увидел, когда заглядывал в ящик первый раз? (*Д. Максимов*)

4. Клетчатый прямоугольник размерами 19×20 клеток разрезан на несколько квадратов (все разрезы идут по сторонам клеток). Какое наименьшее число квадратов с нечетной стороной может оказаться среди них? (*К. Сухов*)

Санкт-Петербургская олимпиада школьников 2014 года по математике
I тур. 8 класс.

1. Дана дробь $2/3$. Разрешается много раз выполнять следующие операции: прибавлять 2013 к числителю или прибавлять 2014 к знаменателю. Можно ли с помощью только этих операций получить дробь, равную $3/5$? (*К. Кохась*)

2. Клетчатый прямоугольник 629×630 разрезан на несколько квадратов (все разрезы идут по линиям сетки). Какое наименьшее число квадратов с нечетной стороной может оказаться в таком разбиении? Не забудьте объяснить, почему в разбиении не может получиться меньшее число квадратов с нечетной стороной. (*К. Сухов*)

3. Сумасшедший конструктор создал часы с 150 стрелками. Первая стрелка крутится со скоростью один оборот в час, вторая делает 2 оборота в час, …, 150-я стрелка делает 150 оборотов в час. Часы запустили из положения, когда все стрелки смотрели строго вверх. Когда в процессе работы часов встречаются две или более стрелки, эти стрелки немедленно отваливаются. Через какое время после запуска отвалится стрелка, вращающаяся со скоростью 74 оборота в час? (*К. Кохась*)

4. На выборах в Солнечном Городе можно было проголосовать за Винтика, Шпунтика или Кнопочку. После оглашения результатов оказалось, что все кандидаты набрали в сумме 146% голосов. Считавший голоса Незнайка объяснил, что по ошибке подсчитал процент голосов за Винтика не от общего числа проголосовавших, а лишь от числа голосовавших за Винтика или Шпунтика (остальные проценты он подсчитал правильно). Известно, что за Шпунтика проголосовало больше 1 000 избирателей. Докажите, что Винтик набрал больше 850 голосов.
(*А. Солынин*)

5. Диагонали AD и BE выпуклого пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке P. Известно, что $AC = CE = AE$, $\angle APB = \angle ACE$ и $AB + BC = CD + DE$. Докажите, что $AD = BE$. (*А. Смирнов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2014 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 9 класс.

---

1. В ящике у Васи 400 шариков — красных, белых и зеленых. Три из них — волшебные и могут в любой момент поменять цвет на любой из трех перечисленных выше. Вася заглянул в ящик и увидел, что красных шариков больше чем белых, а белых больше, чем зеленых. Через минуту Вася еще раз заглянул в ящик и оказалось, что теперь красных шариков меньше, чем белых, а белых меньше, чем зеленых. Сколько белых шариков он увидел в первый раз? (*Д. Максимов*)

2. Даны числа $a_1, \ldots, a_{10}$. Известно, что у каждого из десяти квадратных трехчленов

$$x^2 - a_1x + a_2, \quad x^2 - a_2x + a_3, \quad \ldots, \quad x^2 - a_9x + a_{10}, \quad x^2 - a_{10}x + a_1$$

не больше одного корня. Докажите, что все числа a_i не превосходят 4. (*К. Сухов*)

3. Клетчатый прямоугольник 2013×2014 разрезан на несколько квадратов (все разрезы идут по линиям сетки). Какое наименьшее число квадратов с нечетной стороной может оказаться среди них? (*К. Сухов*)

4. Дан вписанный пятиугольник $ABCDE$. Известно, что $AC = CD$. Докажите, что если $ABCE$ — трапеция, то и $BCDE$ — трапеция или прямоугольник. (*А. Смирнов*)

5. Дано натуральное число n. Квадрат некоторого натурального числа поделили на n и получили в остатке 8. При делении на n куба того же натурального числа получили в остатке 25. На какое число делили? (*А. Голованов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2014 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I тур. 10 класс.

1. В ящике у Васи 100 шариков — красных, белых и зеленых. Три из них — волшебные и могут в любой момент поменять цвет на любой из трех перечисленных выше. Вася заглянул в ящик и увидел, что красных шариков больше чем белых, а белых больше, чем зеленых. Через минуту Вася еще раз заглянул в ящик и оказалось, что теперь красных шариков меньше чем белых, а белых меньше, чем зеленых. Сколько белых шариков он увидел в первый раз? (*Д. Максимов*)

2. Натуральные числа от 1 до 2014 выписаны по кругу в некотором порядке. Отличница Маша вычислила наибольшие общие делители у всех пар стоящих рядом чисел и заявила, что среди полученных НОДов ровно 1007 четных. Докажите, что она ошиблась.

(*К. Сухов, Д. Максимов*)

3. Дан квадратный трехчлен $x^2 - ax + b$, имеющий два ненулевых корня. Известно, что $|b+1| < a$, и один из его корней по модулю меньше 1. Докажите, что другой корень по модулю больше 1.

(*А. Храбров, Д. Ростовский*)

4. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D, для которой $AC = CD$. На дуге BC описанной окружности треугольника BCD (не содержащей точки D) выбрана точка E, для которой $\angle ACB = \angle ABE$. На продолжении отрезка BC за точку C отмечена точка F, такая что $CE = CF$. Докажите, что $AB = AF$. (*А. Пастор*)

5. Клетчатый прямоугольник $n \times (n + 3)$, где $n > 10$, разрезан на несколько квадратов (все разрезы идут по линиям сетки). Какое наименьшее число квадратов с нечетной стороной может оказаться в таком разбиении? (Ответ может зависеть от n.) (*К. Сухов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2014 года ПО МАТЕМАТИКЕ

I тур. 11 класс.

1. Двоечнику Косте накануне ЕГЭ приснилось правило:

$$\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\lg a}{\lg b}.$$

При каких $a > 1$ это правило не работает ни при каком положительном b? (*К. Кохась*)

2. Саша отметил несколько клеток таблицы 8×13 так, что в любом квадратике 2×2 оказалось нечетное число отмеченных клеток. Затем он отметил еще несколько клеток, в результате чего в каждом квадрате 2×2 стало четное число отмеченных клеток. Какое наименьшее суммарное число клеток могло быть отмечено Сашей? (*С. Берлов*)

3. Дан квадратный трехчлен $f(x)$, старший коэффициент которого равен -1. Известно, что существует такая пара различных чисел u и v, что $f(u) = -v^2$ и $f(v) = -u^2$. Докажите, что существует бесконечно много пар чисел с таким свойством.

(*А. Храбров, Д. Ростовский, С. Берлов*)

4. Все грани тетраэдра $ABCD$ — остроугольные треугольники. Точка I — центр его вписанной сферы, а точка O — центр описанной сферы. Известно, что I лежит в плоскости ABO. Кроме того, известно, что $\angle ABC = 50^\circ$ и $\angle BAC = 60^\circ$. Найдите угол ADB. (*С. Берлов*)

5. Докажите, что для всех натуральных m и n выполнено неравенство

$$[n\sqrt{2}] \cdot [m\sqrt{7}] < [mn\sqrt{14}].$$

Квадратные скобки обозначают целую часть числа. (*А. Голованов*)