

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 6 КЛАСС.

1. Вдоль дороги в ряд стоят 5 домов, в каждом живет хотя бы один человек, и при этом в любых двух разных домах живет разное число людей. Два жителя называются соседями, если они живут в одном доме или в соседних домах. Приведите пример, когда *у каждого жителя* либо ровно 20, либо ровно 30 соседей. (О. Иванова)

2. Из бумажного квадрата 10×10 клеток вырезали по клеточкам несколько квадратов, причем любые два из них имеют разные размеры. Какое наибольшее количество квадратов могло быть вырезано? Поясните, почему нельзя вырезать большее число квадратов. (В. Франк)

3. На доске написаны числа 1, 2, 4, 8. Разрешается умножить любое число на 3 и результат записать на доску вместо исходного числа; либо прибавить 1 к любым двум числам на доске и записать полученные числа вместо исходных. Можно ли в результате этих операций получить 4 числа, произведение которых будет равно 200720082009? (Жюри)

4. В справочнике “Юный Арифмометр” напечатаны все натуральные числа от 1 до 300 000. Владик выписал из справочника все числа, в записи которых встречается фрагмент “23” (двойка, за которой сразу же стоит тройка). А Саша выписал из справочника все числа, в записи которых встречается фрагмент “34”. Кто из мальчиков выписал больше чисел?

(В. Франк)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009 года ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 7 КЛАСС.

1. Вдоль дороги в ряд стоят 5 домов, в каждом живет хотя бы один человек, и при этом в любых двух разных домах живет разное число людей. Два жителя называются соседями, если они живут в одном доме или в соседних домах. Приведите пример, когда у *каждого* жителя либо ровно 20, либо ровно 30 соседей. (О. Иванова)

2. Из бумажного прямоугольника 12×20 клеток вырезали по клеточкам несколько квадратов, причем любые два из них имеют разные размеры. Какое наибольшее количество квадратов могло быть вырезано? Поясните, почему нельзя вырезать большее число квадратов. (В. Франк)

3. Маленькая настоящая жемчужина весит в 5 раз меньше, чем большая фальшивая, а стоит в 7 раз больше. Куча жемчуга весит столько же, сколько весят 170 больших фальшивых жемчужин, а стоит столько, сколько стоят 170 маленьких настоящих. Сколько больших фальшивых жемчужин в этой куче? (К. Козась)

4. В таблице 5×5 расставлены числа от 1 до 25. Разрешается поменять местами числа, находящиеся в соседних клетках в одной строке, если правое больше левого. Аналогично, разрешается поменять местами числа в соседних клетках в одном столбце, если нижнее больше верхнего. Докажите, что с помощью этих операций нельзя получить таблицу, в которой расстановка чисел отличается от исходной лишь тем, что числа в закрашенных клетках поменялись местами.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 8 КЛАСС.

1. Из пяти миллионов болотных кикимор 30 процентов любят тяжелый рок. В то же время, тяжелый рок любят 90 процентов из десяти миллионов писанных красавиц. Докажите, что писаными красавицами является не более половины всех болотных кикимор.

2. В ряд стоит 50 человек, все разного роста. Ровно 15 из них выше своего левого соседа. Сколько человек выше своего правого соседа? Приведите все варианты и докажите, что других нет. (С. Берлов)

3. На сторонах BC и AB треугольника ABC нашлись точки L и K соответственно, такие что AL — биссектриса угла BAC , $\angle ACK = \angle ABC$, $\angle CLK = \angle BKC$. Докажите, что $AC = KB$.

4. Петя поделил с остатком натуральное число на сумму его цифр. И неполное частное, и остаток оказались у Пети равны 2008. Учительница поставила Пете двойку. Докажите, что учительница права.

5. Докажите для чисел a, b, c , больших 1, неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right| + \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right| + \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right| \leq a + b + c.$$

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 9 КЛАСС.

1. Приведите пример четырех натуральных чисел a , b , c и d , имеющих одинаковую сумму цифр, и таких, что $a + b + c + d = 2009$.

2. Незнайка расставил в таблице 10×10 числа от 1 до 100. С этой таблицей разрешается проделывать следующие операции.

1) Выбрать две соседние клетки в одной строке и, если левое число больше правого, поменять эти числа местами.

2) Выбрать две соседние клетки в одном столбце и, если нижнее число больше верхнего, поменять эти числа местами.

Незнайка утверждает, что из его расстановки с помощью описанных операций можно получить любую другую расстановку чисел от 1 до 100 в этой таблице. Докажите, что он ошибается.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки K и L соответственно. Оказалось, что $BL = CK$ и $\angle BKC = \angle CLK$. Кроме того прямая AC касается окружности, описанной около треугольника BCK . Докажите, что AL — биссектриса угла BAC .

4. Сумма чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2009}$ равна нулю. Известно, что

$$|a_1 - 2a_2| = |a_2 - 2a_3| = \dots = |a_{2008} - 2a_{2009}| = |a_{2009} - 2a_1|.$$

Докажите, что $a_1 = a_2 = \dots = a_{2009} = 0$.

(А. Храбров)

5. Натуральное число n дает остаток 4 при делении на 9. Докажите неравенство $\{\sqrt[3]{n}\} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. Здесь через $\{x\}$ обозначена дробная часть числа x , т.е. $\{x\} = x - [x]$, где $[x]$ — целая часть числа x . (А. Храбров)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 10 КЛАСС.

1. В ряд стоит 50 человек, все разного роста. Ровно 15 из них выше своего левого соседа. Сколько человек выше своего правого соседа? Приведите все варианты и докажите, что других нет. (С. Берлов)

2. Александр умножил шестизначное число $\overline{abcdef}$ на число $\overline{def}$, а Кирилл умножил шестизначное число $\overline{defabc}$ на $\overline{abc}$. Сумма их результатов оказалась равна 200802007. Докажите, что в их вычислениях есть ошибка.

3. Сумма чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2009}$ равна нулю. Известно, что

$$|a_1 - 2a_2| = |a_2 - 2a_3| = \dots = |a_{2008} - 2a_{2009}| = |a_{2009} - 2a_1|.$$

Докажите, что $a_1 = a_2 = \dots = a_{2009} = 0$. (А. Храбров)

4. Внутри трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) выбрана точка M так, что $\angle AMB = \angle CMD = 90^\circ$, $\angle BAM + \angle CDM = \angle BMC$. Докажите, что трапеция $ABCD$ — описанная. (А. Смирнов)

5. В таблице 10×10 расставлены числа от 1 до 100. Разрешается поменять местами числа, находящиеся в соседних клетках в одной строке, если левое больше правого. Разрешается поменять местами числа в соседних клетках в одном столбце, если нижнее больше верхнего. Можно ли для какой-нибудь расстановки чисел с помощью этих операций получить таблицу, в которой расстановка чисел симметрична исходной расстановке относительно диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний?

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2009 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
I ТУР. 11 КЛАСС.

1. Петя поделил с остатком натуральное число на сумму его цифр. И неполное частное, и остаток оказались у Петя равны 2008. Учительница поставила Пете двойку. Докажите, что учительница права.

2. Известно, что

$$|a_1 - 2a_2| = |a_2 - 2a_3| = \dots = |a_{2008} - 2a_{2009}| = |a_{2009} - 2a_1| = 100.$$

Докажите, что сумма чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2009}$ не равна нулю. (А. Храбров)

3. Докажите, что для всех α , при которых определена левая часть, верно неравенство

$$\operatorname{tg}^4 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha \geq 2(\sin^3(\alpha^2) - \cos^3(\alpha^2)).$$

(А. Пастор)

4. Внутри трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) нашлась такая точка P , что $\angle APB = \angle CPD = 90^\circ$, $\angle ABP = 20^\circ$, $\angle DCP = 50^\circ$ и $\angle APD = 70^\circ$. Докажите, что в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность.

(А. Смирнов)

5. В таблице 10×10 расставлены числа от 1 до 100. Разрешается поменять местами числа, находящиеся в соседних клетках в одной строке, если левое больше правого. Разрешается поменять местами числа в соседних клетках в одном столбце, если нижнее больше верхнего. Можно ли для какой-нибудь расстановки чисел с помощью этих операций получить таблицу, в которой расстановка чисел симметрична исходной расстановке относительно диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний?