САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2005 года ПО МАТЕМАТИКЕ
Отборочный тур. 9 класс.

1. Пусть a, b, c – натуральные числа, не превосходящие 1 000 000. Докажите, что уравнение

$$\sqrt[21]{ax^2} + \sqrt[21]{bx} + \sqrt[21]{c} = 0$$

не имеет вещественных решений. (*К. Кохась, С. Иванов*)

2. В строчку выписаны 10 различных чисел. Разрешается менять местами два соседних числа, если их не меняли местами раньше. Докажите, что если было сделано менее 45 таких операций, то можно сделать еще одну. (*С. Иванов*)

3. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках X и Y соответственно. Оказалось, что центр вневписанной окружности $\triangle CXY$, касающейся стороны XY, лежит на описанной окружности $\triangle ABC$. Докажите, что центр вписанной окружности $\triangle ABC$ лежит на отрезке XY. (*А. Смирнов*)

4. Можно ли разбить все натуральные числа, большие 2005, на 2 бесконечные группы так, чтобы выполнялось следующее условие: если различные числа x и y лежат в одной группе, то число $x^2 + y$ лежит в той же группе? (*В. Франк*)

5. Докажите для произвольных вещественных чисел $x, y, z \in [0, 1]$ неравенство

$$(x+1)(y+1)(z+1) \geq \sqrt{8(x+y)(x+z)(y+z)}.$$

(*Д. Карпов, А. Храбров*)

6. Рассмотрим все возможные наборы, содержащие по 3 различных натуральных числа от 1 до $p-1$, где p — простое число. Для каждого такого набора рассмотрим остаток от деления произведения его чисел на p. Докажите, что среди полученых остатков единиц не меньше, чем двоек. (*Д. Карпов*)

7. Пусть BL — биссектриса треугольника ABC. Внутри треугольника BLC нашлась точка P такая, что $\angle BPC = 90°$ и $\angle LPC + \angle LBC = 180°$. Точка O — центр описанной окружности треугольника LPB. Докажите, что прямые CO, BL, и AM, где M — середина стороны BC, пересекаются в одной точке. (*А. Смирнов*)

8. В стране 210 городов и совсем нет дорог. Король хочет построить несколько дорог с односторонним движением так, чтобы для любых трех городов A, B и C таких, что есть дороги, ведущие из A в B и из B в C, не было дороги, ведущей из A в C. Какое наибольшее число дорог он сможет построить? (*Д. Карпов, К. Сухов*)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2005 ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Отборочный тур. 10 класс.

---

1. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются параболы в точках A и B и пересекаются в точке C. Точка K — середина отрезка AB. Докажите, что середина отрезка KC лежит на параболе. (*К. Сухов*)

2. В компании из ста человек среди любых десяти есть трое попарно знакомых. Докажите, что можно выбрать восьмерых из них так, чтобы любой из оставшихся был знаком с кем-то из этих восьмерых. (*С. Берлов*)

3. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках X и Y соответственно. При этом центр вневписанной окружности треугольника XYC, касающейся стороны XY, лежит на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что отрезок XY проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC. (*А. Смирнов*)

4. Докажите, что уравнение $3^k = m^2 + n^2 + 1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах. (*А. Храбров*)

5. Положительные числа x_1, x_2, $\ldots$, x_n $(n \geq 2)$ таковы, что

$$x_i \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1} \quad \text{для} \quad i = 2,\, 3,\, \ldots,\, n\,.$$

Докажите неравенство

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} \leqslant \frac{n}{2}\,.$$

(*Д. Джукич*)

6. По кругу выписаны числа от 1 до n^2. Разрешается менять местами два стоящих рядом числа, если эти два числа не меняли местами раньше. Докажите, что если сделано не больше $n^3/100$ таких операций, то можно сделать еще одну. (*С. Иванов*)

7. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На стороне AC нашлась такая точка L, что отрезок A_1L делится пополам высотой CC_1, а отрезок C_1L делится пополам высотой AA_1. Докажите, что $HL \perp OH$, где O — это центр описанной окружности треугольника ABC. (*Ф. Бахарев*)

8. Дано натуральное число $m \,\vdots\, 17$. Рассматриваются все возможные наборы по 17 различных натуральных чисел от 1 до m, и для каждого такого набора вычисляется остаток суммы его чисел от деления на m. Докажите, что среди полученных остатков нулей не меньше, чем единиц. (*Д. Карпов*)

Санкт-Петербургская олимпиада школьников 2005 года по математике
Отборочный тур. 11 класс.

1. В строчку выписаны 10 различных чисел. Разрешается менять местами два рядом стоящих числа, если эти числа не меняли местами раньше. Докажите, что если было сделано менее 45 таких операций, то можно сделать еще одну.

(С. Иванов)

2. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{400}$ удовлетворяет условию $a_{n+1} = d(a_n) + d(n)$. Докажите, что в этой последовательности не более 210 простых чисел. (Через $d(n)$ обозначено количество натуральных делителей числа n).

(Ю. Белов)

3. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках X и Y соответственно. При этом центр вневписанной окружности треугольника XYC, касающейся стороны XY, лежит на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что отрезок XY проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC. *(А. Смирнов)*

4. Докажите, что уравнение $3^k = m^2 + n^2 + 1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах. *(А. Храбров)*

5. Докажите, что для любых положительных чисел x, y и z выполнено неравенство

$$\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)\left(y^2 + \frac{3}{4}\right)\left(z^2 + \frac{3}{4}\right) \geq \sqrt{(x+y)(y+z)(x+z)}.$$

(А. Храбров)

6. В компании как минимум 10 человек. Среди любых 10 из них есть трое попарно знакомых. Докажите, что найдутся либо 7 человек, вообще не имеющие знакомых, либо такие 7 человек, что каждый из оставшихся знаком с кем-то из них.

(С. Берлов)

7. Внутри треугольника ABC выбрана произвольная точка X. Лучи AX, BX, CX пересекают описанную около треугольника ABC окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Точка A_2 симметрична точке A_1 относительно середины стороны BC. Аналогично определяются точки B_2 и C_2. Докажите, что найдется такая фиксированная точка Y, не зависящая от выбора X, что точки Y, A_2, B_2 и C_2 лежат на одной окружности. *(А. Смирнов)*

8. В одной из вершин правильного n-угольника записана единица, а в остальных — нули. Хулиган Миша одновременно прибавил к числу в каждой вершине его соседа по часовой стрелке; затем он прибавил к числу в каждой вершине число, стоящее от него через одну вершину по часовой стрелке; затем он прибавил к числу в каждой вершине число, стоящее от него через две вершины по часовой стрелке, и т. д; наконец, он прибавил к числу в каждой вершине его соседа против часовой стрелки. После этих операций $n-1$ из записанных чисел оказались равны. Чему могло быть равно число n?