Математическая олимпиада
«Будущие исследователи – будущее науки»
Первый тур. Вариант 22.01.2011.

В каждой параллели предлагалось 5 задач,
максимальная оценка каждой задачи 20 баллов

9 класс

1. К числу 2011 припишите справа и слева по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 45. (Найдите все возможные решения.)

Ответ. 520110 или 920115. **Указание.** Из признака делимости на 5 следует, что справа нужно приписать либо 0, либо 5. В первом случае слева требуется приписать 5, что следует из признака делимости на 9. Аналогично, во втором случае слева требуется приписать 9.

Комментарий. Кроме девятки, участники олимпиады могли слева приписать и 0, и получить «третье решение» задачи, но такое «решение» неестественно (числа не начинаются с нулевой цифры), однако при проверке наличие или отсутствие такого «решения» никак не учитывалось.

2. 8 чисел: 1, 2, …, 8 расставили в некотором порядке в вершинах куба. Затем для каждого ребра куба подсчитали сумму двух чисел на его концах. Докажите, что среди этих сумм есть совпадающие.

Указание. Предположим противное, тогда на ребрах будет 12 различных чисел среди возможных сумм: от минимальной, равной $3 = 1 + 2$, до максимальной, равной $15 = 8 + 7$. Таким образом, среди этих 13 возможных чисел есть только один пробел (не занятый суммами на ребрах). Если этого пробела нет среди чисел $\{3;\ 4;\ 5;\ 6\}$, то число 3 на ребре получается как сумма $1 + 2$ на его концах. Далее, число 4 получается только как сумма $1 + 3$ на концах, а число 5 получается как сумма $1 + 4$ (представление $2 + 3$ невозможно, т.к. вершины 2 и 3 уже определены как противоположные вершины в квадрате с вершинами 1, 2, 3). Наконец, получаем противоречие с числом 6, которое невозможно представить как сумму двух чисел, т.к. представление $6 = 1 + 5$ противоречит тому, что из вершины 1 ведут всего 3 "использованные" ребра, а другое представление ($6 = 2 + 4$) невозможно в силу того же рассуждения, что и выше для представления $5 = 2 + 3$. Полностью аналогичные рассуждения приводят к противоречию в случае, когда пробела нет среди чисел 15, 14, 13, 12.

3. Стороны тупоугольного треугольника равны n, $n + 1$, $n + 2$, где n – натуральное число. Найдите n.

Ответ. $n = 2$. **Указание.** При $n = 1$ не выполняется неравенство треугольника. При $n = 3$ получается прямоугольный треугольник ($5^2 = 3^2 + 4^2$), а при $n > 3$ – остроугольный треугольник, т.к. $(n+2)^2 < n^2 + (n+1)^2 \Leftrightarrow (n-1)^2 > 4 \Leftrightarrow n > 3$. При $n = 2$ выполняется и неравенство треугольника, и неравенство для тупого угла: $4^2 > 2^2 + 3^2$.

4. В выпуклом четырехугольнике площади $S = 35$ проведены диагонали, разбивающие четырехугольник на 4 треугольника. Площади двух из них, примыкающих к противоположным сторонам четырехугольника, равны 6 и 10. Найдите площади остальных двух треугольников..

Ответ. 4 и 15. **Указание.** Пусть искомые площади двух треугольников равны x и y. Во-первых, имеем уравнение из условия на площади: $x + y + 6 + 10 = 35$. Второе уравнение для определения x и y таково: $xy = 6 \cdot 10$; его можно вывести либо из формулы для площадей треугольников по двум сторонам и углу между ними, либо из отношения $\dfrac{x}{6} = \dfrac{10}{y}$, следующего из формулы площади по стороне и опущенной высоте. Решая квадратное уравнение для полученной системы, записываем ответ: x=4, y=15 (или : x=15, y=4).

5. Решите уравнение $\sqrt{x+2011}-\sqrt{x}=y$ в натуральных числах x, y.

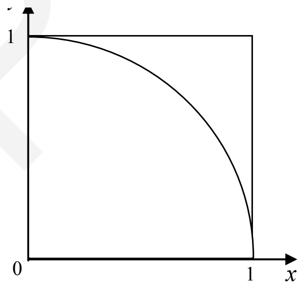
Ответ. $x = 1005^2$; $y = 1$. **Указание.** Перенесем $\sqrt{x}$ в правую часть и возведем уравнение в квадрат. Получим $y(2\sqrt{x}+y)=2011$. Поскольку $y \neq 0$, то $\sqrt{x}$ – число рациональное, а значит, целое (действительно, если $\sqrt{x}=\dfrac{p}{q}$, где p и q – взаимно простые числа, то после возведения в квадрат получим, что p должно делиться на q). Далее, надо заметить (и проверить), что 2011 – простое число, и поэтому единственное разложение на множители дает $y = 1$, $2\sqrt{x}+y=2011$, откуда следует ответ.

10 класс.

1. 8 чисел: 1, 2, …, 8 расставили в некотором порядке в вершинах куба. Затем для каждого ребра куба подсчитали сумму двух чисел на его концах. Докажите, что среди этих сумм есть совпадающие.

Указание. См. задачу 2 для 9 класса.

2. Найдите площадь фигуры, задаваемой на координатной плоскости системой неравенств $\begin{cases} x \ge \sqrt{1-y^2} \\ y \ge \sqrt{1-x^2} \end{cases}$.



Ответ. $1-\dfrac{\pi}{4}$.

Указание. Фигура имеет вид, показанный на рисунке – это следует из исходных неравенств после возведения в квадрат с учетом ОДЗ. Отсюда получается ответ задачи.

3. В выпуклом четырехугольнике площади $S = 35$ проведены диагонали, разбивающие четырехугольник на 4 треугольника. Площади двух из них, примыкающих к противоположным сторонам четырехугольника, равны 6 и 10. Найдите площади остальных двух треугольников..

Ответ. 4 и 15.

Указание. См. задачу 4 для 9 класса.

4. Решите уравнение $\sqrt{x+2011}-\sqrt{x}=y$ в натуральных числах x, y.

Ответ. $x = 1005^2$; $y = 1$.

Указание. См. задачу 5 для 9 класса.

5. Найдите значение параметра a, при котором уравнение $x^4-ax^2+1=0$ имеет 4 корня, образующие арифметическую прогрессию.

Ответ. $\dfrac{10}{3}$**.**

Указание. Обозначим $t = x^2$. Тогда уравнение $t^2-at+1=0$ должно иметь два положительных корня t_1, t_2 ($t_1 < t_2$), а корни исходного уравнения будут иметь вид $-\sqrt{t_2}$, $-\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_2}$. Условие задачи об арифметической прогрессии дает соотношение $\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}=2\sqrt{t_1}$, т.е. $\sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1} \Rightarrow t_2=9t_1$. Из теоремы Виета имеем $t_1t_2=1$ и

$t_1 + t_2 = a$. Отсюда: $9t_1^2 = 1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{3}$ (учитывая положительность t_1) и $a = t_1 + 9t_1 = 10t_1 = \frac{10}{3}$.

11 класс.

1. Решите уравнение $\sqrt{-x^2 + x + 2} \cdot (\sin 2x - \pi \cos x) = 0$.

Ответ. $x_1 = -1;\ x_2 = 2;\ x_3 = \frac{\pi}{2}$.

Указание. Поскольку $-x^2 + x + 2 \geq 0$, получаем ОДЗ: $-1 \leq x \leq 2$. Приравнивая к нулю скобку $\sin 2x - \pi \cos x = 0$, получаем совокупность $\left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \\ \sin x = \frac{\pi}{2}\end{array}\right.$. Первое уравнение совокупности с учетом ОДЗ дает $x = \frac{\pi}{2}$, а второе решений не имеет, т.к. $\frac{\pi}{2} > 1$.

2. Найдите площадь фигуры, задаваемой на координатной плоскости системой неравенств $\begin{cases} x \geq \sqrt{1-y^2} \\ y \geq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$.

Ответ: $1 - \frac{\pi}{4}$. **Указание: С**м. задачу 2 для 10 класса**.**

3. У прямоугольного параллелепипеда объема $V = 2011$ все вершины имеют целочисленные координаты в декартовой системе координат. Найдите диагональ параллелепипеда.

Ответ. $\sqrt{2011^2 + 2} = \sqrt{4044123}$. **Указание.** Пусть размеры параллелепипеда $a \times b \times c$. Тогда имеем $abc = 2011$, и в силу простоты числа 2011 (это следует проверить), получаем, что ребра a, b, c равны (в некотором порядке) 2011, 1, 1, поэтому диагональ равна $\sqrt{2011^2 + 1^2 + 1^2}$.

Комментарий. В приведенном выше указании неявно предполагается, что ребра тетраэдра параллельны координатным осям и поэтому имеют целую длину. На самом деле это можно доказать, но доказательство представляет более сложную задачу (хотя и доступную школьникам), и от участников первого (предварительного) тура оно фактически не требовалось.

4. Найдите значение параметра a, при котором уравнение $x^4 - ax^2 + 1 = 0$ имеет 4 корня, образующие арифметическую прогрессию.

Ответ. $\frac{10}{3}$**. Указание.** См. задачу 5 для 10 класса.

5. Докажите, что уравнение $y^2 - x^2 = 2011x^3$ имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y.

Указание. Перепишем уравнение в виде $y^2 = x^2(2011x + 1)$. Для разрешимости этого уравнения в натуральных числах нужно, чтобы скобка $2011x + 1$ представляла собой точный квадрат: $2011x + 1 = t^2 \Leftrightarrow (t-1)(t+1) = 2011x$. Тогда достаточно в качестве t брать числа вида $t = 2011k + 1$, где k – любое натуральное число. Из последнего выражения имеем $x = (t+1)k = (2011k + 2)k$, и поэтому из исходного уравнения получаем $y = xt = (2011k + 2)(2011k + 1)k$. Поскольку k – любое натуральное число, x и y в указанных формулах принимают бесконечное множество значений. Утверждение доказано.

Олимпиада "Будущие исследователи – будущее науки". Математика (I тур). Вариант 23.01.11

В каждой параллели предлагалось 5 задач, максимальная оценка каждой задачи 20 баллов

9 класс

1. К числу 2011 припишите справа двузначное число так, чтобы полученное число делилось на 36.

Ответ. 32 или 68. **Указание.** Пусть справа приписываются цифры a и b. По признаку делимости на 9 сумма цифр приписываемого числа должна быть равна либо 5, либо $5 + 9 = 14$. Если $a + b = 5$, то варианты 50, 41, 32, 23, 14, 05 дают только одно число 32, делящееся на 4 (по признаку делимости на 4 как раз и надо проверить число, составленное из последних двух цифр). Если $a + b = 14$, то варианты 95, 86, 77, 68, 59 дают число 68.

2. Дан единичный квадрат. При проведении окружности радиуса 0,56 с центром в центре квадрата образуются 4 одинаковых сегмента в круге, а в квадрате – 4 одинаковых "колпачка" (части квадрата, не принадлежащие кругу). Что, и насколько, больше: площадь сегмента или площадь "колпачка"?

Ответ. Площадь "колпачка" больше площади сегмента на $\dfrac{1-\pi(0{,}56)^2}{4}$. **Указание.** Пусть S_0 – площадь общей части круга и квадрата. Тогда $S_{\text{квадр.}} = 1 = S_0 + 4S_{\text{колп.}}$, $S_{\text{кр.}} = \pi(0{,}56)^2 = S_0 + 4S_{\text{сегм.}}$. Из этих равенств после вычитания получим $4(S_{\text{колп.}} - S_{\text{сегм.}}) = 1-\pi(0{,}56)^2 > 1 - 3{,}15\cdot 0{,}3136 = 0{,}01216 > 0$.

3. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой квадрат натурального числа.

Ответ. 986431. **Указание.** Очевидно, среди этих цифр нуля нет. Далее, имеем $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 9=2^7\cdot 3^4\cdot 5^1\cdot 7^1$. Поэтому надо убрать цифры 5, 7 и нечетную степень двойки, а значит, надо убрать цифру 2 (очевидно, не следует убирать цифры 6 и 8, т.к. нам нужен максимальный результат). Ясно, что оставшиеся цифры нужно расположить в порядке убывания.

4. Существует ли выпуклый четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны, а длины трех последовательных сторон равны 2010, 2011, 60?

Ответ. Не существует. **Указание.** Предположим, что такой четырехугольник $ABCD$ существует. Пусть $a = AB = 2010$, $b = BC = 2011$, $c = CD = 60$, $d = AD$. Далее, пусть O – точка пересечения диагоналей и $x = AO$, $y = BO$, $z = CO$, $t = DO$. Тогда по теореме Пифагора

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ y^2+z^2=b^2 \\ z^2+t^2=c^2 \\ t^2+y^2=d^2 \end{cases}$$

. Отсюда $a^2+c^2=b^2+d^2=x^2+y^2+z^2+t^2$. Подставляя длины сторон, получим $2010^2+60^2=2011^2+d^2$, тогда $d^2=60^2-(2011^2-2010^2)=60^2-(2011+2010) = 3600 - 4021 < 0$. Противоречие.

5. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $(x+y)^2-2011=y^2$?

Ответ. 4 решения. **Указание.** После возведения в квадрат и приведения подобных членов уравнение записывается в виде $x(x+2y)=2011$. Поскольку 2011 – простое число (это следует проверить), будем иметь следующие возможные разложения на целые множители

$$\begin{cases} x=1 \\ x+2y=2011 \end{cases}, \begin{cases} x=-1 \\ x+2y=-2011 \end{cases}, \begin{cases} x=2011 \\ x+2y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=-2011 \\ x+2y=-1 \end{cases}.$$

Решения указанных систем дают (1; 1005), (–1; –1005), (2011; –1005), (–2011; 1005).

10 класс

1. Дан единичный квадрат. При проведении окружности радиуса 0,56 с центром в центре квадрата образуются 4 одинаковых сегмента в круге, а в квадрате – 4 одинаковых "колпачка" (части квадрата, не принадлежащие кругу). Что, и насколько, больше: площадь сегмента или площадь "колпачка"?

Ответ. Площадь "колпачка" больше площади сегмента на $\dfrac{1-\pi(0{,}56)^2}{4}$. **Указание.** См. задачу 2 для 9 класса.

2.. Существует ли выпуклый четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны, а длины трех последовательных сторон равны (в указанном порядке) : **а**) 2010, 2011, 60 ? **б**) 2010, 2011, 65 ?

Ответ. **а**) не существует; **б**) существует. **Указание. а**) Предположим, что такой четырехугольник $ABCD$ существует. Пусть $a = AB = 2010$, $b = BC = 2011$, $c = CD = 60$, $d = AD$. Далее, пусть O – точка пересечения диагоналей и $x = AO$, $y = BO$, $z = CO$, $t = DO$. Тогда по теореме Пифагора

$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ y^2+z^2=b^2 \\ z^2+t^2=c^2 \\ t^2+y^2=d^2 \end{cases}$. Отсюда $a^2+c^2=b^2+d^2=x^2+y^2+z^2+t^2$. Подставляя длины сторон, получим $2010^2+60^2=2011^2+d^2$, тогда $d^2=60^2-(2011^2-2010^2)=60^2-(2011+2010)$ $=3600-4021<0$. Противоречие.

б) В условиях пункта б) получим значение $d^2=65^2-4021=4225-4021=204>0$. Для построения четырехугольника возьмем длину отрезка $x = AO$ так, чтобы $x^2 < a^2$ и $x^2 < d^2$, т.е. $x^2 < 204$. Тогда $y^2=a^2-x^2>0$, $z^2=b^2-a^2+x^2>0$, (т.к. $b>a$), и $t^2=c^2-b^2+a^2-x^2=d^2-x^2>0$. Отложив последовательно найденные отрезки *x, y, z, t* от одной точки вдоль двух перпендикулярных прямых, получим вершины искомого четырехугольника.

3. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой квадрат натурального числа.

Ответ. 986431. **Указание.** См. задачу 3 для 9 класса.

4. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых корни уравнения $(x-\sqrt{a})(x^2-3ax+2a^2)=0$ образуют арифметическую прогрессию.

Ответ. $a=\dfrac{1}{9}$; $a=\dfrac{4}{9}$; (a=0).**Указание.** (Рассмотрение тривиального случая a=0 или его отсутствие никак не учитывалось при проверке). Итак, рассмотрим только значения $a>0$ (неотрицательность a следует из ОДЗ), и поэтому $a<2a$. Корни данного уравнения равны $\sqrt{a}$, a, $2a$, они могут располагаться одним из трех способов: 1) $a<2a<\sqrt{a}$;

2) $a < \sqrt{a} < 2a$; 3) $\sqrt{a} < a < 2a$. В первом случае из условия на арифметическую прогрессию и неравенства $a > 0$ имеем $a + \sqrt{a} = 4a \Leftrightarrow 3a = \sqrt{a} \Leftrightarrow 9a^2 = a \Leftrightarrow a = \frac{1}{9}$. Аналогично, во втором случае получим $3a = 2\sqrt{a} \Leftrightarrow a = \frac{4}{9}$. В третьем случае получим $a = 0$.

5. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $(x+y)^2 - 2011 = y^2$?

Ответ. 4 решения.

Указание. После возведения в квадрат и приведения подобных членов уравнение записывается в виде $x(x+2y) = 2011$. Поскольку 2011 – простое число (это следует проверить), будем иметь следующие возможные разложения на целые множители

$$\begin{cases} x = 1 \\ x + 2y = 2011 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y = -2011 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2011 \\ x + 2y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -2011 \\ x + 2y = -1 \end{cases}.$$

Решения указанных систем дают (1; 1005), (–1; –1005), (2011; –1005), (–2011; 1005).

11 класс.

1. Решите уравнение $2\cos 2x + \sqrt{5}\sin x = 0$.

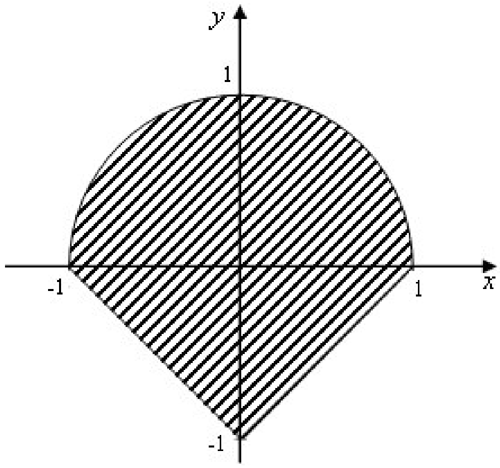
Ответ. $x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{\sqrt{5} - \sqrt{37}}{8}\right) + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Указание. Обозначим $t = \sin x$ и, заменив $\cos 2x$ на $1 - 2\sin^2 x$, получим уравнение $4t^2 - \sqrt{5}t - 2 = 0$. Его корни $t_1 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{37}}{8}$ и $t_2 = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{37}}{8}$. Поскольку $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{37}}{8} > \frac{2+6}{8} = 1$, то уравнение $\sin x = t_1$ решений не имеет. Для корня t_2 выполнено $|t_2| = \frac{\sqrt{37} - \sqrt{5}}{8} < \frac{7-2}{8} = \frac{5}{8} < 1$, и поэтому уравнение $\sin x = t_2$ имеет решения.

2. Найдите площадь фигуры, задаваемой на координатной плоскости неравенствами $|x| - 1 \le y \le \sqrt{1 - x^2}$.

Ответ. $\frac{\pi}{2} + 1$.

Указание. Фигура имеет вид, показанный на рисунке: она ограничена снизу графиком $y = |x| - 1$, а сверху – полуокружностью $y = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y > 0 \end{cases}$.



Площадь фигуры складывается из площади полукруга единичного радиуса и половинки квадрата с диагональю, равной 2.

3. В пространстве с декартовой системой координат дан тетраэдр *OABC*. Точка *O* – начало координат, точки *A*, *B* и *C* лежат на координатных осях и имеют целые координаты. Известно, что длины *OA*, *OB* и *OC* попарно различны, а объем тетраэдра равен 1. Найдите длину наибольшего ребра тетраэдра.

Ответ. $\sqrt{13}$. **Указание.** Пусть длины ребер, идущих вдоль координатных осей, равны a, b, c. Тогда объем тетраэдра $V = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{ab}{2}\right)\cdot c = \frac{abc}{6} = 1$. По условию целочисленности a, b, c имеем (с точностью до порядка) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. Наибольшая длина ребра равна $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых корни уравнения $(x-\sqrt{a})(x^2 - 3ax + 2a^2) = 0$ образуют арифметическую прогрессию.

Ответ. $a = \frac{1}{9}$; $a = \frac{4}{9}$; (a=0).**Указание.** См. задачу 4 для 10 класса**.**

5. Решите уравнение $x! + 24 = y^2$ в натуральных числах x, y. (Напомним, что $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.)
Ответ. (1; 5), (5; 12). **Указание.** Непосредственно проверяется, что числа $x = 1$; $x = 5$ удовлетворяют уравнению при y=5 и y=12 соответственно, а числа $2 \le x \le 4$ не подходят. При $x \ge 6$ левая часть ($x! + 24$) делится на 3, но не делится на 9, т.к. $x!$ делится на 9, а 24 на 9 не делится.