

«Будущие исследователи – будущее науки»  
Математика (1 тур) 20.12.2014 и 21.12.14

## 1 вариант

### 7 класс

**7.1** Вася и Толя обменялись значками. До обмена у Васи было на 5 значков больше, чем у Толи. После того, как Вася обменял 24% своих значков на 20% значков Толи, у Васи стало на один значок меньше, чем у Толи. Сколько значков было у мальчиков до обмена?

**Ответ.** У Толи было 45 значков, у Васи – 50 значков. **Решение.** Пусть до обмена у Толи было  $x$  значков, тогда у Васи было  $(x + 5)$  значков. После обмена у Толи стало  $x - \frac{x}{5} + (x + 5) \cdot \frac{6}{25}$ , а у Васи  $x + 5 - (x + 5) \cdot \frac{6}{25} + \frac{x}{5}$ .

Решая уравнение

$$x - \frac{x}{5} + (x + 5) \cdot \frac{6}{25} - x - 5 + (x + 5) \cdot \frac{6}{25} - \frac{x}{5} = 1,$$

находим  $x = 45$ .

**7.2.** Существуют ли дробные (нецелые) числа  $x, y$  такие, что оба числа  $13x + 4y$  и  $10x + 3y$  целые?

**Ответ.** Не существуют. **Решение.** Пусть  $13x + 4y = m$ ,  $10x + 3y = n$ , где  $m$  и  $n$  – целые. Решим эту систему уравнений, умножив первое уравнение на 3, а второе – на 4. Вычитая уравнения, получим  $x = -3m + 4n$ , т.е.  $x$  – целое число.

**7.3.** Найдется ли среди первых 500 натуральных чисел 1, 2, ..., 500 серия, состоящая из подряд идущих **a)** девяти составных чисел; **б)** одиннадцати составных чисел?

**Ответ:** **а)** да; **б)** да. **Решение.** Можно привести искомую серию из 11 составных чисел: 200, 201, ..., 210. Объясним сначала, как найти подобную серию из 9 составных чисел. Есть 4 простых числа меньше 10: это 2, 3, 5, 7. Их произведение равно 210. Поэтому при любом целом  $k$  каждая из двух серий  $210k - 2, 210k - 3, \dots, 210k - 10$  и  $210k + 2, 210k + 3, \dots, 210k + 10$  состоит из 9 составных чисел. Это отвечает на вопрос пункта а) при  $k = 1$  или 2. Если заметить, что  $209:11$ , то получим ответ на вопрос б).

**7.4.** На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $M$  и  $N$  соответственно. Оказалось, что периметр  $\Delta AMC$  равен периметру  $\Delta CNA$ , а периметр  $\Delta ANB$  равен периметру  $\Delta CMB$ . Докажите, что  $\Delta ABC$  равнобедренный.

**Решение.** Будем обозначать периметр буквой  $P$ . Из условия задачи имеем  $P(\Delta AMC) + P(\Delta CMB) = P(\Delta CNA) + P(\Delta ANB)$ . Отсюда  $P(\Delta ABC) + 2 \cdot CM = P(\Delta ABC) + 2 \cdot AN$ . Значит  $CM = AN$ . Из этого соотношения, учитывая равенство периметров треугольников  $AMC$  и  $CAN$ , получим, что  $AM = NC$ . Поэтому треугольники  $AMC$  и  $CAN$  равны по трем сторонам. Тогда  $\angle A = \angle C$ , значит,  $\Delta ABC$  равнобедренный.

### 8 класс

**8.1.** Вася и Толя обменялись значками. До обмена у Васи было на 5 значков больше, чем у Толи. После того, как Вася обменял 24% своих значков на 20% значков Толи, у Васи стало на один значок меньше, чем у Толи. Сколько значков было у мальчиков до обмена?

**Решение.** См. Задачу 7.1.

**8.2.** Существуют ли натуральные числа  $m, n$  такие, что  $m^2 = n^2 + 2014$ ?

**Ответ:** нет. **Решение.** Один способ решения заключается в разложении разности квадратов на множители, которые, очевидно, одинаковой четности, но это противоречит тому, что 2014 делится на 2, но не делится на 4. Другое решение заключается в рассмотрении остатков при делении на 4: квадраты целых чисел дают остаток 0 или 1. Но в правой части уравнения тогда получится остаток либо 2 либо 3, это приводит к противоречию.

**8.3.** Можно ли числа 1, 2, 3, ...,  $n$  переставить так, чтобы соседние числа в ряду отличались либо на 3, либо на 5, если **а)**  $n=25$ ; **б)**  $n=1000$ .

**Ответ:** а) можно; б) можно. **Решение.** Числа можно переставить так:

а) 1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 9, 12, 15, 10, 13, 16, 11, 14, 17, 20, 23, 18, 21, 24, 19, 22, 25. б) Решение пункта а) показывает, как последовательно переставлять восьмерки вида чисел  $8k + 1, 8k + 2, \dots, 8k + 8$ , а именно:  $8k + 1, 8k + 4, 8k + 7, 8k + 2, 8k + 5, 8k + 8, 8k + 3, 8k + 6$ ,  $8(k+1)+1$  и переходить к следующей восьмерке. Таким образом можно переставить числа 1, 2, ...,  $n$ , когда  $n$  имеет вид  $4m$  или  $4m + 1$ . Поскольку 1000 делится на 8, получим результат пункта б).

- 8.4. На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $M$  и  $N$  соответственно. Оказалось, что периметр  $\Delta AMC$  равен периметру  $\Delta CNA$ , а периметр  $\Delta ANB$  равен периметру  $\Delta CMB$ . Докажите, что  $\Delta ABC$  равнобедренный.

**Решение.** См. задачу 7.4

### 9 класс

- 9.1. Существуют ли натуральные числа  $m, n$  такие, что  $m^2 = n^2 + 2014$ ?

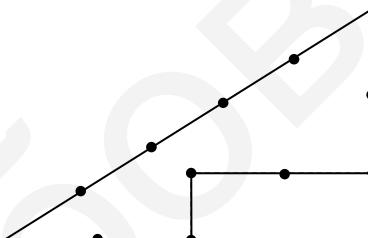
**Ответ:** не существуют. **Решение.** См. задачу 8.2

- 9.2. Можно ли числа 1, 2, 3, ...,  $n$  переставить так, чтобы соседние числа в ряду отличались либо на 3, либо на 5, если а)  $n=25$ ; б)  $n=1000$ .

**Ответ:** а) можно; б) можно. **Решение.** См. задачу 8.3.

- 9.3. Имеется 12 спичек длиной 2 см каждая. Можно ли сложить из них многоугольник площади 16 см<sup>2</sup>? (Спички нельзя ломать, требуется использовать все спички.)

**Ответ:** можно. **Решение.** Результат следует из теоремы Пифагора ( $10^2 = 6^2 + 8^2$ ) и построения (см. рисунок). Площадь многоугольника равна  $\frac{6 \cdot 8}{2} - 8 = 16$ .



- 9.4. В школьной математической олимпиаде 9-х классов участвовало 20 человек. В результате все участники набрали разное количество баллов, причем у каждого участника количество баллов меньше, чем в сумме у любых двух других. Докажите, что каждый участник набрал больше 18 баллов.

**Решение.** Пусть  $x, y$  - количество баллов участников, занявших последнее и предпоследнее место. Если предположить противное к утверждению задачи, то  $x \leq 18$ . Поскольку  $x < y$ , то следующие по возрастанию количества баллов должны быть (по условию задачи) не меньше  $y+1, y+2, \dots, y+18$ , соответственно. Таким образом, у победителя не менее  $y+18$  баллов, в то время как у занявших последние два места  $x+y \leq 18+y$ . Противоречие.

### 10 класс

- 10.1. Существуют ли такие рациональные нецелые числа  $x, y$ , что а) оба числа  $19x+8y$  и  $8x+3y$  целые?; б) оба числа  $19x^2+8y^2$  и  $8x^2+3y^2$  целые?

**Ответ:** а) существуют; б) не существуют. **Решение.** а) Если решить систему  $\begin{cases} 19x+8y=1 \\ 8x+3y=1 \end{cases}$ , то полу-

чим  $x = \frac{5}{7}$ ,  $y = \frac{-11}{7}$  (конечно, для подобного примера правые части системы можно выбирать

многими способами). б) Пусть  $\begin{cases} 19x^2+8y^2=m \\ 8x^2+3y^2=n \end{cases}$  ( $m$  и  $n$  целые). Решая систему, получим

$7x^2 = 8n - 3m$ ,  $7y^2 = 8m - 19n$ , Обозначим  $k = 8n - 3m$  и предположим, от противного, что

$x = \frac{p}{q}$  - несократимая дробь, где  $q > 1$ . Тогда  $7p^2 = kq^2$ . Если  $q$  делится на 7, то отсюда и  $p$

должно делиться на 7, что противоречит несократимости дроби  $\frac{p}{q}$ . Значит, на 7 делится  $k$ , т.е.

$k = 7l$  (где  $l$  целое), и поэтому  $p^2 = lq^2$ , поэтому  $l$  должно быть точным квадратом:  $l = l_1^2$  (где  $l_1$  целое). Итак,  $x = \frac{p}{q} = l_1$  – целое число. Получили противоречие.

**10.2.** Имеется 12 спичек длиной 2 см каждая. Можно ли сложить из них многоугольник площади 16 см<sup>2</sup>? (Спички нельзя ломать, требуется использовать все спички.)

**Ответ:** можно. **Решение.** См. задачу 9.3.

**10.3.** Существуют ли выпуклый шестиугольник и точка  $M$  внутри него такие, что все стороны шестиугольника больше 1, а расстояние от  $M$  до любой вершины меньше 1?

**Ответ.** Не существует. **Указание.** Допустим, что такой шестиугольник  $ABCDEF$  существует. Рассмотрим 6 треугольников, основания которых – соответствующие стороны шестиугольника, а вершина – точка  $M$ . Тогда хотя бы в одном из этих треугольников угол при вершине  $M$  не больше  $60^\circ$  (т.к. сумма всех шести углов равна  $360^\circ$ ). Пусть, для определенности, это  $\angle AMB$ . Тогда хотя бы один из углов при основании треугольника  $AMB$  (скажем,  $\angle BAM$ ) больше или равен  $60^\circ$ . Но тогда для углов  $AMB$  и  $BAM$  получается противоречие с тем, что против большего угла в треугольнике лежит большая сторона (или противоречие с тем, что против равных углов лежат равные стороны).

**10.4.** В школьной математической олимпиаде 10-х классов участвовало 20 человек. В результате все участники набрали разное количество баллов, причем у каждого участника количество баллов меньше, чем в сумме у любых двух других. Докажите, что каждый участник набрал больше 18 баллов.

**Решение.** См. задачу 9.4.

## 11 класс

**11.1.** Существуют ли такие рациональные нецелые числа  $x, y$ , что **a)** оба числа  $19x + 8y$  и  $8x + 3y$  целые?; **б)** оба числа  $19x^2 + 8y^2$  и  $8x^2 + 3y^2$  целые?

**Ответ:** **а)** существуют; **б)** не существуют. **Решение.** См. задачу 10.1.

**11.2.** Изобразите на координатной плоскости множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x^3 - 6xy - 8y^3 = 1 \end{cases}$$

**Ответ.** Множество решений представляет собой прямую  $y = \frac{x-1}{2}$ . **Решение.** Второе уравнение есть следствие первого, так как

$$\begin{aligned} x^3 - 8y^3 - 6xy &= (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) - 6xy = \\ &= x^2 + 2xy + 4y^2 - 6xy = (x - 2y)^2 = 1. \end{aligned}$$

**11.3.** Существуют ли выпуклый шестиугольник и точка  $M$  внутри него такие, что все стороны шестиугольника больше 1, а расстояние от  $M$  до любой вершины меньше 1?

**Решение.** См. задачу 10.3

**11.4.** Дана последовательность  $a_1 = \cos 10^\circ, a_2 = \cos 100^\circ, \dots, a_n = \cos(10^n)^\circ$  (градусов).

**а)** Определите знак числа  $a_{100}$ ; **б)** Докажите, что  $|a_{100}| < 0,18$ .

**Ответ:** **а)**  $a_{100} > 0$ . **Решение.** Покажем, что начиная с третьего члена последовательность становится постоянной:  $a_3 = a_4 = a_5 = \dots = a_{100}$ . Действительно, при  $n \geq 3$ :  $10^{n+1} - 10^n = 9 \cdot 10^3 \cdot 10^{n-3} = 360 \cdot 25 \cdot 10^{n-3}$ , т.е. углы отличаются на величину, кратную  $360^\circ$ . Таким образом, нетрудно опре-

делить знак  $\cos 1000^\circ = \cos(360^\circ \cdot 3 - 80^\circ) = \cos 80^\circ = \sin 10^\circ > 0$ . **6)** Воспользуемся известным неравенством  $\sin x < x$  при всех  $x > 0$  (здесь  $x$  – угол в радианах). (Это неравенство обычно доказывается при выводе первого замечательного предела; другой способ доказательства – рассмотреть функцию  $y = x - \sin x$ , которая возрастает, т.к.  $y' = 1 - \cos x \geq 0$  и  $y(0) = 0$ .) Таким образом,

$$0 < \sin 10^\circ = \sin \frac{10}{180} \pi < \frac{\pi}{18} < 0,18; \text{ т.к. } 18 \cdot 0,18 = 3,24 > \pi.$$

---

## 2 вариант

### 7 класс

**7.1.** Грузовик и легковой автомобиль движутся в одном направлении по соседним полосам со скоростью 65 км/ч и 85 км/ч соответственно. На каком расстоянии между собой они будут через 3 минуты после того, как поравняются?

**Ответ:** 1 км. **Решение.** Разность скоростей автомобилей равна 20 км/ч, поэтому за 3 минуты они разъедутся на расстояние, равное  $20 \text{ (км/ч)} \cdot \frac{1}{20} \text{ (час)} = 1 \text{ км.}$

**7.2.** На прямой отметили несколько точек, после этого между каждыми двумя соседними точками поставили еще по две точки, затем такую же процедуру (со всей совокупностью точек) проделали еще раз. Могло ли в результате на прямой оказаться 82 точки?

**Ответ:** да. **Решение.** Пусть вначале на прямой было отмечено  $x$  точек. Тогда после первой процедуры к ним добавилось  $2(x - 1)$  точек и всего стало  $3x - 2$  точек. После второй процедуры к этим точкам добавилось  $2(3x - 3)$  точек. Итак, всего на прямой оказалось  $3x - 2 + 2(3x - 3) = 9x - 8$ . Таким образом, надо решить уравнение в целых числах  $9x - 8 = 82$ . Отсюда  $x = 10$ . Значит, если вначале было 10 точек, то в результате двух процедур будет 82 точки..

**7.3.** Коля хочет на своем калькуляторе перемножить все натуральные делители числа 1024 (включая само число). Сможет ли он получить результат на экране, имеющем 16 десятичных разрядов?

**Ответ:** Не сможет.. **Решение**— Натуральные делители числа  $1024 = 2^{10}$  – это числа  $1, 2^1, 2^2, \dots, 2^{10}$ . Их произведение равно  $2^{1+2+\dots+10} = 2^{55}$ . Поскольку  $2^{10} = 1024 > 10^3$  и  $2^5 = 32 > 10$ , то  $2^{55} = (2^{10})^5 \cdot 2^5 > (10^3)^5 \cdot 10 = 10^{16}$ , т.е.  $2^{55}$  записывается не менее, чем 17 цифрами.

**7.4.** В треугольнике  $ABC$  углы  $A$  и  $C$  при основании равны  $20^\circ$  и  $40^\circ$  соответственно. Известно, что  $AC - AB = 5$  (см). Найдите длину биссектрисы угла  $B$ .

**Ответ:** 5 см. **Решение.** Пусть  $BM$  – биссектриса угла  $B$ . Отметим на основании  $AC$  точку  $N$  так, что  $AN = AB$ . Тогда треугольник  $ABN$  равнобедренный и  $\angle ABN = \angle ANB = 80^\circ$ . Поскольку  $\angle ABM = \frac{180^\circ - 20^\circ - 40^\circ}{2} = 60^\circ$ , то  $\angle BMN = \angle A + \angle ABM = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$ . Таким образом, углы при основании  $\Delta MBN$  равны, а значит,  $\Delta MBN$  равнобедренный:  $MB = BN$ . В  $\Delta BNC$  углы  $\angle NCB$  и  $\angle CNB$  равны  $40^\circ$  (т.к.  $\angle BNC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$  и  $\angle NBC = 180^\circ - 40^\circ - 100^\circ = 40^\circ$ ). Поэтому  $\Delta BNC$  равнобедренный:  $BN = NC$ . В результате имеем  $BM = BN = NC = 5$  см (т.к.  $NC = AC - AN = AC - AB$ ).

### 8 класс

**8.1.** Грузовик и легковой автомобиль движутся в одном направлении по соседним полосам со скоростью 65 км/ч и 85 км/ч соответственно. На каком расстоянии между собой они будут через 3 минуты после того, как поравняются?

**Ответ:** 1 км. **Решение.** См. задачу 7.1.

**8.2.** На прямой отметили несколько точек, после этого между каждыми двумя соседними точками поставили еще по две точки, затем такую же процедуру (со всей совокупностью точек) проделали еще раз. Могло ли в результате на прямой оказаться 82 точки?

**Ответ:** да. **Решение.** См. задачу 7.2.

**8.3.** В треугольнике  $ABC$  углы  $A$  и  $C$  при основании равны  $20^\circ$  и  $40^\circ$  соответственно. Известно, что  $AC - AB = 5$  (см). Найдите длину биссектрисы угла  $B$ .

**Ответ:** 5 см. **Решение.** См. задачу 7.4.

**8.4.** Имеется  $n$  палочек длины 1, 2, ...,  $n$ . Можно ли сложить из этих палочек квадрат, и если нельзя, то какое наименьшее количество палочек можно сломать пополам, чтобы сложить квадрат  
**а)** при  $n = 12$ ; **б)** при  $n = 15$ ?

**Ответ:** **а)** 2 палочки; **б)** Можно. **Решение.** **а)** Так как сумма  $1 + 2 + \dots + 12 = 78$  не делится на 4, то сложить квадрат нельзя. Сторона квадрата должна быть  $\frac{78}{4} = 19,5$ . Если сломать только одну палочку, то ее части мо-

гут оказаться на двух разных сторонах квадрата, а другие две стороны не смогут иметь нецелую длину. Значит, надо сломать как минимум две палочки. С двумя сломанными палочками можно сложить квадрат. Например, сломаем пополам палочки длины 1 и 3. Тогда квадрат можно сложить так:  $(\frac{1}{2} + 12 + 7), (\frac{1}{2} + 11 + 8), (\frac{3}{2} + 10 + 2 + 6), (\frac{3}{2} + 9 + 5 + 4)$ . **б)** При  $n=15$  квадрат можно сложить, например, так:  $(15 + 14 + 1), (13 + 12 + 5), (11 + 10 + 9), (8 + 7 + 6 + 4 + 3 + 2)$ .

## 9 класс

**9.1.** Замените две звездочки двумя числами так, чтобы получилось тождественное равенство:  

$$(2x + *)^3 = 5x^3 + (3x + *) (x^2 - x - 1) - 10x^2 + 10x$$

**Ответ:** первую звездочку заменяем на  $-1$ , вторую на  $1$ . **Решение.** Пусть  $a$  – значение первой звездочки,  $b$  – значение второй. Приравнивая коэффициенты при  $x^2$ ,  $x$  и свободные члены, после приведения подобных (и после проверки, что при  $x^3$  в правой и левой частях одинаковые коэффициенты, равные 8) будем иметь систему

$$\begin{cases} 12a = -3 + b - 10 \\ 6a^2 = -3 - b + 10 \\ a^3 = -b. \end{cases}$$

Подставляя  $b = 12a + 13$  из первого уравнения во второе, получим

$$6a^2 + 12a + 6 = 0. \text{ Отсюда } a = -1, b = 1, \text{ и проверкой убеждаемся, что третье уравнение для этих значений удовлетворяется.}$$

**9.2.** В треугольнике  $ABC$  сторона  $BC$  равна отрезку  $AM$ , где  $M$  – точка пересечения медиан. Найдите угол  $\angle BMC$ .

**Ответ:**  $90^\circ$ . **Решение.** Пусть  $AN$  – медиана. По свойству точки пересечения медиан

$$MN = \frac{1}{2} AM = \frac{1}{2} BC. \text{ Таким образом, в треугольнике } BMC \text{ медиана } MN \text{ равна половине стороны } BC.$$

Значит  $\Delta BMN$  прямоугольный с прямым углом  $BMN$  (это известный факт, который легко доказать, рассматривая равнобедренные треугольники  $BMN$  и  $CMN$ : удвоенная сумма углов при их основании равна  $180^\circ$ ).

**9.3.** Какое наименьшее количество цифр нужно приписать справа к числу 2014, чтобы полученное число делилось на все натуральные, меньшие 10?

**Ответ:** 4 цифры. **Решение.** Если к 2014 приписать три цифры, то получится число  $\leq 2014999$ . Разделив 2014999 на  $2520 = \text{НОК}(1,2,\dots,9)$ , получим частное 799 и остаток 1519. Поскольку  $1519 > 1000$ , то между числами 2014000 и 2014999 нет целого кратного 2520. Значит, приписать три цифры к 2014 нельзя. Отсюда следует, что одну или две цифры тоже нельзя приписать (иначе можно было бы дописать нули до трёх цифр). Четырех цифр будет достаточно, т.к.  $10000 > 2520$ , и поэтому между 2014000 и 20149999 есть целое кратное 2520 (наименьшее из таких чисел  $20142360 = 2520 \cdot 7993$ ).

**9.4.** Имеется  $n$  палочек длины 1, 2, ...,  $n$ . Можно ли сложить из этих палочек квадрат, и если нельзя, то какое наименьшее количество палочек можно сломать пополам, чтобы сложить квадрат  
**а)** при  $n = 12$ ; **б)** при  $n = 15$ ?

**Ответ:** **а)** 2 палочки; **б)** Можно. **Решение.** См. задачу 8.4.

## 10 класс

**10.1.** Замените две звездочки двумя числами так, чтобы получилось тождественное равенство:  

$$(2x + *)^3 = 5x^3 + (3x + *) (x^2 - x - 1) - 10x^2 + 10x$$

**Ответ:** первую звездочку заменяем на  $-1$ , вторую на  $1$ . **Решение.** См. задачу 9.1.

**10.2.** Какое наименьшее количество цифр нужно приписать справа к числу 2014, чтобы полученное число делилось на все натуральные, меньшие 10?

**Ответ:** 4 цифры. **Решение.** См. задачу 9.3.

**10.3.** Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению  $2x^2 + y^2 + 3xy + 3x + y = 2$ .

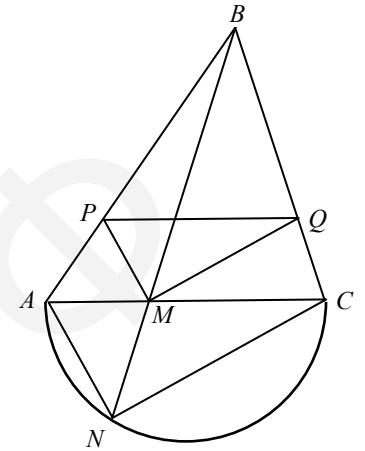
**Ответ:** искомое множество точек – это совокупность двух прямых  $y = -x - 2$  и  $y = -2x + 1$ . **Решение.**

Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно  $y$ :  $y^2 + y(3x+1) + 2x^2 + 3x - 2 = 0$ .

Его дискриминант равен  $D = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ , а решения  $y_1 = -x - 2$ ,  $y_2 = -2x + 1$ . Эти решения представляют собой две прямые на координатной плоскости.

**10.4.** Дан  $\Delta ABC$  и точка  $M$  на отрезке  $AC$  (отличная от его концов). Постройте с помощью циркуля и линейки точки  $P$  и  $Q$  на боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  так, чтобы  $PQ \parallel AC$  и  $\angle PMQ = 90^\circ$ .

**Решение.** Пусть  $P$ ,  $Q$  – искомые точки. При гомотетии с центром в точке  $B$  и коэффициентом  $\frac{AB}{BP} = \frac{CB}{BQ}$  отрезок  $PQ$  перейдет в  $AC$ , а точка  $M$  – в некоторую точку  $N$ . Тогда  $\angle ANC = \angle PMQ = 90^\circ$ . Таким образом, точка  $N$  лежит на полуокружности (по другую сторону от треугольника  $ABC$ ) с диаметром  $AC$ . Из этого анализа следует построение. Проведем полуокружность с диаметром  $AC$  и пусть  $N$  – точка пересечения прямой  $BM$  с этой полуокружностью. Далее, проведем через точку  $M$  две прямые, параллельные  $AN$  и  $CN$ . Точки пересечения этих прямых со сторонами  $AB$  и  $BC$  и будут искомыми точками  $P$ ,  $Q$ . Действительно,  $\angle PMQ = \angle ANC = 90^\circ$  в силу параллельности. Из подобия треугольников  $BAN$  и  $BPM$  следует, что  $\frac{AB}{PB} = \frac{NB}{MB}$ , и аналогично, из подобия треугольников  $BCN$  и  $BQM$  следует, что  $\frac{CB}{QB} = \frac{NB}{MB}$ . Значит,  $\frac{AB}{PB} = \frac{CB}{QB}$ , и по теореме Фалеса  $PQ \parallel AC$ .



## 11 класс

**11.1.** Решите уравнение  $\sin^2 x + 1 = \cos(\sqrt{2}x)$ .

**Ответ.**  $x = 0$ . **Решение.** Левая часть уравнения  $\geq 1$ , а правая  $\leq 1$ . Значит, уравнение равносильно системе:  $\sin x = 0$ ,  $\cos \sqrt{2}x = 1$ . Имеем  $x = \pi n$ ,  $\sqrt{2}x = 2\pi k$  ( $n, k$  – целые). Отсюда  $n = k \cdot \sqrt{2}$ . Поскольку  $\sqrt{2}$  – число иррациональное, последнее равенство возможно лишь при  $n = k = 0$ .

**11.2.** Докажите, что у пифагорова треугольника радиус вписанной окружности является целым числом. (Пифагоров треугольник – это прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами.)

**Решение.** Пусть  $a, b$  – катеты,  $c$  – гипотенуза,  $r$  – радиус вписанной окружности. Тогда  $r = \frac{a+b-c}{2}$  (формула следует из рассмотрения отрезков, на которые делятся стороны точками касания). Поскольку  $c^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ , то числа  $c$  и  $(a+b)$  одинаковой четности. Отсюда следует результат.

**11.3.** Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению  $2x^2 + y^2 + 3xy + 3x + y = 2$ .

**Ответ:** искомое множество точек – это совокупность двух прямых  $y = -x - 2$  и  $y = -2x + 1$ . **Решение.** См. задачу 10.3.

**11.4.** Дан  $\Delta ABC$  и точка  $M$  на отрезке  $AC$  (отличная от его концов). Постройте с помощью циркуля и линейки точки  $P$  и  $Q$  на боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  так, чтобы  $PQ \parallel AC$  и  $\angle PMQ = 90^\circ$ .

**Решение.** См. задачу 10.4.