Математическая олимпиада
«Будущие исследователи – будущее науки» 2010
Задачи и решения очного тура

Задачи для 9 и 10 классов

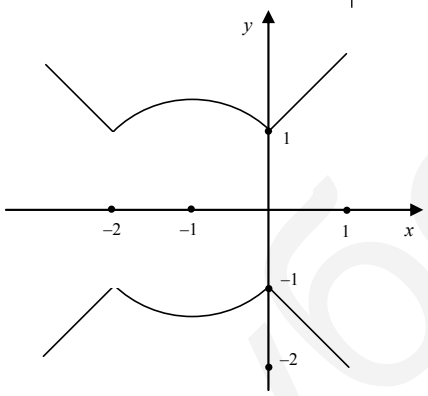
9-10.1 Найдите множество значений параметра а, при которых уравнение $x^2 - 6ax + \left(2 - 2a + 9a^2\right) = 0$ имеет два корня, большие числа 3.

Ответ. $a > \frac{11}{9}$.

Решение. Условие задачи равносильно неравенству $3a - \sqrt{9a^2 - (2 - 2a + 9a^2)} > 3$, причём подкоренное выражение должно быть строго положительно, т.е. $a > 1$ и

$$\sqrt{2(a-1)} < 3(a-1) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 2(a-1) < 9(a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow a - 1 > \frac{2}{9}.$$

9-10.2 Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\left|x^2 + 2x\right| = y^2 - 1$.



Решение. Если $x^2 + 2x \geq 0$, т.е. при $x \geq 0$ или $x \leq -2$, уравнение принимает вид $x^2 + 2x = y^2 - 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 = y^2$. Этому случаю на координатной плоскости соответствуют части двух прямых $x + 1 = y$ и $-x - 1 = y$, лежащие вне полосы $-2 < x < 0$.

Если же $x^2 + 2x \leq 0$, т.е. при $-2 < x < 0$, уравнение примет вид $-x^2 - 2x = y^2 - 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2$. Этому случаю на координатной плоскости соответствует часть окружности с центром в точке (–1;0) радиуса $\sqrt{2}$, лежащая внутри полосы $-2 < x < 0$. В результате получим множество, изображенное на рисунке.

9-10.3 Существует ли выпуклый 2010-угольник, у которого все углы выражаются целым числом градусов?

Ответ. Не существует.

Решение. Предположим, от противного, что такой многоугольник существует. Тогда сумма его внешних углов будет не менее $1° \cdot 2010 = 2010°$, что противоречит теореме о сумме внешних углов выпуклого многоугольника (эта сумма всегда равна 360°). Противоречие.

9-10.4 Докажите, что уравнение $2^{2010} + 2^{1010} + 2^x = y^2$ в натуральных числах имеет не менее трѐх решений

ЯУбов.РФ

Решение. Представим левую часть в виде квадрата суммы двух чисел в разных вариантах, а именно: 1) $(2^{1005}+2^{505})^2$; 2) $(2^{1005}+2^{x/2})^2$; 3) $(2^{505}+2^{x/2})^2$. В первом варианте $2^x = 2\cdot 2^{1510} \Leftrightarrow x = 1511$. Во втором варианте $2^{1010} = 2\cdot 2^{1005+x/2} \Leftrightarrow x = 8$. В третьем варианте $2^{2010} = 2\cdot 2^{505+x/2} \Leftrightarrow x = 3008$.

9-10.5 В трапеции *ABCD* точка *N* – середина боковой стороны *CD,* отрезки *AN* и *NB* перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника *ANB* равна *S*.

Ответ. 2*S*.

Комментарий. Условие перпендикулярности $AN \perp NB$ является излишним, но при этом условии задача допускает различные решения.

Первое решение (без использования условия $AN \perp NB$). Проведем среднюю линию *MN* и подсчитаем площадь ΔABN как сумму площадей ΔAMN и ΔBMN с общим основанием *MN* и равными высотами $\frac{h}{2}$ (где *h* – высота трапеции). Таким образом,

$$S = 2\left(\frac{1}{2}\cdot MN\cdot\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}MN\cdot h = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Второе решение (с использованием условия $AN \perp NB$). В прямоугольном треугольнике *ABN* медиана *MN* равна половине гипотенузы *AB*. Поэтому в равнобедренном треугольнике *AMN* равны углы при основании, а значит, $\angle MAN = \angle MNA = \angle NAD$. Таким образом, *N* лежит на биссектрисе угла *A* и поэтому высота в треугольнике *ABN*, опущенная из вершины *N*, равна $\frac{h}{2}$. В результате получим:

$$S = \frac{1}{2}AB\cdot h_{AB} = \frac{1}{2}\left(2MN\cdot\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Ягубов.рф

Задачи для 11 класса

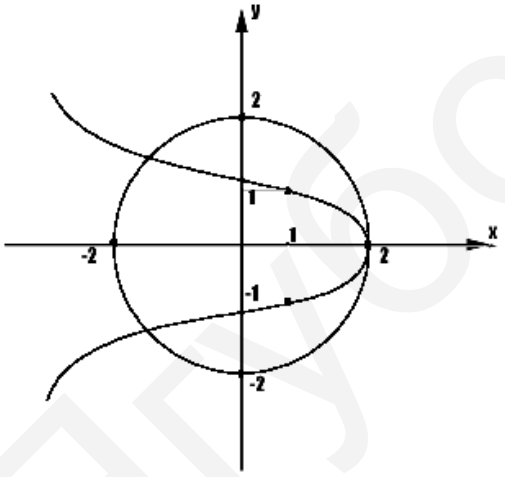
11.1 Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin(\frac{\pi}{2}(2x^2+1))+\cos(\pi(x^2+4x))=0$.

Ответ: $-1+\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Решение. Записав первое слагаемое как $\cos\pi x^2$ и преобразовав сумму косинусов в произведение, получим две серии корней $4x=2n+1$ и $2x^2+4x=2m+1$ (m,n – целые). Положительные корни имеют вид $x=\frac{n}{2}+\frac{1}{4}$ и $x=-1+\sqrt{m+\frac{3}{2}}$ (где m,n – неотрицательные целые). Для этих серий наименьшие корни – это $\frac{1}{4}$ и $-1+\sqrt{\frac{3}{2}}<\frac{1}{4}$ (последнее неравенство проверяется при возведении в квадрат обеих частей эквивалентного неравенства $\sqrt{\frac{3}{2}}<\frac{5}{4}$).

11.2 Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2a, \\ x+\log_2(y^2+1)=a \end{cases}$ имеет единственное решение.

Ответ: a=0.



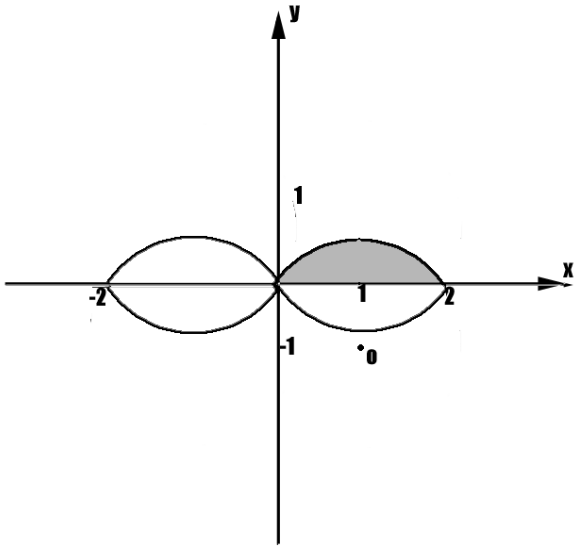
Решение. Заметим, что если (x,y) – решение системы, то и (x, -y) тоже является решением этой системы. Поэтому если для параметра a система имеет единственное решение, то значение y должно быть равно нулю. Тогда из второго уравнения имеем $x=a$, и подставляя в первое уравнение $x=a$, $y=0$, получим $a^2=2a$. Значит, a=0 или a=2. Теперь необходимо проверить эти значения a (отметим, что они получены как следствие единственности решения системы, но на самом деле ещѐ не гарантируют единственности).

При a=0 первое уравнение эквивалентно равенствам $x=y=0$, и для этих нулевых значений неизвестных второе уравнение удовлетворяется, т.е. значение a=0 подходит.

При a=2 система имеет решение x=2, y=0 , но для системы это решение – не единственное. Действительно, кривая $x=2-\log_2(y^2+1)$ пересекает окружность $x^2+y^2=4$ не только в точке (2; 0) , но ещѐ в двух симметричных точках из второго и третьего квадрантов. (см. рис.). Это следует из того, что точки (1;1) и (1;-1) лежат на данной кривой и расположены внутри окружности $x^2+y^2=4$ (или можно убедиться, что такими будут и точки (0; $\pm\sqrt{3}$) на оси Оу), а при |y|>2 соответствующие точки кривой расположены вне окружности.

11.3 Найдите площадь фигуры, которая задаѐтся на координатной плоскости неравенством $x^2+y^2\le 2(|x|-|y|)$.

Ответ: $2\pi-4$.



Решение. Очевидно, фигура симметрична относительно координатных осей и начала координат (поскольку неравенство не изменяется при изменении знаков *x*, *y*). Поэтому достаточно рассмотреть часть фигуры в первом квадранте и площадь этой части умножить на 4. При неотрицательных *x, y* неравенство запишется в виде $(x-1)^2+(y+1)^2 \le 2$. Таким образом, в первом квадранте имеем часть круга радиуса $\sqrt{2}$ с центром (1;–1) (см. рис.). Данная часть круга является сегментом с центральным углом 90° (это угол между двумя радиусами, проведенными в граничные точки (0;0) и (2;0)) данного сегмента. Поэтому площадь сегмента равна $\pi(\sqrt{2})^2/4-1$, а искомая площадь фигуры равна $2\pi-4$.

11.4 Существует ли 2010-угольник со сторонами длины 1, 2, …, 2010 (в некотором порядке), в который можно вписать окружность?

Ответ: Не существует.

Решение. Если в многоугольник с четным числом сторон можно вписать окружность, то сумма длин сторон с нечетными номерами (начиная отсчет против часовой стрелки с некоторой фиксированной вершины) равен сумме длин сторон с четными номерами. Этот факт доказывается точно так же, как соответствующая теорема из школьного курса для четырехугольника (нужно отметить равные отрезки касательных на соседних сторонах). В нашем случае сумма всех длин сторон равна нечетному числу $1+2+\ldots+2010=1005\cdot 2011$. Поэтому не удастся разбить 2010 данных отрезков на две части с одинаковыми суммами.

11.5 **а)** Найдите приведённый квадратный трёхчлен *P(x)*, для которого график y=*P(x)* симметричен относительно оси Oy и касается прямой *y=x*.

б) Пусть *P(x)* – квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом. Докажите, что если уравнение *P(x)=x* имеет единственное решение, то уравнение *P(P(x))=x* также имеет единственное решение.

Ответ: **а**) $P(x)= x^2+1/4$.

Решение. а) Условие симметрии относительно оси Oy означает, что *P(x)* имеет вид $P(x) = x^2+a$. Условие касания прямой *y=x* означает, что квадратное уравнение $x^2+a=x$.имеет единственное решение, т.е. его дискриминант $1-4a$ равен нулю.

б) Поскольку уравнение *P(x)=x* имеет единственное решение, скажем, x_0, то график *y=P(x)* расположен выше прямой *y=x* всюду, кроме единственной точки (x_0, x_0)– точки пересечения. Поэтому при $x \ne x_0$ имеем $P(P(x)) \ge P(x) > x$, т.е. уравнение *P(P(x))=x* не имеет других корней, кроме x_0 .