Олимпиада "Будущие исследователи – будущее науки" по математике (финальный тур)

9 класс.

1. Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней. Докажите, что если $a+c<b$, то числа a и c отрицательны.

Указание. По условию, график параболы $y = ax^2 + bx + c$ не пересекается с осью Ox. Поскольку $a + c < b$, то $y(-1) = a - b + c < 0$. Значит, ветви параболы направлены вниз и $y(0)<0$, т.е. $a<0$ и $c<0$.

Другое решение. Из неравенства $D = b^2 - 4ac < 0$ следует, что a и c одного знака. Если предположить, от противного, что $a>0$ и $c>0$, то возведя в квадрат неравенство $0 < a + c < b$, получим $b^2 > a^2 + c^2 + 2ac \geq 2ac + 2ac = 4ac$, т.е. дискриминант $b^2 - 4ac > 0$. Противоречие.

2. Пусть $s(n)$ обозначает сумму цифр (в десятичной записи) натурального числа n. Найдите все натуральные n, для которых $n+s(n)=2011$.

Ответ: 1991**. Указание.** Поскольку $n<2011$, то $s(n) \leq 2 + 9 + 9 + 9 = 29$. Значит, $n = 2011 - s(n) \geq 1982$. Поскольку числа $n = 2011$ и $n = 2010$, очевидно, не подходят, то для первых трех цифр числа n могут быть три возможности: 198, либо 199, либо 200. Пусть последняя (четвертая) цифра числа n равна x. Тогда в каждом из указанных случаев получим уравнение: либо 1) $1980 + x + 18 + x = 2011$, либо 2) $1990 + x + 19 + x = 2011$, либо 3) $2000 + x + 2 + x = 2011$. Только во втором случае уравнение имеет целочисленное решение, а именно, $x = 1$.

3. Рёбра куба занумеровали числами от 1 до 12 и затем для каждой грани подсчитали сумму номеров на рёбрах данной грани. Докажите, что найдется грань, у которой эта сумма меньше 27.

Указание. Подсчитаем на каждой грани соответствующую сумму и затем сложим эти суммы для всех шести граней. Получим в результате $(1 + 2 + \ldots + 12)\cdot 2$, так как при таком подсчете любое ребро будет считаться дважды. Итак, получаем общую сумму 156, и тогда хотя бы для одной грани ее сумма номеров не превосходит $\frac{156}{6} = 26$. (Действительно, в противном случае мы получили бы общую сумму не меньше $27 \cdot 6 > 156$).

4. В треугольнике ABC угол A равен 60^0, расстояния от вершин B и C до центра вписанной окружности треугольника ABC равны, соответственно, 3 и 4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Ответ. $\sqrt{\frac{37}{3}}$. **Указание.** Пусть O – центр вписанной окружности. Тогда $\angle OBC + \angle BCO = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \frac{1}{2} \cdot 120° = 60°$, и поэтому $\angle BOC = 180° - 60° = 120°$. По теореме косинусов получим $BC^2 = BO^2 + OC^2 - 2BO \cdot OC \cdot \cos \angle BOC =$ $3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-0{,}5) = 37$. Поэтому для радиуса R описанной окружности треугольника ABC будем иметь $2R \sin 60° = \sqrt{37}$. Отсюда $R = \sqrt{37 / 3}$.

5. Единичный квадрат первой четверти на координатной плоскости ($0 \leq x, y \leq 1$) разбит на квадратики со стороной $2 \cdot 10^{-4}$. Сколько узлов этого разбиения (внутри единичного квадрата) лежит на параболе $y = x^2$?

Ответ. 49. **Указание.** Узлы разбиения имеют координаты вида (i/5000, j/5000), где i, $j = 1,2,\ldots,4999$. Условие того, что данный узел лежит на параболе, есть $\frac{j}{5000} = \left(\frac{i}{5000}\right)^2$, т.е. $i^2 = j \cdot 5^4 \cdot 2^3$. Значит, номер i должен иметь вид $i = 5^2 \cdot 2^2 \cdot k = 100k$, где k – любое натуральное число, меньшее $\frac{5000}{100} = 50$.

Ягубов.рф

10 класс.

1. Пусть $s(n)$ обозначает сумму цифр (в десятичной записи) натурального числа n. Найдите все натуральные n, для которых $n+s(n)=2011$.
Ответ: 1991**. Указание.** См. задачу 2 для 9 класса**.**

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x^3 - a^3| = x - a$ имеет три различных корня.

Ответ. $\frac{-2}{\sqrt{3}} < a < \frac{-1}{\sqrt{3}}$. **Указание.** Уравнение имеет корень $x=a$. При $x \neq a$ сократим обе части уравнения на $x - a$. Тогда при $x>a$ в левой части получим $x^2 + xa + a^2$, а при $x<a$ в левой части будет $-(x^2 + xa + a^2)$. Итак, при $x \neq a$ имеем совокупность двух систем:

$\begin{cases} x > a \\ x^2 + xa + a^2 = 1 \end{cases}$, либо $\begin{cases} x < a \\ x^2 + xa + a^2 = -1 \end{cases}$. Вторая система не имеет решений, т.к. дискриминант ее квадратного уравнения $D = -3a^2 - 4 < 0$. Корни квадратного уравнения первой системы равны $\left(-a \pm \sqrt{4 - 3a^2}\right)/2$. Условие того, что оба 'этих корня больше a, равносильно неравенству $\frac{-a - \sqrt{4 - 3a^2}}{2} > a \Leftrightarrow$

$$\sqrt{4-3a^2} < -3a \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ 0 < 4 - 3a^2 < 9a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \frac{1}{3} < a^2 < \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-2}{\sqrt{3}} < a < \frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

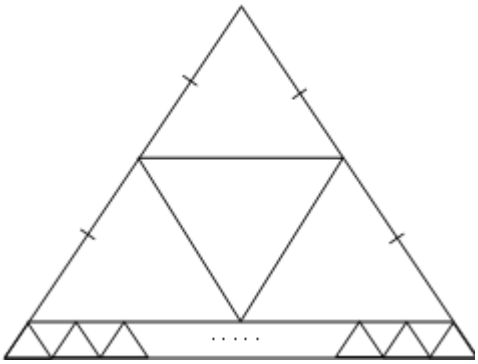
3. В треугольнике ABC угол A равен 60^0, расстояния от вершин B и C до центра вписанной окружности треугольника ABC равны, соответственно, 3 и 4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC. .

Ответ. $\sqrt{\frac{37}{3}}$. **Указание.** См. задачу 4 для 9 класса**.**

4. Единичный квадрат первой четверти на координатной плоскости $(0 \le x, y \le 1)$ разбит на квадратики со стороной $2 \cdot 10^{-4}$. Сколько узлов этого разбиения (внутри единичного квадрата) лежит на параболе $y = x^2$?.
Ответ. 49. **Указание.** См. задачу 5 для 9 класса**.**

5. **а**) Докажите, что равносторонний треугольник можно разбить на 2011 равносторонних треугольников. **б**) Можно ли добиться того, чтобы в искомом разбиении длины сторон разных треугольников принимали лишь два различных значения?
Ответ: б) да, можно**. Указание**. **а**) Конечно, пункт а) следует из положительного ответа пункта б), но можно привести независимое решение. Средними линиями равносторонний треугольник разбивается на 4 равносторонних треугольника, т.е число треугольников увеличивается на 3. Разбивая любой из получившихся треугольников на 4 равносторонних, мы будем иметь разбиение из 7 треугольников, и так далее: т.е. можно таким образом получить разбиение исходного треугольника на $3n+1$ равносторонних треугольников для любого n.

б) Пусть дан равносторонний треугольник ABC с единичной стороной. Разобьѐм основание AC на 1004 равные части и возьмѐм точки A_1 и C_1 на сторонах AB и CB, соответственно, на расстоянии 1/1004 от точек A и C. Полосу между параллельными прямыми AC и A_1C_1 в треугольнике ABC можно



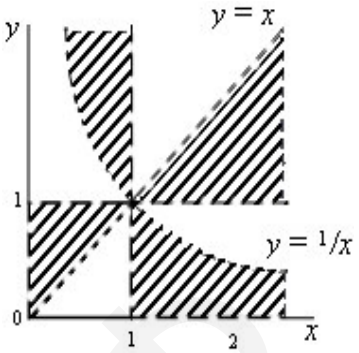
разбить на 1004+1003=2007 равносторонних треугольников со стороной 1/1004 (см. рисунок). Оставшаяся часть треугольника *ABC* представляет собой равносторонний треугольник со стороной 1003/1004, который средними линиями разбивается на 4 равносторонних треугольника. В результате получится искомое разбиение из 2011 треугольников со сторонами либо .1/1004, либо 1003/2008.

Ягубов.рф

11 класс.

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $\log_x y < \log_y x$.

Указание. ОДЗ: $x > 0,\ y > 0, x \neq 1,\ y \neq 1$. Пусть $t = \log_x y$. Тогда имеем неравенство $t < \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{(t-1)(t+1)}{t} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -1 \\ 0 < t < 1 \end{array}\right.$. В случае, когда $t<-1$, получаем две системы: $\begin{cases} x > 1 \\ y < \frac{1}{x} \end{cases}$, либо $\begin{cases} x < 1 \\ y > \frac{1}{x} \end{cases}$. В случае, когда $0<t<1$, также имеем две системы: $\begin{cases} x > 1 \\ 1 < y < x \end{cases}$, либо $\begin{cases} x < 1 \\ x < y < 1 \end{cases}$. Совокупность указанных решений четырех систем изображена на рисунке.



2. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $|x^3 - a^3| = x - a$ имеет три различных корня.

Ответ. $\frac{-2}{\sqrt{3}} < a < \frac{-1}{\sqrt{3}}$. **Указание.** См. задачу 2 для 10 класса

3. Найдите множество значений и наименьший период функции $y = cos^2\ 3x + sin\ 6x$.

Ответ. Множество значений $\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$, наименьший период $\pi/3$. **Указание.** Преобразуем функцию *y* к виду $y = \frac{1+\cos 6x}{2} + \sin 6x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\sin(6x + \alpha)$, где α – вспомогательный угол ($\sin\alpha = \sqrt{1/5}, \cos\alpha = \sqrt{4/5}$). Таким образом, график данной функции получается из графика $y = \sin 6x$ растяжением по оси *y* в $\frac{\sqrt{5}}{2}$ раз, затем сдвигом по оси *x* влево на величину $\frac{\alpha}{6}$ и, наконец, сдвигом вверх по оси y на $\frac{1}{2}$. Поэтому ответ на вопрос задачи следует из того, что множество значений функции $y = \sin 6x$ есть [-1;1], а наименьший период $\frac{2\pi}{6}$; и, значит, множество значений данной функции есть $\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$, а период – такой же, как у функции $y = \sin 6x$, т.е. $\frac{\pi}{3}$.

4. Дан треугольнике *ABC,* у которого сторона *BC* вдвое больше стороны *AB* , и в нём проведена биссектриса *BM*. **а)** Найдите отношение R_1/R_2 , где R_1, R_2 — радиусы описанных окружностей треугольников *ABM* и *CBM* соответственно. **б)** Докажите, что $3/4 < r_1/r_2 < 1$, где r_1, r_2 — радиусы вписанных окружностей треугольников *ABM* и *CBM* соответственно.

Ответ. а) . R_1/R_2 = ½ . **Указание. а)** Пусть $\angle BMA = \alpha$, тогда $\angle BMC = \pi - \alpha$. Тогда в треугольниках *ABM* и *CBM* имеем соотношения $AB = 2R_1 \sin\alpha$,

$BC = 2R_2 \sin(\pi - \alpha) = 2R_2 \sin\alpha$. Отсюда $R_1/R_2 = AB/BC = ½$. (Заметим, что в данном решении не используется тот факт, что BM — биссектриса).

б) Площадь треугольника CBM вдвое больше площади треугольника ABM (это следует, например, из формулы площади по двум сторонам при вершине B и одному и тому же углу, равному половине угла B). Имеем $2S_1 = P_1 r_1 = (AB + AM + BM) \cdot r_1$ и $2S_2 = P_2 r_2 = (2AB + 2AM + BM) \cdot r_2$ (здесь P_1, P_2 – периметры треугольников ABM и CBM, и при подсчете периметра P_2 мы воспользовались равенством $CM=2AM$, которое следует из свойства биссектрисы: $CM/AM=CB/AB$). Обозначим $d=BM$, $t=AB+AM$. Очевидно (из неравенства треугольника), $d<t$. Таким образом, в этих обозначениях имеем $2(t+d)r_1 = (2t+d)r_2$. Отсюда следует, во первых, что $r_1 < r_2$. Во-вторых, искомое неравенство $3/4 < r_1/r_2$ принимает вид $8t+4d > 6t+6d$, т.е $d<t$.

5. **а**) Докажите, что равносторонний треугольник можно разбить на 2011 равносторонних треугольников. **б**) Можно ли добиться того, чтобы в искомом разбиении длины сторон разных треугольников принимали лишь два различных значения?

Ответ: б) да, можно**. Указание**. См. задачу 5 для 10 класса

Ягубов.рф