

Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» 2009/2010.
Математика. Заочный тур.

* Перед выполнением работы ознакомьтесь, пожалуйста, с Правилами участия!

Задания для 9 и 10 классов

1. Решите уравнение $x^4 + 4 + 3x(x^2 - 2x + 2) = 0$.
2. Существуют ли иррациональные числа x, y такие, что
 - а) числа $(x^3 - x^2y + xy^2 - 1)$ и $(x^2 - xy + y^2)$ рациональные?
 - б) числа $(x^3 - 3x^2y + xy^2 - 3)$ и $(x^2 - 3xy + y^2)$ рациональные?
3. Вершины правильного 99-угольника раскрашены в некотором порядке в два цвета: 25 вершин -- в красный цвет, остальные -- в синий. Докажите, что найдутся четыре вершины подряд, среди которых две красные и две синие.
4. Докажите, что существует 2010 точных квадратов (т.е. квадратов натуральных чисел), которые отличаются друг от друга только порядком цифр в десятичной записи.
5. Дан $\triangle ABC$. На стороне BC взята такая точка M , что $\angle BAM = \angle BCA$. Докажите, что центр описанной около треугольника ABC окружности лежит на прямой, проходящей через точку B перпендикулярно к AM .

Задания для 11 класса

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $y < 1 + x(y^2 - 1)$.
2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3 - x = \sqrt{1 - y^2} \\ 4 - y = \sqrt{16 - x^2} \end{cases}$$
3. Решите неравенство
$$\frac{x^2 - (\sin 3 + \sin 4)x + (\sin 3) \cdot (\sin 4)}{x^2 - \cos^2 4} < 0.$$
4. Докажите, что если у остроугольного треугольника все стороны меньше 1, то $R < \frac{\sqrt{3}}{3}$, где R – радиус окружности, описанной около треугольника.
5. В какой точке графика функции $y = x^2 + x + 2$, $x \in [0; 1]$, нужно провести касательную, чтобы площадь трапеции, ограниченной этой касательной и прямыми $x=0$, $x=1$ и $y=0$, была наибольшей?
6. Найдите все натуральные числа n , для которых $n!$ в десятичной записи оканчивается 2010 нулями. ($n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.)
7. Можно ли расположить на плоскости семь многоугольников (не обязательно выпуклых) так, чтобы каждый многоугольник пересекался ровно с тремя другими?
8. Найдите наименьшее натуральное число, у которого количество всех натуральных делителей равно 2010.
9. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=2$ и $BC=1$. Боковая сторона AB , равная 1, перпендикулярна основаниям. На сторонах BC и CD взяты соответственно точки M и N такие, что $\angle MAN = 45^\circ$. Найдите все углы треугольника MAN .
10. Данный квадрат требуется разрезать на 5 частей, из которых можно было бы сложить два квадрата так, чтобы у одного из этих квадратов сторона была вдвое больше, чем у другого. (Укажите построение при помощи циркуля и линейки, на основании которого проводится разрезание.)