

Математическая олимпиада
«Будущие исследователи – будущее науки» 2010
Задачи и решения очного тура

Задачи для 9 и 10 классов

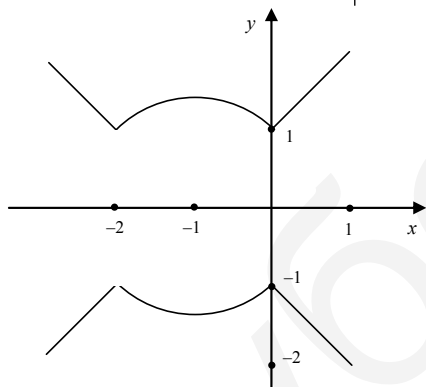
9-10.1 Найдите множество значений параметра a , при которых уравнение $x^2 - 6ax + (2 - 2a + 9a^2) = 0$ имеет два корня, большие числа 3.

Ответ. $a > \frac{11}{9}$.

Решение. Условие задачи равносильно неравенству $3a - \sqrt{9a^2 - (2 - 2a + 9a^2)} > 3$, причём подкоренное выражение должно быть строго положительно, т.е. $a > 1$ и

$$\sqrt{2(a-1)} < 3(a-1) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 2(a-1) < 9(a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow a-1 > \frac{2}{9}.$$

9-10.2 Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|x^2 + 2x| = y^2 - 1$.



Решение. Если $x^2 + 2x \geq 0$, т.е. при $x \geq 0$ или $x \leq -2$, уравнение принимает вид $x^2 + 2x = y^2 - 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 = y^2$. Этому случаю на координатной плоскости соответствуют части двух прямых $x+1 = y$ и $-x-1 = y$, лежащие вне полосы $-2 < x < 0$.

Если же $x^2 + 2x \leq 0$, т.е. при $-2 < x < 0$, уравнение примет вид $-x^2 - 2x = y^2 - 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2$. Этому случаю на координатной плоскости соответствует часть окружности с центром в точке $(-1; 0)$ радиуса $\sqrt{2}$, лежащая внутри полосы $-2 < x < 0$. В результате получим множество, изображенное на рисунке.

9-10.3 Существует ли выпуклый 2010-угольник, у которого все углы выражаются целым числом градусов?

Ответ. Не существует.

Решение. Предположим, от противного, что такой многоугольник существует. Тогда сумма его внешних углов будет не менее $1^\circ \cdot 2010 = 2010^\circ$, что противоречит теореме о сумме внешних углов выпуклого многоугольника (эта сумма всегда равна 360°). Противоречие.

9-10.4 Докажите, что уравнение $2^{2010} + 2^{1010} + 2^x = y^2$ в натуральных числах имеет не менее трёх решений

Решение. Представим левую часть в виде квадрата суммы двух чисел в разных вариантах, а именно: 1) $(2^{1005} + 2^{505})^2$; 2) $(2^{1005} + 2^{x/2})^2$; 3) $(2^{505} + 2^{x/2})^2$. В первом варианте $2^x = 2 \cdot 2^{1510} \Leftrightarrow x = 1511$. Во втором варианте $2^{1010} = 2 \cdot 2^{1005+x/2} \Leftrightarrow x = 8$. В третьем варианте $2^{2010} = 2 \cdot 2^{505+x/2} \Leftrightarrow x = 3008$.

9-10.5 В трапеции $ABCD$ точка N – середина боковой стороны CD , отрезки AN и NB перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника ANB равна S .

Ответ. $2S$.

Комментарий. Условие перпендикулярности $AN \perp NB$ является излишним, но при этом условии задача допускает различные решения.

Первое решение (без использования условия $AN \perp NB$). Проведем среднюю линию MN и подсчитаем площадь $\triangle ABN$ как сумму площадей $\triangle AMN$ и $\triangle BMN$ с общим основанием MN и равными высотами $\frac{h}{2}$ (где h – высота трапеции). Таким образом,

$$S = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot MN \cdot \frac{h}{2} \right) = \frac{1}{2} MN \cdot h = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Второе решение (с использованием условия $AN \perp NB$). В прямоугольном треугольнике ABN медиана MN равна половине гипотенузы AB . Поэтому в равнобедренном треугольнике AMN равны углы при основании, а значит, $\angle MAN = \angle MNA = \angle NAD$. Таким образом, N лежит на биссектрисе угла A и поэтому высота в треугольнике ABN , опущенная из вершины N , равна $\frac{h}{2}$. В результате получим:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot h_{AB} = \frac{1}{2} \left(2MN \cdot \frac{h}{2} \right) = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Задачи для 11 класса

11.1 Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(2x^2 + 1)\right) + \cos(\pi(x^2 + 4x)) = 0.$$

Ответ: $-1 + \sqrt{\frac{3}{2}}.$

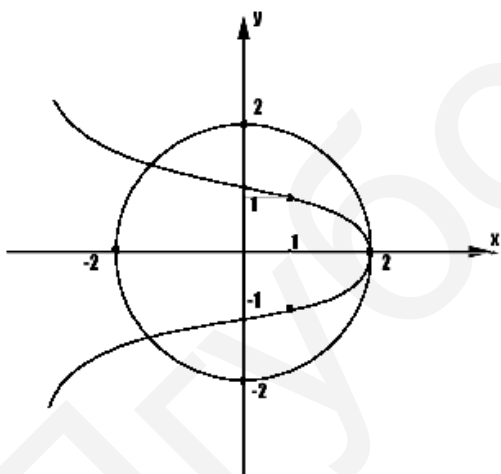
Решение. Записав первое слагаемое как $\cos\pi x^2$ и преобразовав сумму косинусов в произведение, получим две серии корней $4x = 2n + 1$ и $2x^2 + 4x = 2m + 1$ (m, n – целые). Положительные корни имеют вид $x = \frac{n}{2} + \frac{1}{4}$ и $x = -1 + \sqrt{m + \frac{3}{2}}$ (где m, n – неотрицательные целые). Для этих серий наименьшие корни – это $\frac{1}{4}$ и $-1 + \sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{1}{4}$ (последнее неравенство проверяется при возведении в квадрат обеих частей эквивалентного неравенства $\sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{5}{4}$).

11.2 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a, \\ x + \log_2(y^2 + 1) = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a=0$.



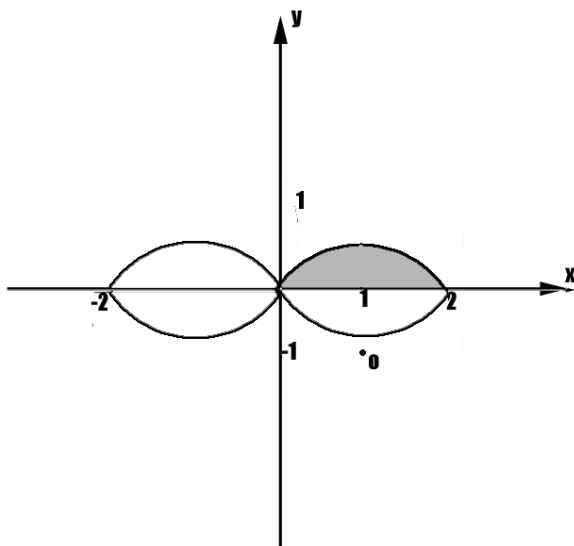
Решение. Заметим, что если (x, y) – решение системы, то и $(x, -y)$ тоже является решением этой системы. Поэтому если для параметра a система имеет единственное решение, то значение y должно быть равно нулю. Тогда из второго уравнения имеем $x=a$, и подставляя в первое уравнение $x=a, y=0$, получим $a^2 = 2a$. Значит, $a=0$ или $a=2$. Теперь необходимо проверить эти значения a (отметим, что они получены как следствие единственности решения системы, но на самом деле ещё не гарантируют единственности).

При $a=0$ первое уравнение эквивалентно равенствам $x=y=0$, и для этих нулевых значений неизвестных второе уравнение удовлетворяется, т.е. значение $a=0$ подходит.

При $a=2$ система имеет решение $x=2, y=0$, но для системы это решение – не единственное. Действительно, кривая $x = 2 - \log_2(y^2 + 1)$ пересекает окружность $x^2 + y^2 = 4$ не только в точке $(2; 0)$, но ещё в двух симметричных точках из второго и третьего квадрантов. (см. рис.). Это следует из того, что точки $(1; 1)$ и $(1; -1)$ лежат на данной кривой и расположены внутри окружности $x^2 + y^2 = 4$ (или можно убедиться, что такими будут и точки $(0; \pm\sqrt{3})$ на оси Oy), а при $|y| > 2$ соответствующие точки кривой расположены вне окружности.

11.3 Найдите площадь фигуры, которая задаётся на координатной плоскости неравенством $x^2 + y^2 \leq 2(|x| - |y|)$.

Ответ: $2\pi - 4$.



Решение. Очевидно, фигура симметрична относительно координатных осей и начала координат (поскольку неравенство не изменяется при изменении знаков x, y). Поэтому достаточно рассмотреть часть фигуры в первом квадранте и площадь этой части умножить на 4. При неотрицательных x, y неравенство запишется в виде $(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$. Таким образом, в первом квадранте имеем часть круга радиуса $\sqrt{2}$ с центром $(1; -1)$ (см. рис.). Данная часть круга является сегментом с центральным углом 90° (это угол между двумя радиусами, проведенными в граничные точки $(0;0)$ и $(2;0)$) данного сегмента. Поэтому площадь сегмента равна $\pi(\sqrt{2})^2 / 4 - 1$, а искомая площадь фигуры равна $2\pi - 4$.

11.4 Существует ли 2010-угольник со сторонами длины 1, 2, ..., 2010 (в некотором порядке), в который можно вписать окружность?

Ответ: Не существует.

Решение. Если в многоугольник с четным числом сторон можно вписать окружность, то сумма длин сторон с нечетными номерами (начиная отсчет против часовой стрелки с некоторой фиксированной вершины) равен сумме длин сторон с четными номерами. Этот факт доказывается точно так же, как соответствующая теорема из школьного курса для четырехугольника (нужно отметить равные отрезки касательных на соседних сторонах). В нашем случае сумма всех длин сторон равна нечетному числу $1+2+\dots+2010=1005 \cdot 2011$. Поэтому не удастся разбить 2010 данных отрезков на две части с одинаковыми суммами.

11.5 а) Найдите приведённый квадратный трёхчлен $P(x)$, для которого график $y=P(x)$ симметричен относительно оси Oy и касается прямой $y=x$.

б) Пусть $P(x)$ – квадратный трёхчлен с положительным старшим коэффициентом. Докажите, что если уравнение $P(x)=x$ имеет единственное решение, то уравнение $P(P(x))=x$ также имеет единственное решение.

Ответ: а) $P(x) = x^2 + 1/4$.

Решение. а) Условие симметрии относительно оси Oy означает, что $P(x)$ имеет вид $P(x) = x^2 + a$. Условие касания прямой $y=x$ означает, что квадратное уравнение $x^2 + a = x$ имеет единственное решение, т.е. его дискриминант $1 - 4a$ равен нулю.

б) Поскольку уравнение $P(x)=x$ имеет единственное решение, скажем, x_0 , то график $y=P(x)$ расположен выше прямой $y=x$ всюду, кроме единственной точки (x_0, x_0) – точки пересечения. Поэтому при $x \neq x_0$ имеем $P(P(x)) \geq P(x) > x$, т.е. уравнение $P(P(x))=x$ не имеет других корней, кроме x_0 .