Математическая олимпиада
«Будущие исследователи – будущее науки» 19.01.2013

7 класс

7.1. Найдите два натуральных числа m и n, если известно, что $m < n < 2m$ и $mn = 2013$.

Ответ: $m = 33$, $n = 61$.

Решение следует из разложения на простые множители $2013 = 3\cdot 11\cdot 61$ и небольшого перебора делителей числа 2013; всего их 8, причем «кандидатом» на роль числа m являются меньшие делители, а именно четыре числа 1, 3, 11, 33 и из них условию $m < n < 2m$ удовлетворяет только m=33 при $n = 61$.

7.2. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, в записи которых нет ни цифры 0, ни цифры 5.

Ответ: 284160. **Решение.** Будем складывать числа столбиком. Каждая последняя цифра встречается в разряде единиц столько раз, сколько есть трехзначных чисел с этой цифрой на конце. Значит, она встретится $8\cdot 8 = 64$ раза (т.к. всего используется 8 цифр для разрядов сотен и десятков). Поэтому сумма цифр в последнем разряде равна $64\cdot(1+2+3+4+6+7+8+9) = 2560$. Аналогично, в разряде десятков и сотен получим ту же сумму. В итоге получим $2560\cdot 100 + 2560\cdot 10 + 2560 = 2560\cdot 111 = 284160$.

7.3. Дан прямоугольник, отличный от квадрата. Известно, что площадь прямоугольника численно равна его периметру. Докажите, что меньшая сторона прямоугольника меньше 4, а большая сторона – больше 4.

Решение. Пусть a, b $(a < b)$ – стороны прямоугольника. По условию, $ab = 2a + 2b$, отсюда получаем равенство $(a-2)(b-2) = 4$. Если $a-2 > 2$ и $b-2 > 2$, то $(a-2)(b-2) > 4$, что противоречит полученному равенству. Аналогичное противоречие получается, когда оба числа $a - 2$ и $b - 2$ положительны, но меньше 2. Если оба числа $a - 2$ и $b - 2$ отрицательны, то $(a-2)(b-2) = (2-a)(2-b) < 2\cdot 2 = 4$, что также невозможно. Значит, $a-2 < 2$, $b-2 > 2$, т.е. $a < 4, b > 4$.

7.4. На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут (островитяне знают, кто есть кто). Турист, прибывший на остров, встретил компанию островитян из 10 человек и стал спрашивать по очереди каждого: "Кого в вашей компании больше: рыцарей, лжецов или, может быть, поровну"? Пятеро сказали одно и то же: "Лжецов больше". Что сказали остальные пять человек?

Ответ: "Поровну". **Решение.** Предположим сначала, что в компании больше пяти лжецов. Тогда первые пятеро сказали правду, и значит, они рыцари. Итак, рыцарей по меньшей мере пять, и, значит, наше предположение неверно. Предположим теперь, что в компании больше пяти рыцарей. Тогда среди первой пятерки должен оказаться рыцарь, и он должен был сказать правду, а на самом деле он сказал, что больше лжецов, т.е. опять приходим к противоречию. Значит, в компании 5 лжецов и 5 рыцарей. Поскольку первые пятеро сказали неправду, то они лжецы, а остальные – рыцари, и они сказали: "Поровну".

8 класс

8.1. Стозначное натуральное число N составлено из единиц и двоек, причем между любыми двумя двойками находится четное количество цифр. Известно, что N делится на 3. Сколько единиц и сколько двоек в записи числа N?

Ответ: две двойки и 98 единиц. **Решение.** Если в записи числа N больше двух двоек, то рассмотрев любые три двойки, получим противоречие: действительно, между первой и второй двойкой – четное количество цифр, между второй и третьей – четное количество, а вместе с самой второй (т.е. средней) двойкой получится нечетное количество. С другой стороны, в записи числа N должны присутствовать хотя бы две двойки, т.к. иначе сумма цифр равнялась бы 100 (если двоек нет) или 101 (если одна двойка), и. N не делилось бы на 3. В случае двух двоек все условия выполнены, когда между ними четное количество единиц.

8.2. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, в записи которых нет ни цифры 0, ни цифры 5.

Ответ: 284160. См. задачу 7.2.

8.3. На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут (островитяне знают, кто есть кто). Турист, прибывший на остров, встретил компанию островитян из 10 человек и стал спрашивать по очереди каждого: "Кого в вашей компании больше: рыцарей, лжецов или, может быть, поровну"? Пятеро сказали одно и то же: "Лжецов больше". Что сказали остальные пять человек?

Ответ: "Поровну". См. задачу 7.4.

8.4. В треугольнике ABC биссектриса AM перпендикулярна медиане BK. Найдите отношения $BP:PK$ и $AP:PM$, где P – точка пересечения биссектрисы и медианы.

Ответ: $BP:PK = 1$, $AP:PM = 3:1$. **Решение.** Треугольники ABP и AKP равны (сторона AP – общая, и прилегающие к ней углы равны по условию). Значит, $AB = AK = KC$, $BP = PK$. Поэтому треугольники ABM и AKM равны (по двум сторонам и углу $\frac{\angle A}{2}$ между ними). Тогда $S_{ABM} = S_{AKM} = S_{CKM} = \; = \frac{S}{3}$, где $S = S_{ABC}$. Далее, $S_{ABP} = \frac{1}{2} S_{ABK} = \frac{1}{4} S$. Но $S_{ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot BP$ (т.к. $AM \perp BP$), $S_{ABP} = \frac{1}{2} AP \cdot BP$. Отсюда $AM = \frac{2S}{3 \cdot BP}$, $AP = \frac{2S}{4 \cdot BP}$, т.е. $\frac{AP}{AM} = \frac{3}{4}$ и поэтому AP: PM = 1: 3.

9 класс

9.1. Стозначное натуральное число N составлено из единиц и двоек, причем между любыми двумя двойками находится четное количество цифр. Известно, что N делится на 3. Сколько единиц и сколько двоек в записи числа N?

Ответ: две двойки и 98 единиц. См. задачу 8.1.

9.2. Числа x, y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = -a^2 + 2 \end{cases}.$$

Какое наибольшее и какое наименьшее значение может принимать произведение xy ?

Ответ: Наибольшее значение равно 1/3, наименьшее равно –1.

Решение. Имеем $2xy = (x+y)^2 - (x^2 + y^2) \; = \; a^2 - (-a^2 + 2) \; = \; 2(a^2 - 1)$, т.е. $xy = a^2 - 1$. Система $\begin{cases} x + y = a \\ xy = a^2 - 1 \end{cases}$ равносильна исходной (т.к. из нее с помощью указанных выше преобразований получается второе уравнение исходной системы). Решение полученной системы – это корни квадратного уравнения $t^2 - at + (a^2 - 1) = 0$ (по обратной теореме Виета). Дискриминант этого уравнения $D = a^2 - 4(a^2 - 1) = 4 - 3a^2$ должен быть неотрицательным, т.е. $0 \le a^2 \le \frac{4}{3}$. Поэтому $xy = a^2 - 1 \in \left[-1; \frac{1}{3}\right]$.

9.3. Сколько точек на гиперболе $y = \frac{2013}{x}$ имеют целочисленные координаты $(x;y)$?

Ответ: 16. **Решение.** Целочисленные точки в первом квадранте соответствуют натуральным делителям числа $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Количество таких делителей равно 8 (можно их выписать непосредственно или воспользоваться формулой $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1)$ для количества натуральных делителей числа $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$.) С учетом симметричных точек в третьем квадранте получаем ответ.

9.4. В треугольнике *ABC* биссектриса *AM* перпендикулярна медиане *BK*. Найдите отношения $BP:PK$ и $AP:PM$, где P – точка пересечения биссектрисы и медианы.

Ответ: $BP:PK = 1$, $AP:PM = 3:1$. См. задачу 8.4.

10 класс

10.1. Числа x, y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = -a^2 + 2 \end{cases}.$$

Какое наибольшее и какое наименьшее значение может принимать произведение xy ?

Ответ: Наибольшее значение равно 1/3, наименьшее равно –1. См. задачу 9.2.

10.2. Сколько точек на гиперболе $y = \frac{2013}{x}$ имеют целочисленные координаты $(x;y)$?

Ответ: 16. См. задачу 9.3.

10.3. Существует ли такое число x, для которого оба числа $(\sin x + \sqrt{2})$ и $(\cos x - \sqrt{2})$ являются рациональными?

Ответ: Не существует. **Решение.** Предположим, от противного, что $\sin x + \sqrt{2} = p$, $\cos x - \sqrt{2} = q$, где p и q - рациональные числа. Тогда $1 = \sin^2 x + \cos^2 x = (p - \sqrt{2})^2 + (q + \sqrt{2})^2 = (p^2 + q^2 + 4) - 2(q - p)\sqrt{2}$. Если $q - p \ne 0$, то отсюда сразу получаем противоречие (в левой части – рациональное число, в правой – иррациональное). Если $p = q$, то $\sin x - \cos x = 2\sqrt{2}$, что также приводит к противоречию, т.к. $|\sin x - \cos x| \le 2$, а $2\sqrt{2} > 2$.

10.4. Дан прямоугольник, для которого численное значение площади больше периметра. Докажите, что периметр прямоугольника больше 16.

Решение. Пусть a, b – стороны прямоугольника. Из условия задачи $ab > 2a + 2b \Leftrightarrow (a-2)(b-2) > 4$ (*)

Сначала проверим, что оба множителя $(a – 2)$ и $(b – 2)$ положительны. Действительно, в противном случае из (*) следует, что $a – 2 < 0$, $b – 2 < 0$. Тогда $-2 < a - 2 < 0$, $-2 \le b - 2 < 0$ и поэтому $(a-2)(b-2) = (2-a)(2-b) < 2 \cdot 2 = 4$, что противоречит (*). Теперь для положительных чисел $(a – 2)$ и $(b – 2)$ можно воспользоваться неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим: $(a-2)+(b-2) \ge 2\sqrt{(a-2)(b-2)} > 4 \Rightarrow a+b > 8 \Leftrightarrow P > 16$.

11 класс

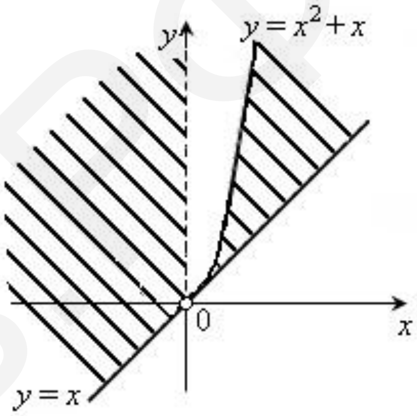
11.1. Решите уравнение $2\cos^2 x + \sqrt{\cos x} = 3$.

Ответ: $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Поскольку $2\cos^2 x + \sqrt{\cos x} \le 2 \cdot 1 + 1 = 3$, то равенство может выполняться лишь при условии $\cos x = 1$, откуда следует ответ.

11.2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $\dfrac{\sqrt{y-x}}{x} \le 1$.

Решение. При $x > 0$ исходное неравенство запишется в виде $\sqrt{y-x} \le x \Leftrightarrow 0 \le y-x \le x^2 \Leftrightarrow x \le y \le x + x^2$, т.е. множество из правой полуплоскости лежит между графиками $y = x$ и $y = x^2 + x$. Легко проверить, что парабола $y = x^2 + x$ касается прямой $y = x$ в начале координат (см. рис.). При $x < 0$ левая часть исходного неравенства отрицательна в области определения, т.е. множество из левой полуплоскости, расположенное выше графика $y = x$, удовлетворяет нашему неравенству.



11.3. Сколько на гиперболе $y = \dfrac{2013}{x}$ точек таких, что касательная в них пересекает обе координатные оси в точках с целочисленными координатами?

Ответ: 48 точек. **Решение.** Обозначим $k = 2013$. Уравнение касательной к гиперболе $y = \dfrac{k}{x}$ в точке (x_0, y_0) есть $y - y_0 = -\dfrac{k}{x_0^2}(x - x_0)$, где $y_0 = \dfrac{k}{x_0}$. Отсюда находим координаты точек пересечения касательной с осями *Ox* и *Oy*, а именно $x_1 = 2x_0$, $y_1 = \dfrac{2k}{x_0} = 2y_0$.

Значит, $2x_0$ – целое число; обозначим его через *n*. Тогда $y_1 = \dfrac{2k}{x_0} = \dfrac{4k}{n} = \dfrac{4 \cdot 2013}{n}$. Таким образом, *n* может принимать значения любого делителя числа $N = 4 \cdot 2013 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 11^1 \cdot 61^1$. Количество натуральных делителей числа N равно $(2+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 24$ (т.к. любой делитель имеет вид $2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 11^{\alpha_3} \cdot 61^{\alpha_4}$, где $0 \le \alpha_1 \le 2$, $0 \le \alpha_{2,3,4} \le 1$). С учетом отрицательных делителей (соответствующих касательным в третьей четверти) получаем всего 48 точек.

11.4. Дан прямоугольник, для которого численное значение площади больше периметра. Докажите, что периметр прямоугольника больше 16.

Решение. См. задачу 10.4.