ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА 2000 года

Первый тур

6 класс

1. На доске написано три двузначных числа, одно из которых начинается на 5, второе — на 6, а третье — на 7. Учитель попросил трех учеников, чтобы каждый из них выбрал какие-нибудь два из этих чисел и сложил их. У первого ученика получилось 147, ответы второго и третьего — различные трехзначные числа, начинающиеся на 12? Как такое могло быть? (*Р. Семизаров*)

2. В марте 1532 года скупой рыцарь каждый день спускался в свой подвал и добавлял в (почти уже полный) сундук от 1 до 10 монет. После этого он каждый раз подсчитывал монеты и оказывалось, что число монет в сундуке делится без остатка либо на 22, либо на 25 (но не на оба этих числа сразу). Докажите, что рыцарь потерял счет своим сокровищам. (*К. Кохась*)

3. В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме "р", которую просто пропускают при письме, а остальные — знают все буквы, кроме "к", которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово "кот", 18 других учеников — написать слово "рот", а остальных 22 учеников — слово "крот". При этом слова "кот" и "рот" оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали свое слово верно? (*Р. Семизаров*)

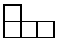
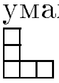
4. Квадрат 100×100 сантиметров разбит на 9 прямоугольников двумя вертикальными и двумя горизонтальными линиями. Внутренний прямоугольник имеет размеры 45×30 сантиметров, а стороны остальных прямоугольников не обязательно выражаются целым числом сантиметров. Найдите сумму площадей четырех угловых прямоугольников. Не забудьте обосновать ответ. (*С. Иванов, Р. Семизаров*)

7 класс

5. На доске написано три двузначных числа, одно из которых начинается на 5, второе — на 6, а третье — на 7. Учитель попросил трех учеников, чтобы каждый из них выбрал какие-нибудь два из этих чисел и сложил их. Может ли так быть, что у первого ученика получилось 147, а ответы второго и третьего — различные трехзначные числа, начинающиеся на 12? (*Р. Семизаров*)

6. В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме “р”, которую просто пропускают при письме, а остальные — знают все буквы, кроме “к”, которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово “кот”, 18 других учеников — слово “рот”, а остальных — слово “крот”. При этом слова “кот” и “рот” оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали свое слово верно? (*Р. Семизаров*)

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$. Лучи BA и CD пересекаются в точке E, а лучи AD и BC – в точке F. Известно, что $BE = BF$ и $\angle DEF = 25^\circ$. Найдите $\angle EFD$. (*М. Пратусевич*)

8. Бумажный прямоугольник размером 6×11 клеток разрезали на фигурки вида  и , после чего одну из фигурок потеряли. Докажите, что из оставшихся фигурок, использовав их все, невозможно составить “по клеточкам” прямоугольник. Фигурки можно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга. (*Жюри*)

8 класс

9. Учительница дала отличнице Кате четыре положительных числа. Катя написала на доске числа 3, 4 и 7 и сказала, что каждое из них является суммой каких-то трех из четырех данных ей чисел. Докажите, что Катя ошиблась. (*Д. Карпов*)

10. Перед боем с белогвардейцами у Василия Ивановича и Петьки было поровну патронов. Василий Иванович израсходовал в бою в 8 раз меньше патронов, чем Петька, а осталось у него в 9 раз больше патронов, чем у Петьки. Докажите, что изначально количество патронов у Василия Ивановича делилось на 71.

(*Д. Карпов, Ю. Лифшиц*)

11. Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AB в точке D, а продолжение за точку A стороны AC — в точке E. Докажите, что $AD < AE$. (*С. Берлов*)

12. См. задачу 8.

13. Одно и то же натуральное число поделили с остатком на 3, на 18 и на 48. Сумма трех полученных остатков оказалась равна 39. Докажите, что остаток, полученный при делении на 3, равен 1. (*К. Кохась*)

9 класс

14. См. задачу 11.

15. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B провели медиану BM. K и L — точки касания вписанной окружности треугольника ABM со сторонами AB и AM. Известно, что прямые KL и BM параллельны. Найдите угол ACB. (*Р. Исмаилов*)

16. В чемпионате по рыбной ловле участвовало несколько рыбаков. Известно, что победитель (поймавший наибольшее число рыб) поймал ровно в 4 раза меньше рыб, чем все остальные участники вместе взятые. Рыбак, занявший третье место, поймал ровно в 9 раз меньше, чем все остальные, а рыбак, оказавшийся на последнем месте, поймал ровно в 10 раз меньше, чем все остальные. Сколько рыбаков участвовало в соревновании? (*С. Берлов, С. Иванов*)

17. См. задачу 8.

18. Числа a, b, c, d лежат в промежутке от 2 до 4. Докажите неравенство:

$$25\left(ab+cd\right)^2 \geq 16\left(a^2+d^2\right)\left(b^2+c^2\right).$$

(*А. Храбров*)

10 класс

19. a и b — положительные числа. Сумма минимального значения квадратного трехчлена $f(x) = ax^2+8x+b$ и минимального значения трехчлена $g(x) = bx^2+8x+a$ равна нулю. Докажите, что эти минимальные значения оба равны нулю.

(*А. Храбров*)

20. См. задачу 8.

21. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол A — прямой, E — точка пересечения диагоналей, точка F — проекция E на сторону AB. Докажите, что углы DFE и CFE равны. (*С. Берлов*)

22. См. задачу 13.

23. Последовательность вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots$ удовлетворяет равенству

$$x_{n+2} = \frac{x_n x_{n+1} + 5x_n^4}{x_n - x_{n+1}}$$

при всех натуральных n. При этом $x_{2000} = x_1$. Докажите, что $x_{1999} \neq x_2$.

(*С. Иванов*)

11 класс

24. Дима сложил из одинаковых кубиков прямоугольный параллелепипед (ребра кубиков равны 1), написал на бумажке числа 42, 48 и 82 и сказал, что это — объём, площадь поверхности и сумма длин всех ребер этого параллелепипеда, но не сказал, где какое число. Чему равны длины ребер диминого параллелепипеда?

(*О. Ванюшина*)

25. Отрезки AM и BH — соответственно медиана и высота остроугольного треугольника ABC. Известно, что $AH = 1$ и $2\angle MAC = \angle MCA$. Найдите длину стороны BC. (*Ф. Бахарев*)

26. В соревнованиях по художественному скалолазанию каждая участница набрала целое число баллов. Известно, что победительница набрала ровно в 4 раза меньше баллов, чем все остальные участницы вместе взятые, скалолазка, занявшая третье место, набрала ровно в 9 раз меньше баллов, чем все остальные, а скалолазка, занявшая последнее место, набрала ровно в 10 раз меньше, чем все остальные. Сколько скалолазок участвовало в соревнованиях? (*С. Берлов, С. Иванов*)

27. Функция f задана при всех вещественных x и для любого x удовлетворяет неравенствам:

$$f(x+1) \le f(2x+1) \quad \text{и} \quad f(3x+1) \ge f(6x+1)\,.$$

Известно, что $f(3) = 2$. Докажите, что уравнение $f(x) = 2$ имеет по крайней мере 2000 решений. (*А. Храбров*)

28. В таблице 3×3 разрешается выбрать любую строку или столбец и домножить все числа, стоящие в выбранной строке (столбце), на произвольное положительное вещественное число. Может ли в результате применения нескольких таких операций из левой таблицы получиться правая? (*А. Храбров*)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Второй тур

6 класс

29. На доске написаны девять последовательных трёхзначных чисел, в записи которых нет ни одного нуля. У каждого из них посчитали произведение цифр, а затем нашли сумму полученных девяти чисел. Могла ли эта сумма равняться 1125? (*К. Кохась*)

30. Десятичная запись числа $5 \cdot A$ состоит из 1000 пятерок и 1000 шестерок. Найдите сумму цифр числа A. (*Р. Семизаров*)

31. Имеется 185 монет, из них ровно 7 фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые монеты также весят одинаково. Фальшивая монета легче настоящей. Как за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь отобрать 23 настоящие монеты? (*А. Храбров*)

32. Клетки квадрата 100×100 раскрашены в шахматном порядке. Квадрат разрезали на квадраты с нечетными сторонами и в каждом квадрате отметили центральную клетку. Докажите, что белых и черных клеток отмечено поровну. (*О. Ванюшина*)

33. Семеро козлят задумали по трёхзначному числу. Затем каждые двое сыграли в такую игру: они сравнили первые цифры своих чисел, и тот, у кого цифра больше, дал другому столько щелчков, на сколько больше его цифра; потом проделали то же самое со вторыми и третьими цифрами. Могло ли случиться так, что всего они пробили 217 щелчков? (*Р. Семизаров*)

34. Во дворе стоит 36 столбов, причём любые два столба соединены проводом. Каждое утро хулиган Вася по дороге в школу срывает ровно 35 проводов, а электрик Петров каждый вечер восстанавливает все провода, связывавшие один из столбов с остальными. Докажите, что Вася может действовать так, чтобы однажды, придя в школу, он смог бы похвастаться, что оставил не более 18 целых проводов. (*А. Пастор*)

7 класс

35. Докажите, что из простого числа, большего 1000, можно вычеркнуть одну или две цифры так, чтобы получилось составное число. (*А. Храбров*)

36. В клетках таблицы 100×100 расставлены целые числа. Оказалось, что в любом квадрате 2×2 суммы чисел, стоящих в противоположных углах квадрата, равны. Докажите, что тогда и в любом прямоугольнике суммы чисел, стоящих в его противоположных углах, равны. (*С. Берлов*)

37. На доске написано 70 подряд идущих десятизначных чисел. Докажите, что сумма цифр первых двадцати из этих чисел больше суммы цифр последних десяти чисел. (*А. Храбров*)

38. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, в котором $\angle CAD + \angle BCA = 180^\circ$ и $AB = BC + AD$. Докажите, что $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$. (*Ф. Бахарев*)

39. В Однобоком графстве между некоторыми (но, к сожалению, еще не между всеми) усадьбами проложены дороги с односторонним движением. При этом при появлении любой новой дороги (также с односторонним движением) между усадьбами, не соединенными дорогой до этого, появится возможность добраться от любой усадьбы до любой другой, не нарушая правил. Докажите, что такая возможность имеется уже сейчас. (*Д. Ростовский*)

40. Написанное на доске число n можно заменить на одно из чисел $2n-4$, $3n-8$ или $8-n$. Можно ли за несколько таких операций из числа 41 получить число, большее 10000000, но меньшее 10000020? (*Ф. Петров*)

41. Каждый день в группе из нечетного числа людей трое выходят на дежурство. Докажите, что можно составить такой график дежурств, что через некоторое время любые два человека побывают вместе ровно на трех дежурствах. (*А. Косовская*)

8 класс

42. См. задачу 35.

43. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC выбрана такая точка D, что $BC = CD$. На катете BC взята такая точка E, что $DE = CE$. Докажите равенство $AD + BE = DE$. (*Ф. Бахарев*)

44. Каждое из двух натуральных чисел равно сумме трех различных *собственных* делителей другого (собственным делителем числа называется отличный от него натуральный делитель). Докажите, что эти два числа равны. (*А. Голованов*)

45. В стране 2000 городов, любые два города соединены двусторонней беспосадочной авиалинией. Когда-то все авиалинии были государственными. 1 января каждого года правительство выбирает 1999 государственных авиалиний и продает их частным авиакомпаниям. После этого 1 мая парламент выбирает один из городов и возвращает государству все частные авиалинии, выходящие из этого города. Докажите, что правительство может действовать так, чтобы к некоторому моменту не менее 99% авиалиний оказались частными. (*А. Пастор*)

46. См. задачу 40.

47. Точка D лежит на основании AC равнобедренного треугольника ABC. Точки E и F таковы, что середина отрезка DE лежит на отрезке AB, середина отрезка DF лежит на отрезке BC и $\angle EDA = \angle FDC$. Середина отрезка EF точка K лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что $\angle ABD = \angle CBK$.

(*Д.Карпов, С.Берлов*)

48. В роте из 109 солдат каждый день трое выходят в наряд. Докажите, что можно составить такой график нарядов, что через некоторое время любые два солдата побывают вместе ровно в трех нарядах. (*А. Косовская*)

9 класс

49. С двух сторон дороги посадили два ряда по 1000 деревьев. На каждое дерево прибили табличку, в которой указано, сколько дубов среди этого дерева и его соседей слева и справа (у крайних деревьев — среди самого дерева и его единственного соседа). Оказалось, что две последовательности чисел на табличках совпадают. Докажите, что в обоих рядах дубы растут на одних и тех же местах.

(*Д. Ростовский, А. Храбров*)

50. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. На высоте AA_1 выбрана точка D такая, что $A_1D = C_1D$. Точка E — середина стороны AC. Докажите, что точки A, C_1, D и E лежат на одной окружности. (*С. Берлов*)

51. $F(x) = x^{2000} - x^{1000} + 1$. Существуют ли такие различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}$, что $F(a_i)F(a_j)$ делится на a_ia_j при всех $i \neq j$? (*А. Баранов*)

52. На координатной плоскости проведена 101 прямая и отмечены все точки их пересечения друг с другом. Может ли быть так, что на каждой из проведенных прямых лежат 50 отмеченных точек с положительными первыми координатами и 50 — с отрицательными? (*С. Иванов*)

53. На доске написаны натуральные числа 1, 2, ... , 2000. Два игрока поочередно делают ходы по следующим правилам. Разрешается стереть любые два числа a и b и написать вместо них a^b. Через некоторое время на доске останется одно число. Первый игрок выигрывает, если оно оканчивается на 2, 7 или 8, а второй — в противном случае. Кто выиграет при правильной игре? (*В. Франк*)

54. Вневписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке K, а продолжения стороны AB — в точке L. Другая вневписанная окружность касается продолжений сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Прямые KL и MN пересекаются в точке X. Докажите, что CX — биссектриса угла ACN. (*С. Берлов*)

55. Сложностью последовательности a_1, a_2, ... , составленной из нулей и единиц, называется наименьшее натуральное число k такое, что для некоторых натуральных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ каждый член последовательности a_n, $n > k$, имеет ту же четность, что и $\varepsilon_1 a_{n-1} + \varepsilon_2 a_{n-2} + \dots + \varepsilon_k a_{n-k}$. Последовательность a_1, a_2, ... имеет сложность 1000. Какова может быть сложность последовательности $1 - a_1$, $1 - a_2$, ... ? (Укажите все возможные значения и докажите, что других нет). (*А. Кириченко*)

10 класс

56. Последовательности $x_1, x_2, \dots$ и $y_1, y_2, \dots$ заданы условиями $x_1 = \frac{1}{8}$, $y_1 = \frac{1}{10}$, $x_{n+1} = x_n + x_n^2$, $y_{n+1} = y_n + y_n^2$. Докажите, что числа x_m и y_n не равны ни при каких натуральных m и n. (*А. Голованов*)

57. AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Точки K и M — середины отрезков AB и A_1B_1 соответственно. Отрезки AA_1 и KM пересекаются в точке L. Докажите, что точки A, K, L и B_1 лежат на одной окружности. (*С. Берлов*)

58. См. задачу 52.

59. Число N равно произведению 200 различных натуральных чисел. Докажите, что N имеет не меньше 19901 различных натуральных делителей (включая единицу и само число). (*А. Голованов*)

60. Клетки квадрата 2000×2000 закрашивают по следующим правилам. В любой момент можно закрасить одиночную клетку, если ни одна из соседних с ней клеток еще не закрашена; или прямоугольник 1×2, если к этому моменту уже закрашены ровно две из соседних с ним клеток; или квадрат 2×2, если уже закрашены 8 соседних с ним клеток. (Соседними считаются клетки, примыкающие по стороне.) Можно ли закрасить весь квадрат? (*К. Кохась*)

61. Одна из вневписанных окружностей треугольника ABC касается стороны AB и продолжений сторон CA и CB в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно. Другая вневписанная окружность касается стороны AC и продолжений сторон BA и BC

в точках B_2, C_2 и A_2 соответственно. Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке P, прямые A_1C_1 и A_2C_2 — в точке Q. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой. (*С. Берлов*)

62. Будем называть натуральное число "почти простым", если оно не делится ни на одно простое число из интервала $[3, 19]$. Будем называть число "очень непростым", если оно имеет хотя бы два простых делителя из интервала $[3, 19]$. Какое наибольшее количество почти простых чисел можно выбрать так, чтобы любые два из них в сумме давали очень непростое число? (*С. Берлов, С. Иванов*)

11 класс

63. Равносторонний треугольник со стороной 9 разбит на 81 равных треугольников отрезками, параллельными сторонам. Докажите, что из него нельзя вырезать более 18 параллелограммов со сторонами 1 и 2. (*О. Ванюшина*)

64. Точка O — начало координат в трехмерном пространстве. Точки A_1, A_2, $\ldots$, A_n имеют неотрицательные координаты. Докажите неравенство

$$\left|\overrightarrow{OA_1}\right| + \left|\overrightarrow{OA_2}\right| + \cdots + \left|\overrightarrow{OA_n}\right| \leq \sqrt{3}\left|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}\right|.$$

(*А. Храбров*)

65. Каждый месяц лесник Ермолай сажал вдоль забора ряд из 2000 деревьев. К каждому дереву он прибивал табличку, на которой указывал сколько дубов есть среди самого дерева, его левого и правого соседей. Таким образом получалась последовательность из 2000 чисел. Сколько различных последовательностей мог получить лесник Ермолай? (*А. Храбров, Д. Ростовский*)

66. Дан многочлен $F(x) = x^{2000} - x^{1000} + 1$. Докажите, что не существует 8002 различных натуральных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_{8002} таких, что $F(a_i)F(a_j)F(a_k) \,\vdots\, a_ia_ja_k$ при всех попарно различных i, j и k? (*А. Баранов*)

67. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. На стороне BC взята точка K, для которой $\angle BB_1K = \angle A$, а на стороне AB точка M, для которой $\angle BB_1M = \angle C$, L — точка пересечения высоты BB_1 и отрезка A_1C_1. Докажите, что четырехугольник B_1KLM — описанный.

(*А. Храбров, Д. Ростовский*)

68. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске $n \times n$ так, чтобы каждая из них била четное число других? Мы считаем, что одна ладья бьет другую, если они стоят на одной вертикали или горизонтали и между ними нет других ладей. (*Д. Карпов*)

69. Про иррациональные положительные числа α, β, γ и δ известно, что при любом натуральном n имеет место тождество

$$[n\alpha] \cdot [n\beta] = [n\gamma] \cdot [n\delta].$$

Следует ли отсюда, что множества $\{\alpha, \beta\}$ и $\{\gamma, \delta\}$ совпадают? (Квадратные скобки, как обычно, обозначают целую часть числа). (*А. Храбров*)

Отборочный тур

9 класс

70. Существуют ли четыре таких квадратных трехчлена, что, записав их в любом порядке, мы сможем найти число, при подстановке которого в эти трехчлены полученные значения будут записаны в строго возрастающем порядке? (*А. Голованов*)

71. S_1 и S_2 — две окружности, не имеющие общих точек. Общая касательная (внешняя) касается их в точках A и B. Окружность S_3 проходит через A и B и вторично пересекает S_1 и S_2 в точках C и D соответственно. K — точка пересечения прямых, касающихся S_1 и S_2 в точках C и D[1]. Докажите, что $KC = KD$. (*С. Берлов*)

72. На доске 1001×1001 отмечено несколько клеток так, что никакие две соседние клетки не отмечены, но клеток, граничащих с отмеченными по стороне, меньше чем отмеченных. Сколько клеток отмечено? (*Ф. Бахарев*)

73. Существуют ли 1000 натуральных чисел таких, что наибольшие общие делители всевозможных наборов этих чисел (по два, по три, … , по тысяче) попарно различны? (*С. Берлов*)

74. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. На отрезке A_1C_1 выбрали точки A_2 и C_2 такие, что отрезок B_1A_2 делится высотой CC_1 пополам и пересекает высоту AA_1 в точке K, а отрезок B_1C_2 делится высотой AA_1 пополам и пересекает высоту CC_1 в точке L. Докажите, что $KL \parallel AC$. (*Ф. Бахарев*)

75. На координатной плоскости расположены 100 точек. Докажите, что существует не более $2025 = 45^2$ прямоугольников с вершинами в этих точках и со сторонами, параллельными осям. (*С. Иванов*)

76. a и b — различные натуральные числа такие, что $a^2 + b$ делится на $b^2 + a$ и $b^2 + a$ — степень простого числа. Найдите эти числа. (*С. Берлов*)

77. Сеть авиалиний считается надежной, если после закрытия любого аэропорта из любого открытого аэропорта можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). В стране 2000 аэропортов и изначально нет авиалиний. Две авиакомпании по очереди вводят новые беспосадочные авиалиний. Авиакомпания, после хода которой получается надежная сеть авиалиний, проигрывает. Какая из авиакомпаний выиграет при правильной игре? (*Д. Карпов*)

[1] Чтобы девятиклассники не разбирали разные случаи расположения точек, к условию прилагался рисунок, на котором точки C, D и K лежат по одну сторону от AB, и точка K лежит все окружности S_3. В 10-м классе рисунок не входил в условие.

10 класс

78. Дано несколько квадратных трехчленов с единичными старшими коэффициентами и одинаковыми дискриминантами. Сумма любых двух из этих трехчленов имеет два корня. Докажите, что и сумма всех трехчленов имеет два корня.

(*С. Берлов, С. Иванов*)

79. См. задачу 71.

80. a и b — различные натуральные числа, большие 1, и $a^2 + b - 1$ делится на $b^2 + a - 1$. Докажите, что число $b^2 + a - 1$ имеет хотя бы два различных простых делителя. (*С. Берлов*)

81. На клетчатой плоскости лежит 111 не перекрывающихся друг с другом трехклеточных уголков. При этом выполняется такое свойство: для любого из уголков содержащий его квадрат 2×2 целиком покрыт уголками. Докажите, что можно убрать один или несколько уголков (но не все) так, чтобы это свойство сохранилось.

(*А. Железняк, Ю. Белов*)

82. Имеется 20 различных натуральных чисел, множество попарных сумм которых (включая суммы каждого числа с самим собой) содержит ровно 201 элемент. Из какого наименьшего количества элементов может состоять множество (положительных) попарных разностей этих чисел? (*С. Иванов*)

83. $ABCD$ — равнобочная трапеция с основаниями AD и BC. Некоторая окружность касается отрезков AB и AC и пересекает отрезок BC в точках M и N. Точки X и Y — ближайшие к D точки пересечения вписанной окружности треугольника BCD с прямыми DM и DN соответственно. Докажите, что прямая XY параллельна AD. (*С. Берлов*)

84. В каждой клетке шахматной доски написано положительное число так, что в каждой горизонтали сумма чисел равна 1. Известно, что при любой расстановке восьми не бьющих друг друга ладей на доске произведение чисел под ними не больше произведения чисел на главной диагонали. Докажите, что сумма чисел на главной диагонали не меньше 1. (*Ф. Петров*)

85. Можно ли выбрать несколько точек в пространстве и соединить некоторые пары точек отрезками так, чтобы из каждой точки выходило ровно три отрезка, а любая замкнутая ломаная, составленная из разных отрезков, имела не меньше 30 звеньев? (*С. Иванов*)

11 класс

86. Существует ли квадратный трехчлен f с положительными коэффициентами такой, что для любого положительного числа x имеет место равенство $[f(x)] = f([x])$. (Квадратные скобки, как обычно, обозначают целую часть числа.)

(*А. Храбров*)

87. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах с делениями можно упорядочить гири весом в 1, 3, 3^2, ... , 3^{26} г? (Чашечные весы с делениями позволяют определять разность весов грузов, лежащих на чашках.)

(*О. Ванюшина*)

88. См. задачу 80.

89. Прямая ℓ — касательная к окружности, описанной вокруг остроугольного треугольника ABC, проведенная в точке B. Точка K — проекция ортоцентра треугольника на прямую ℓ, а точка L — середина стороны AC. Докажите, что треугольник BKL — равнобедренный. (*Ф. Бахарев*)

90. В квадрате 1×1 с единичными скоростями летают два шарика. Между собой они никак не взаимодействуют, а от стенок отскакивают по закону “угол падения равен углу отражения”. Докажите, что с верхней стороны на нижнюю может с единичной скоростью спуститься паучок на паутинке так, что ни его, ни паутинку за время опускания шарики не заденут. (*К. Пименов*)

91. Докажите, что для любых положительных чисел, удовлетворяющих условию $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, справедливо неравенство

$$\frac{x_1 x_2}{x_3} + \frac{x_2 x_3}{x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1} x_n}{x_1} + \frac{x_n x_1}{x_2} \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

(*А. Храбров*)

92. На плоскости дан выпуклый n-угольник P, ограничивающий площадь меньше 1. Для каждой точки X на плоскости определяется величина $F(X)$, равная площади объединения всевозможных отрезков, соединяющих X с точками многоугольника (площадь *выпуклой оболочки*). Доказать, что множество точек X, для которых $F(X) = 1$, является выпуклым многоугольником с не более чем $2n$ сторонами. (*Ю. Бураго*)

93. Какое наименьшее количество единичных отрезочков нужно стереть в клетчатом прямоугольнике 2000×3000 (граничные отрезки стирать запрещается) так, чтобы никакие из оставшихся не образовывали прямоугольника меньшего размера?

(*А. Храбров, Д. Ростовский*)