

Математическая олимпиада
«Будущие исследователи – будущее науки»
Финальный тур 9.03.2015

Задания с решениями

7 класс

7.1. Перед соревнованиями по бегу Петя планировал бежать всю дистанцию с постоянной скоростью V . Однако, узнав результаты соперников, Петя решил, что нужно повысить запланированную скорость на 25%. С такой повышенной скоростью он пробежал половину дистанции, но устал, так что вторую половину дистанции он бежал со скоростью, на 20% меньшей скорости V . Какое время показал Петя: больше или меньше запланированного?

Ответ: больше запланированного. **Решение.** Пусть a – длина дистанции. Тогда запланированное время равно $\frac{a}{V}$, а реальное время равно $\frac{a}{2 \cdot 1,25V} + \frac{a}{2 \cdot 0,8V} = \frac{a}{V} \cdot \frac{41}{40} > \frac{a}{V}$.

7.2. Можно ли расставить на ребрах куба 12 чисел 1, 2, ..., 12 так, чтобы произведение четырех чисел верхней грани равнялось произведению четырех чисел нижней грани?

Ответ: можно. **Решение.** Можно привести такой пример расстановки: на верхней грани расставим числа 2, 4, 9, 10; на нижней грани – числа 3, 5, 6, 8; остальные числа 1, 7, 11, 12 расставим на боковых ребрах. Произведения на верхней и нижней гранях совпадают и равны 720. (Чтобы прийти к подобному примеру, нужно отобрать простые числа 7 и 11 для боковых ребер и распределить степени двойки и тройки на верхней и нижней грани, что значительно уменьшает перебор.)

7.3. Если первую цифру двузначного натурального числа N умножить на 4, а вторую умножить на 2, то в сумме полученные после умножения числа дадут $\frac{N}{2}$. Найдите N (укажите все решения).

Ответ: три решения: $N = 32; 64; 96$. **Решение.** Пусть x – первая цифра, y – вторая цифра числа N . Тогда условие задачи запишется так $4x + 2y = \frac{10x + y}{2} \Leftrightarrow 2x = 3y$. Значит, цифра x делится на 3 и $x \neq 0$ (поскольку x – первая цифра). Отсюда получается три решения: $x = 3$, либо $x = 6$, либо $x = 9$, и соответственно $y = 2$, либо $y = 4$, либо $y = 6$.

7.4. Имеется десять монет разного веса и чашечные весы без гирь. Требуется выделить две монеты – самую тяжелую и самую легкую. Можно ли этого добиться за 13 взвешиваний?

Ответ: можно. **Решение.** Сначала разобьем все монеты на 5 пар и за 5 взвешиваний сравним по весу каждую пару. Выделив в каждой паре более тяжелую монету, составим из таких монет "тяжелую" группу из 5 монет. Оставшиеся 5 монет составят "легкую" группу. Теперь в тяжелой группе за 4 последовательных взвешивания выберем самую тяжелую монету. Аналогично, в легкой группе за 4 взвешивания выделим самую легкую монету. Итого проведено $5+4+4=13$ взвешиваний.

7.5. Из прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 3$ и $CB = 7$ нужно вырезать квадрат с вершиной C наибольшей площади. Чему равна сторона такого квадрата?

Ответ: 2,1. **Решение.** Введем систему координат: начало координат – в вершине C , ось x – вдоль CA , ось y – вдоль CB . Тогда гипотенуза лежит на прямой $y = 7 - \frac{7}{3}x$ (это следует из смысла углового коэффициента и свободного члена для графика прямой). Диагональ квадрата запишется уравнением прямой $y = x$, и поэтому точка пересечения этой прямой с гипотенузой получится из решения указанных уравнений $x = 7 - \frac{7}{3}x \Leftrightarrow x = \frac{21}{10}$.

8 класс

8.1. Перед соревнованиями по бегу Петя планировал бежать всю дистанцию с постоянной скоростью V . Однако, узнав результаты соперников, Петя решил, что нужно повысить запланированную скорость на 25%. С такой повышенной скоростью он пробежал половину дистанции, но устал, так что вторую половину дистанции он бежал со скоростью, на 20% меньшей скорости V . Какое время показал Петя: больше или меньше запланированного?

Ответ: больше запланированного. **Решение.** См. задачу 7.1.

8.2. В пятизначном числе зачеркнули одну цифру и полученное четырехзначное число сложили с исходным. Сумма оказалась равной 54 321. Найдите исходное число.

Ответ: 49383. **Решение.** Заметим, что зачеркнутая цифра должна быть последней в числе N , т.к. в противном случае сумма двух чисел имела бы в последнем разряде четную цифру. Обозначим эту зачеркнутую цифру через x и пусть y – получившееся после зачеркивания четырехзначное число. Тогда условие запишется так: $10y + x + y = 54321 \Leftrightarrow 11y + x = 54321$. Разделив 54321 на 11 с остатком, получим $54321 = 11 \cdot 4938 + 3$ и учитывая, что $x < 11$, будем иметь единственное решение (в силу однозначного деления с остатком) $x = 3, y = 4938$.

8.3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки P и Q – середины сторон AB и CD . Оказалось, что прямая PQ делит диагональ AC пополам. Докажите, что PQ делит и диагональ BD пополам.

Решение. Пусть M – точка пересечения прямых PQ и AC , N – точка пересечения прямых PQ и BD . По условию, PM – средняя линия в треугольнике ABC , и поэтому $PM \parallel BC$. Тогда в треугольнике BCD отрезок NQ параллелен основанию BC и проходит через середину боковой стороны CD . Значит (по теореме Фалеса) точка N – середина BD .

8.4. Имеется десять монет разного веса и чашечные весы без гирь. Требуется выделить две монеты – самую тяжелую и самую легкую. Можно ли этого добиться за 13 взвешиваний?

Ответ: можно. **Решение.** См. задачу 7.4.

8.5. а) Дана прямоугольная таблица размера 4×10 (клеток). Какое наибольшее количество крестиков можно поставить в клетки этой таблицы, чтобы выполнялось такое условие: в каждой строке и в каждом столбце таблицы должно стоять нечетное количество крестиков? **б)** Можно ли поставить несколько крестиков в таблицу размера 5×10 , чтобы выполнялось указанное условие?

Ответ: а) 30; б) нельзя. **Решение. а)** Пусть в таблице 4 горизонтали и 10 вертикалей. В каждой вер-

								×	×	×
×	×	×	×	×	×	×		×	×	
×	×	×	×	×	×	×	×			×
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	

тикали есть хотя бы одна пустая (без крестика) клетка – иначе была бы вертикаль с 4 крестиками. Тогда всего крестиков в таблице не больше $3 \cdot 10 = 30$. Пример 30 крестиков см. на рисунке. **б)** Предположим, от противного, что для таблицы 5×10 расстановка существует. Тогда общее число крестиков в таблице, если считать по гори-

зонталям, равно сумме пяти нечетных чисел, т.е. получаем нечетное число. С другой стороны, если считать по вертикалям, получится сумма десяти нечетных чисел, т.е. четное число. Противоречие.

9 класс

9.1. В пятизначном числе зачеркнули одну цифру и полученное четырехзначное число сложили с исходным. Сумма оказалась равной 54 321. Найдите исходное число.

Ответ: 49383. **Решение.** См. задачу 8.2.

9.2. Даны четыре действительных числа a, b, c, d , которые удовлетворяют двум соотношениям: $a + b = c + d$ и $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$. **а)** Докажите, что $a^5 + b^5 = c^5 + d^5$; **б)** Можно ли сделать вывод, что $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$?

Ответ: б) нельзя. **Решение.** а) Запишем второе соотношение в виде $(a+b)(a^2-ab+b^2) = (c+d)(c^2-cd+d^2)$. В силу первого уравнения линейные множители в этом равенстве совпадают. Если они равны 0, то $a = -b$, $c = -d$ и тогда $a^5 = -b^5$, $c^5 = -d^5$, т.е. $a^5 + b^5 = c^5 + d^5 = 0$ и утверждение доказано. Если $a+b = c+d \neq 0$, то после сокращения получим $a^2 - ab + b^2 = c^2 - cd + d^2 \Leftrightarrow (a+b)^2 - 3ab = (c+d)^2 - 3cd$, и поэтому $ab = cd$. Итак, пара (a, b) и пара (c, d) имеют совпадающие суммы и произведения и, значит, являются корнями одного и того же квадратного уравнения, т.е. эти пары (без учета порядка) совпадают. Отсюда следует результат.

б) Можно взять, например, $a = -b = 1$, $c = -d = 2$. Тогда $a^4 + b^4 = 2 \neq c^4 + d^4 = 32$.

9.3 В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки P и Q – середины сторон AB и CD . Оказалось, что прямая PQ делит диагональ AC пополам. Докажите, что PQ делит и диагональ BD пополам.

Решение. См. задачу 8.3.

9.4. Дана квадратная таблица, в некоторых клетках которой стоят крестики. Назовем строку таблицы нечетной, если в ней нечетное количество крестиков. Аналогично, в нечетном столбце – нечетное количество крестиков. а) Может ли оказаться так, что в таблице ровно 20 нечетных строк и 15 нечетных столбцов? б) Можно ли в таблице 16×16 расставить 126 крестиков так, чтобы все строки и столбцы оказались нечетными?

Ответ: а) не может; б) можно. **Решение.** а) Предположим, от противного, что такая расстановка возможна. Подсчитаем сначала все крестики по строкам. Сумма двадцати нечетных чисел в нечетных строках даст четное число. Остальные строки таблицы – четные, и они не изменят четности общего количества крестиков. С другой стороны, если подсчитать крестики по столбцам, то получится сумма пятнадцати нечетных чисел плюс четно число в четных столбцах, т.е. получится нечетное число. Противоречие.

б) На рисунке показана расстановка крестиков (во всех клетках заштрихованных прямоугольников). Всего крестиков $7 \cdot 9 \cdot 2 = 126$, и во всех строках (столбцах) стоят 7 или 9 крестиков. (Прийти к такому примеру можно исходя из разложения 126 на множители.)

	9	7
7		
9		

9.5. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = a$ и $CB = b$. Найдите а) сторону квадрата (с вершиной C) наибольшей площади, целиком лежащего в треугольнике ABC ; б) размеры прямоугольника (с вершиной C) наибольшей площади, целиком лежащего в треугольнике ABC .

Ответ: а) $\frac{ab}{a+b}$; б) $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$. **Решение.** а) Решение пункта а) приведено в задаче 7.5 при $a=3$, $b=7$.

б) Пусть x , y – стороны искомого прямоугольника. Пользуясь координатным методом (так же, как для пункта а), получим, что x , y удовлетворяют уравнению прямой, проходящей через точки $(0; b)$ и $(a; 0)$, т.е. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Требуется при этом условии найти наибольшее значение площади

$S = xy$. Имеем $S = ab \cdot \left(\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \right) \leq ab \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 = \frac{ab}{4}$. Здесь мы воспользовались неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим; при этом равенство (наибольшее значение) достигается при $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{1}{2}$. Другой способ для наибольшего значения получается при

нахождении вершины квадратного трехчлена $S(x) = x \left(b - \frac{bx}{a} \right)$.

10 класс

10.1. Даны четыре действительных числа a, b, c, d , которые удовлетворяют двум соотношениям: $a + b = c + d$ и $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$. **а)** Докажите, что $a^5 + b^5 = c^5 + d^5$; **б)** Можно ли сделать вывод, что $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$?

Ответ: б) нельзя. **Решение.** См. задачу 9.2.

10.2. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $x^2 + 2x + 2|x + 1| = a$ имеет ровно два корня.

Ответ: $a > -1$. **Решение.** Запишем уравнение в виде $(x + 1)^2 + 2|x + 1| = a + 1$. Обозначим $t = |x + 1|$, $t \geq 0$. Тогда получим квадратное уравнение $t^2 + 2t = a + 1 \Leftrightarrow (t + 1)^2 = a + 2$. С учетом того, что $t \geq 0$, должно выполняться неравенство $a + 2 \geq 1$, т.е. $a \geq -1$. При этом условии t находится однозначно (с учетом $t \geq 0$): $t = \sqrt{a + 2} - 1$. При $a = -1$ исходное уравнение имеет единственное решение $x = -1$, а при $a > -1$ два решения: $x_{1,2} = \pm(\sqrt{a + 2} - 1) - 1$.

10.3. Дана трапеция $ABCD$ и точка M на боковой стороне AB , такая, что $DM \perp AB$. Оказалось, что $MC = CD$. Найдите длину верхнего основания BC , если $AD = d$.

Ответ: $\frac{d}{2}$. **Решение.** Пусть N – середина нижнего основания AD . Тогда по свойству медианы пря-

моугольного треугольника AMD имеем: $MN = AN = ND = \frac{d}{2}$. Рассмотрим $\triangle MCN$ и $\triangle DCN$.

Они равны по трем сторонам. Тогда $\angle MCN = \angle DCN$ и поэтому в равнобедренном треугольнике MCD биссектриса является высотой, т.е. $CN \perp MD$. Таким образом, $AB \parallel CN$ (как перпендикуляры к прямой MD). Значит, $ABCN$ – параллелограмм. Отсюда $BC = AN = \frac{d}{2}$.

10.4. Дана квадратная таблица, в некоторых клетках которой стоят крестики. Назовем строку таблицы нечетной, если в ней нечетное количество крестиков. Аналогично, в нечетном столбце – нечетное количество крестиков. **а)** Может ли оказаться так, что в таблице ровно 20 нечетных строк и 15 нечетных столбцов? **б)** Можно ли в таблице 16×16 расставить 126 крестиков так, чтобы все строки и столбцы оказались нечетными?

Ответ: а) не может; б) можно. **Решение.** См. задачу 9.4.

10.5. У Пети и Васи есть равные бумажные прямоугольные треугольники с катетами a и b . Мальчики хотят вырезать по квадрату наибольшей площади так, чтобы у Петинного квадрата одна вершина совпадала с вершиной прямого угла треугольника, а Васин квадрат имел бы сторону, лежащую на гипотенузе. **а)** Найдите размеры обоих квадратов; **б)** Всегда ли (т.е. при любых ли катетах) Петин квадрат будет больше Васиного?

Ответ: а) $\frac{ab}{a+b}$ и $\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+ab+b^2}$; б) всегда. **Решение.** а) Сторона Петинного квадрата вычислена в задаче 9.5. Пусть x – сторона Васиного квадрата. Тогда гипотенуза разбивается на три отрезка длины, соответственно, $x \operatorname{tg} A$, x и $x \operatorname{tg} B$. Отсюда получаем уравнение

$$x \frac{a}{b} + x + x \frac{b}{a} = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow x = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + ab + b^2}.$$

б) Докажем неравенство $\frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + ab + b^2} < \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)\sqrt{a^2 + b^2} < a^2 + ab + b^2$. Обозначим

$$u = a + b, v = ab, \quad \text{тогда неравенство запишется в виде} \quad u\sqrt{u^2 - 2v} < u^2 - v \Leftrightarrow u^2(u^2 - 2v) < u^4 - 2u^2v + v^2 \Leftrightarrow 0 < v^2.$$

11 класс

11.1. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{14-x^2}(\sin x - \cos 2x) = 0$?

Ответ: 6 корней. **Решение.** Область определения уравнения: $14 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{14}$. На этой области решаем тригонометрическое уравнение $\sin x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0$; $\sin x = \frac{-1 \pm 3}{4}$, т.е. $\sin x = -1$ или $\sin x = \frac{1}{2}$. Отсюда получаем три серии решений: 1) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; 2) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; 3) $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$ ($k, n, m \in \mathbb{Z}$). Решения первой серии лежат в области определения только при $k = 0$ (т.к. при $k \neq 0$, $|x| \geq 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} > \frac{9}{2} > \sqrt{14}$). Решения второй серии тоже лежат в области определения только при $n = 0$ (т.к. $|\frac{\pi}{6} - 2\pi| = \frac{11\pi}{6} > \frac{11}{2} > \sqrt{14}$). Решения третьей серии лежат в области определения при $m = 0$ и $m = -1$. Действительно, $\frac{5}{6}\pi < \frac{5 \cdot 3,6}{6} = 3 < \sqrt{14}$ и $|\frac{5}{6}\pi - 2\pi| = \frac{7}{6}\pi < \frac{7 \cdot 3,15}{6} = 3,675 < 3,7$ и $(3,7)^2 = 13,69 < 14$. (При других m имеем $|\frac{5}{6}\pi + 2\pi m| > 2\pi > \sqrt{14}$). Добавив корни первого множителя $\sqrt{14-x^2}$ исходного уравнения, а именно $\pm \sqrt{14}$, получим всего 6 корней.

11.2. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $x^2 + 2x + 2|x+1| = a$ имеет ровно два корня.

Ответ: $a > -1$. **Решение.** См. задачу 10.2.

11.3. Дана трапеция $ABCD$ и точка M на боковой стороне AB , такая, что $DM \perp AB$. Оказалось, что $MC = CD$. Найдите длину верхнего основания BC , если $AD = d$.

Ответ: $\frac{d}{2}$. **Решение.** См. задачу 10.3.

11.4. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 55 натуральных делителей, считая единицу и само число.

Ответ: $2^{10} \cdot 3^4$. **Решение.** Если натуральное n имеет вид $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$, где $p_1, p_2, \dots, p_m$ — его различные простые делители, то количество натуральных делителей n равно $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_m + 1)$ (это следует из общего вида делителя $p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_m^{i_m}$ числа n , $0 \leq i_1 \leq k_1$, $0 \leq i_2 \leq k_2, \dots, 0 \leq i_m \leq k_m$). Тогда $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_m + 1) = 55 = 5 \cdot 11$, и поэтому либо $m = 1$, либо $m = 2$. В первом случае $k_1 = 54$ и $n = p_1^{54}$. Во втором случае $k_1 = 4, k_2 = 10$, т.е. $n = p_1^4 \cdot p_2^{10}$. Самые маленькие простые числа это 2 и 3. Поэтому осталось сравнить три числа; 2^{54} , $2^4 \cdot 3^{10}$ и $3^4 \cdot 2^{10}$. Очевидно, наименьшее из них $2^{10} \cdot 3^4$.

11.5. В тетраэдре $SABC$ ребра SA, SB, SC взаимно перпендикулярны и равны a, b, c соответственно.

а) Найдите сторону куба с вершиной S наибольшего объема, целиком лежащего в тетраэдре;

б) Определите размеры прямоугольного параллелепипеда с вершиной S наибольшего объема, целиком лежащего в тетраэдре.

Ответ: а) $\frac{abc}{ab+bc+ac}$; б) $\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}$. **Решение.** а) По аналогии с решением задачи 9.5 рассмотрим прямоугольную систему координат с началом в точке S и координатными осями вдоль SA, SB, SC . Тогда уравнение плоскости ABC есть $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (это уравнение плоскости, проходя-

щей через три точки $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$). Диагональ куба, проходящая через S , имеет уравнение $x = y = z$. Подставляя его в уравнение плоскости ABC , получаем точку пересечения:

$$x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{abc}{ab + bc + ac}.$$

б) По аналогии с задачей 9.5 имеем задачу на максимум функции объема $V = xyz$ при условии

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Этот максимум получается из неравенства средних для трех чисел:

$$V = xyz = abc \cdot \left(\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{z}{c}\right) \leq abc \cdot \left(\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)/3\right)^3 = \frac{abc}{27}, \quad \text{он достигается, когда}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{1}{3}.$$