Олимпиада "Будущие исследователи – будущее науки".
Математика, 2009г. Задачи и решения очного тура.

1. При всех значениях параметра a решите неравенство $8^x - 1 > a\,(2^x - 1)$.

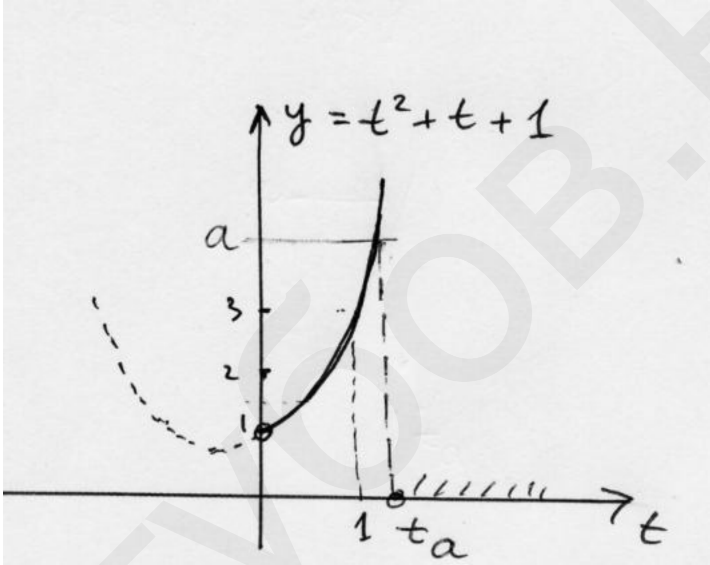
Ответ. При $a \le 1$ $\quad x > 0$;

при $1 < a < 3$ $\quad x < log_2 \dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$ или $x > 0$;

при $a \ge 3$ $\quad x < 0$ или $x > log_2 \dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$.

Решение. Значение $x = 0$ неравенству не удовлетворяет. Для $x \ne 0$ разделим обе части на $2^x - 1$. В зависимости от знака x получим либо неравенство $2^{2x} + 2^x + 1 > a$ (для $x > 0$), либо противоположное (для $x < 0$).

Обозначим $t = 2^x$ и рассмотрим два случая: а) $x > 0$, т.е. $t > 1$; и б) $x < 0$, т.е. $0 < t < 1$. В первом случае решением неравенства $t^2 + t + 1 > a$ будет множество (см. рисунок)



при $a \ge 3$ $\quad t > t_a$, где $t_a = \dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$;

при $a < 3$ $\quad t > 1$.

Аналогично, во втором случае (для $t \in (0;1)$), решая неравенство $t^2 + t + 1 < a$, получим:

при $a \ge 3$ $\quad 0 < t < 1$;
при $1 < a < 3$ $\quad 0 < t < t_a$;
при $a \le 1$ $\quad t \in \varnothing$.

Объединяя решения в обоих случаях и возвращаясь к переменной x, получаем ответ.

2. Решите уравнение $3\sin\, x + 4\cos\, x = tg\, x + 7\text{ctg}\, x$.

Ответ. Корней нет. **Решение.** Оценим модуль левой и правой части. Введя дополнительный угол α для выражения в левой части, получим

$$|3\sin x + 4\cos x| = \left|\sqrt{3^2+4^2}\,\sin(x+\alpha)\right| \le 5.$$

В правой части воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (где $a \geq 0$, $b \geq 0$). Мы используем это неравенство для $a = |\operatorname{tg} x|$, $b = 7|\operatorname{ctg} x|$. Учитывая, что $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ одного знака, получим

$$|\operatorname{tg} x + 7\operatorname{ctg} x| = |\operatorname{tg} x| + 7|\operatorname{ctg} x| \geq 2\sqrt{7}|\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x| = 2\sqrt{7}.$$

Поскольку $5 < 2\sqrt{7}$, левая часть исходного неравенства всегда меньше правой.

3. В тетраэдре *ABCD* рѐбра *AB*, *AC* и *AD* взаимно перпендикулярны, *AB* = *AC* = 4, *AD* = 8.
а) Существует ли точка тетраэдра, расстояния от которой до любой грани меньше 1 ?
б) Для какой точки тетраэдра сумма расстояний от неѐ до всех граней будет наименьшей?

Ответ. а) Не существует; б) для точки *A*. **Решение.** а) Вычислим радиус вписанного шара по формуле $r = \dfrac{3V}{S_{\text{полн}}}$. Здесь (в силу перпендикулярности ребер *AB*, *AC* и *AD*) имеем: $V = \dfrac{1}{6}AB \cdot AC \cdot AD = \dfrac{64}{3}$, $S_{ABC} = 8$, $S_{ABD} = S_{ACD} = 16$, $S_{BCD} = 24$. Значит, $r = 1$.

Теперь нетрудно обосновать отрицательный ответ на вопрос пункта а). Один из способов рассуждения такой: предположим, от противного, что искомая точка *M* существует и проведем через *M* четыре плоскости, параллельные граням. Рассмотрим четыре усеченные треугольные пирамиды, бóльшими основаниями которых служат грани тетраэдра *ABCD*. По предположению, высоты во всех пирамидах меньше 1. Очевидно, любая точка тетраэдра принадлежит хотя бы одной из этих усеченных пирамид. Тогда для точки ***O*** --центра вписанного в *ABCD* шара -- получим противоречие (т.к. точка ***O*** удалена ровно на единицу от всех граней).

Другой способ получить противоречие - следующий. Пусть h_1, h_2, h_3, h_4 – расстояния от *M* до граней тетраэдра. Тогда $V = V_{ABCM} + V_{ABDM} + V_{ACDM} + V_{BCDM} = {}$ $= \dfrac{1}{3}\left(S_1h_1 + S_2h_2 + S_3h_3 + S_4h_4\right) < \dfrac{1}{3} \cdot S_{\text{полн}} \cdot 1 = V$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

б) Докажем, что наименьшая сумма расстояний достигается в точке *A* и равна высоте пирамиды, проведенной к наибольшей грани *BCD*, т.е. равна $h_4^* = \dfrac{3V}{S_4}$ (Здесь $S_4 = S_{BCD}$ имеет наибольшую площадь). Действительно, для произвольной точки *M* тетраэдра имеем:

$$\left(h_1 + h_2 + h_3 + h_4\right) - h_4^* = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - \frac{3V}{S_4} =$$
$$= h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - \frac{S_1h_1 + S_2h_2 + S_3h_3 + S_4h_4}{S_4} =$$
$$= \left(1 - \frac{S_1}{S_4}\right)h_1 + \left(1 - \frac{S_2}{S_4}\right)h_2 + \left(1 - \frac{S_3}{S_4}\right)h_3 \geq 0,$$

и значение последнего выражения равно 0 лишь при условии $h_1 = h_2 = h_3 = 0$, т.е. в точке *A*.

4. Дан многочлен $P(x) = (\sqrt{2}-1)x^3 + (\sqrt{2}+1)x^2 - 10x + 10$. Докажите, что у многочлена $(P(x))^{2009}$ (после приведения подобных членов) имеется а) хотя бы один иррациональный коэффициент; б) хотя бы два иррациональных коэффициента.

Решение. Существует несколько способов решения задачи.

1-й способ. Заметим, что значение $P(1) = 2\sqrt{2}$ равно сумме коэффициентов $P(x)$, а число $\left(P(1)\right)^{2009} = 2^{2009}\cdot 2^{1004}\cdot\sqrt{2}$ равно сумме коэффициентов многочлена $(P(x))^{2009}$. Значит, у этого многочлена есть хотя бы один иррациональный коэффициент. Подсчитаем теперь $P(-1) = 22$. Поэтому значение многочлена $(P(x))^{2009}$ при рациональном (причем, ненулевом) аргументе $x = -1$ есть рациональное число (равное 22^{2009}), и значит, у многочлена $(P(x))^{2009}$ иррациональный коэффициент не может быть единственным.

2-ой способ. Обозначим через a и b старшие коэффициенты: $P(x) = ax^3 + bx^2 + \ldots$ и пусть $\left(P(x)\right)^n = a_n x^{3n} + b_n x^{3n-1} + \ldots$. Нетрудно подсчитать, что $a_n = a^n$ и $b_n = na^{n-1}b$ (вторая формула получается из правила перемножения многочленов и легко проверяется по индукции). В нашем случае $a_{2009} = \left(\sqrt{2}-1\right)^{2009}$, $b_{2009} = 2009\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)^{2007}$. Осталось проверить, что степень числа $(\sqrt{2}-1)$ всегда иррациональна. Это можно сделать, либо используя бином Ньютона (учитывая, что коэффициенты разложения при $\sqrt{2}$ в нечетной степени всегда одного знака), либо заметив, что при умножении чисел вида $\left(A - B\sqrt{2}\right)\left(C - D\sqrt{2}\right)$, где A, B одного знака и C, D одного знака получается число вида $E - F\sqrt{2}$, где E и F также одного знака, и в частности, $F \neq 0$.

5. На координатной плоскости рассматривается множество прямоугольных треугольников, вершины которых лежат на параболе $y = x^2$ и имеют целочисленные координаты.

а) Конечно или бесконечно это множество? б) Чему может равняться разность катетов для треугольника из этого множества?

Ответ. а) Множество бесконечно; б) $\pm 2\sqrt{2}$ или 0.

Решение. Пусть точка $A(n,n^2)$ – вершина прямого угла ($n \in \mathbf{Z}$) треугольника ABC, $B(m,m^2)$ – другая вершина катета AB. Тогда угловой коэффициент прямой AB равен $K_{AB} = \dfrac{m^2 - n^2}{m - n} = m + n$, т.е. это число целое. Аналогично, для третьей вершины $C(l,l^2)$ треугольника ABC получим, что $l + n = K_{AC}$ – тоже целое число. Но $K_{AB}\cdot K_{AC} = -1$ по условию перпендикулярности. Это возможно лишь тогда, когда числа $(m + n)$ и $(l + n)$ равны ± 1. Отсюда получается всѐ (бесконечное) множество треугольников, а именно: $A(n,n^2)$, $B(-n+1,(-n+1)^2)$, $C(-n-1,(n+1)^2)$, где n – любое целое.

Длины катетов AC и AB равны $|2n+1|\sqrt{2}$ и $|2n-1|\sqrt{2}$. При $n = 0$ их разность равна 0, а в остальных случаях они отличаются на $2\sqrt{2}$ (т.к. под модулем стоят числа одного знака).